Chủ đề 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

MỤC LỤC

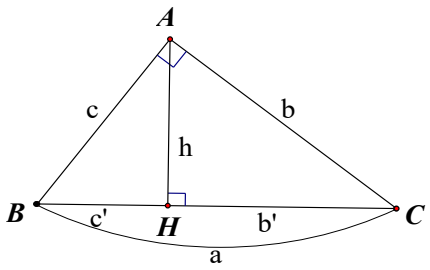
A. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 1
. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG 2
. Lý thuyết 2
. Bài tập 2
. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN 10
. Lý thuyết 10
. Bài tập 11
. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG 16
. Lý thuyết 16
. Bài tập 16
. GIẢI BÀI TOÁN HỆ THỨC LƯỢNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ 18
. Lý thuyết 18
. Bài tập 18
. MỘT SỐ BÀI TẬP SƯU TẦM 21

thuvientoanhoc.com

🗁. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

🗁. Lý thuyết

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:



1. $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$

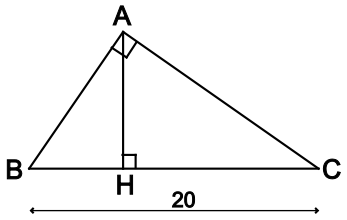
   $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
2. $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
3. $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
4. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$.
5. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pitago)

🗁. Bài tập

Vận dụng hệ thức 1:

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = 20cm. Biết tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là 9 : 16. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Vẽ đường cao AH.

Ta có $\frac{HB}{HC} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{HB}{9} = \frac{HC}{16} = \frac{HB+HC}{9+16} = \frac{20}{25}$

Suy ra $HB = \frac{9.20}{25} = 7,2$ (cm); $HC = \frac{16.20}{25} = 12,8$ (cm)

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH ta có:

$AB^2 = BC.BH = 20.7,2 = 144 \Rightarrow$ AB = 12 (cm);

$AC^2 = BC.CH = 20.12,8 = 256 \Rightarrow$ AC = 16 (cm).

Vậy diện tích ΔABC là $S = \frac{1}{2}ABAC = \frac{1}{2} \cdot 12.16 = 96$ (cm²).

Cách giải khác:

Sau khi tính được HB và HC, ta tính AH theo công thức: $AH^2 = HB.HC$ (hệ thức 2).

$AH^2 = 7,2.12,8 = 92,16 \Rightarrow$ AH = 9,6 (cm).

Diện tích ΔABC là $S = \frac{1}{2}BCAH = \frac{1}{2} \cdot 20.9,6 = 96$ (cm²).

thuvientoanhoc.com

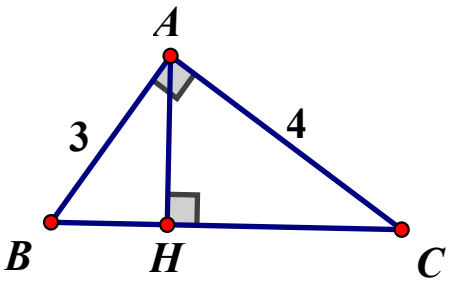
Bài 2: Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 cm và 4 cm , kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC có các cạnh góc vuông AB = 3cm, AC = 4cm, AH là đường cao.

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$ cm



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$BA^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} \Rightarrow BH = \frac{3^2}{5} \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$ (cm)

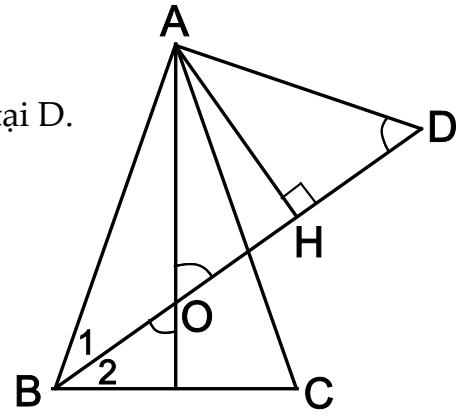
$CA^2 = CH.CB \Rightarrow CH = \frac{CA^2}{CB} \Rightarrow CH = \frac{4^2}{5} \Rightarrow CH = \frac{16}{5}$ (cm)

$AH^2 = HB.HC \Rightarrow AH^2 = \frac{9}{5}.\frac{16}{5} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$ (cm)

(Có thể tính đường cao AH bởi công thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$)

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A. Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại O. Biết $OA = 2\sqrt{3}$ cm, OB = 2cm, tính độ dài AB.

Hướng dẫn giải



Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt tia BO tại D.

Ta có $\widehat{D} + \widehat{B_1} = 90^\circ$ $\widehat{AOD} + \widehat{B_2} = 90^\circ$

mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ nên $\widehat{AOD} = \widehat{D}$

Do đó ΔAOD cân tại A. Suy ra $AD = AO = 2\sqrt{3}$ (cm).

Vẽ AH ⊥ OD thì HO = HD.

Ta đặt $HO = HD = x$ thì $BD = 2x + 2$.

Xét ΔABD vuông tại A, đường cao AH, ta có $AD^2 = BD.HD$.

Suy ra $(2\sqrt{3})^2 = x(2x+2)$ Từ đó ta được phương trình:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -3.$$

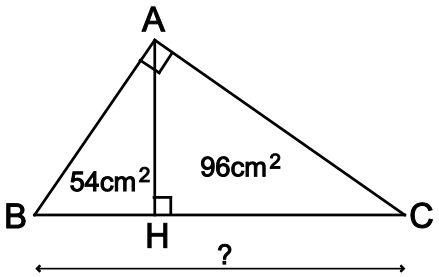
Giá trị x = 2 được chọn, giá trị x = –3 bị loại.

Do đó $BD = 2+2+2 = 6$ (cm). Suy ra $AB = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (cm).

Vận dụng hệ thức 2:

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết diện tích các tam giác ABH và ACH lần lượt là 54cm² và 96cm². Tính độ dài BC.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABH} = \frac{1}{2} AHBH = 54$

Suy ra $AH.BH = 108$. (1)

$S_{ACH} = \frac{1}{2}$AH.CH = 96 Suy ra $AH.CH = 192$. (2)

Từ (1) và (2) ta được: $AH^2.BH.CH = 108.192.$

Mặt khác $AH^2 = BH.CH$ (hệ thức 2). Suy ra $AH^4 = 12^4 \Rightarrow$ AH = 12 (cm).

Ta có $S_{ABC} = 54 + 96 = 150$ (cm²) mà $S_{ABC} = \frac{1}{2} BCAH$ nên $\frac{1}{2}$BCAH = 150

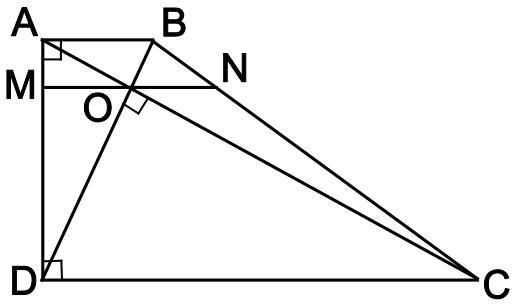
Suy ra BC = $\frac{150.2}{12} = 25$ (cm).

Bài 2: Cho hình thang ABCD, $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$ Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết OB = 5,4cm; OD = 15cm.

a) Tính diện tích hình thang;

b) Qua O vẽ một đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Tính độ dài MN.

Hướng dẫn giải



** Tìm cách giải*

Đã biết đường chéo BD nên cần tìm đường chéo AC là có thể tính được diện tích hình thang. Muốn vậy phải tính OA và OC.

** Trình bày lời giải*

a) • Xét ΔABD vuông tại A có AO ⊥ BD nên $OA^2 = OB.OD$ (hệ thức 2).

thuvientoanhoc.com

Do đó $OA^2 = 5,4.15 = 81 \Rightarrow$ OA = 9 (cm).

• Xét ΔACD vuông tại D có OD ⊥ AC nên $OD^2 = OA.OC$ (hệ thức 2).

$\Rightarrow OC = \frac{OD^2}{OA} = \frac{15^2}{9} = 25$ (cm).

Do đó $AC = 25 + 9 = 34$ (cm); $BD = 5,4 + 15 = 20,4$ (cm).

Diện tích hình thang ABCD là: $S = \frac{ACBD}{2} = \frac{34.20,4}{2} = 346,8$ (cm²).

b) Xét ΔADC có OM // CD nên $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-lét). (1)

Xét ΔBDC có ON // CD nên $\frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC}$ (hệ quả của định lí Ta-lét). (2)

Xét ΔABC có ON // AB nên $\frac{AO}{AC} = \frac{BN}{BC}$ (định lí Ta-lét). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$

Do đó OM = ON.

Xét ΔAOD vuông tại O, OM ⊥ AD nên $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2}$ (hệ thức 4).

Do đó $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} \Rightarrow OM \approx 7,7$ (cm).

Suy ra $MN \approx 7,7.2 = 15,4$ (cm).

Vận dụng hệ thức 4:

Bài 1: Cho hình vuông ABCD cạnh 1. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Hướng dẫn giải

** Tìm cách giải*

Biểu thức $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ gợi ý cho ta vận dụng hệ thức (4) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ để giải. Muốn vậy phải tạo ra một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng AM, AN.

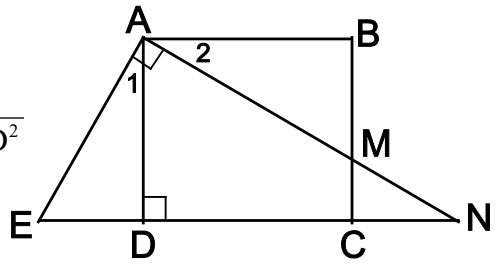
** Trình bày lời giải*

thuvientoanhoc.com

Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt đường thẳng CD tại E.

ΔADE và ΔABM có $\widehat{D} = \widehat{B} = 90^\circ$ AD = AB; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{DAM}$).

Do đó $\Delta ADE = \Delta ABM$ $(g.c.g)$. Suy ra AE = AM.



Xét ΔAEN vuông tại A có AD ⊥ EN nên $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{AD^2}$

Mặt khác $AE = AM;\ AD = 1$ nên $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=1$

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK. Chứng minh rằng : $\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AH^2}$

Hướng dẫn giải

* *Tìm cách giải:* Để chứng minh đẳng thức trên người ta thường nghĩ ngay đến hệ thức lượng trong tam giác vuông " Hệ thức $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ ". Một thủ thuật để nhận ra tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền là vẽ đường phụ để tạo ra tam giác vuông tại B có đường cao là BK, cạnh góc vuông là BC. Khi đó ta nghĩ ngay đường phụ cần vẽ cạnh góc vuông còn lại.

* *Trình bày lời giải*

Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia đối của tia AC tại D.

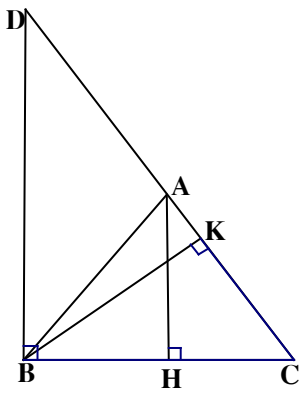
Vì Δ ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến ⇒ BH = HC.

Xét Δ BCD có BH = HC (c/m trên) ; AH // BD (⊥ BC)

⇒ CA = AD (t/c đường trung bình của tam giác).

Nên AH là đường trung bình của Δ BCD

⇒ AH = $AH=\frac{1}{2}BD$ ⇒ BD = 2AH. (1)



thuvientoanhoc.com

Xét ΔBCD có $\widehat{DBC} = 90^0$; BK $\perp$ CD (K $\in$ CD)

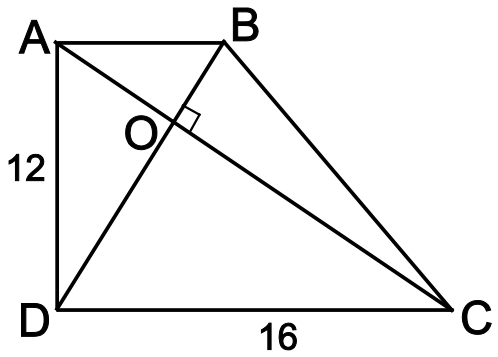
$\Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$ (đpcm)

Vận dụng nhiều hệ thức

Bài 1: Cho hình thang ABCD, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ =$ hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Cho biết AD = 12cm; CD = 16cm. Tính các độ dài OA, OB, OC, OD.

Hướng dẫn giải



ΔADC vuông tại D, theo định lí Py-ta-go ta có:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$.

Suy ra AC = 20 (cm).

ΔADC vuông tại D, DO là đường cao nên

$AD.DC = AC.DO$ (hệ thức 3).

Suy ra $OD = \frac{ADDC}{AC} = \frac{12.16}{20} = 9,6$ (cm).

Ta lại có $AD^2 = AC.AO$ (hệ thức 1) nên $OA = \frac{AD^2}{AC} = \frac{12^2}{20} = 7,2$ (cm).

Do đó $OC = 20 - 7,2 = 12,8$ (cm).

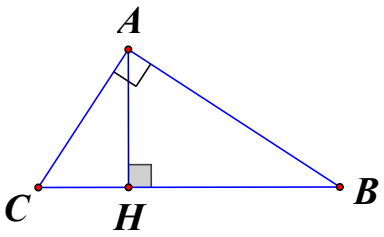
Xét ΔABD vuông tại A, AO là đường cao nên $AO^2 = OB.OD$ (hệ thức 2).

$\Rightarrow OB = \frac{AO^2}{OD} = \frac{7,2^2}{9,6} = 5,4$ (cm).

thuvientoanhoc.com

Bài 2: **(Hãy giải bằng nhiều cách khác nhau)** Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết AB=8cm, AC=6cm. Tính độ dài AH.)

Hướng dẫn giải



***Cách 1:** Ta có ΔABC vuông tại A nên :

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(cm)$ (Định lý Pytago)

ΔABC vuông tại A, AH⊥BC, nên $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = 4,8(cm)$

***Cách 2:** ΔABC vuông tại A, AH⊥BC, nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{64.36}{100}} = 4.8(cm)$$

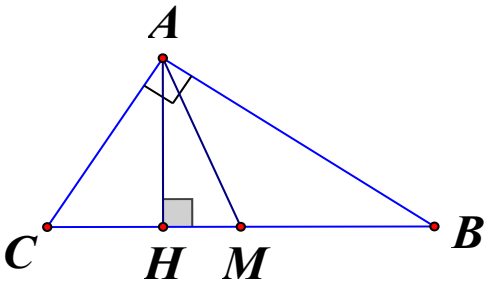
***Cách 3:** Tam giác ABC vuông tại A, Theo định lý Pytago ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ nên suy ra BC=10cm.

ΔABC vuông tại A nên: $BH.BC = AB^2 \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = 6.4(cm)$. Mà $HC = BC - BH = 3,6$ (cm)

ΔABC vuông tại A, AH⊥BC, nên: $AH^2 = BH.HC = 4.8^2 \Rightarrow AH = 4.8(cm)$

***Cách 4:** Gọi M là trung điểm BC.



Ta có : $BM = AM = \dfrac{1}{2}BC = 5cm$

+ Tính được BH=6.4cm

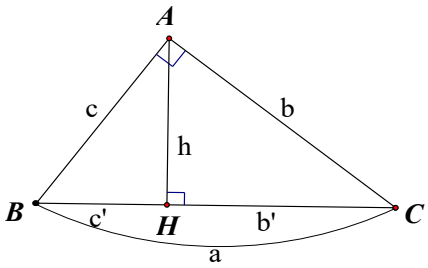
+ Nên $MH = BH - BM = 6,4 - 5 = 1(cm)$

Áp dụng định lý Pitago vào ΔHAM vuông tại H:

$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{5^2 - 1,4^2} = 4,8(cm)$

thuvientoanhoc.com

Hệ thống phương pháp giải toán thường gặp.



Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

Phương pháp giải: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng AB, AC, BC, HA, HB, HC thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại bằng việc vận dụng các hệ thức $(1) \to (5)$

Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Phương pháp giải: Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo hướng:

Bước 1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

Bước 2. Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

Bước 3. Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

Chú ý: Có thể vẽ thêm hình phụ để tạo thành tam giác vuông hoặc tạo thành đường cao trong tam giác vuông từ đó vận dụng các hệ thức.

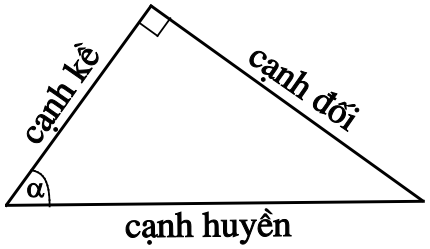
thuvientoanhoc.com

🗁. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

🗁. Lý thuyết

1. Định nghĩa

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$



Từ định nghĩa ta có cả bốn tỉ số lượng giác đều dương và $sina < 1;\ cosa < 1.$

2. Định lí

Nếu hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng côsin của góc kia, tang của góc này bằng côtang của góc kia.

3. Một số hệ thức cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (1); $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (2);

$tan\ \alpha . cot\ \alpha = 1$ (3); $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ (4).

4. So sánh các tỉ số lượng giác

Cho α, β là hai góc nhọn. Nếu $\alpha < \beta$ thì

- $sin\ \alpha < sin\ \beta\ ;\ tan\ \alpha < tan\ \beta;$
- $cos\ \alpha > cos\ \beta;\ \ cot\ \alpha > cot\ \beta.$

Bảng lượng giác một số góc đặc biệt

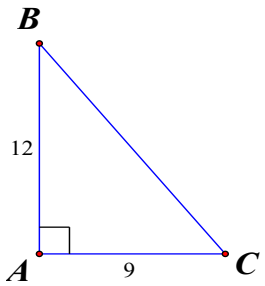
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖
cot	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

thuvientoanhoc.com

Ví dụ minh họa: Cho tam giác vuông tại A, trong đó AC = 0,9m; AB = 1,2 m.Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Hướng dẫn giải

Ta có AC = 9 dm, AB = 12 dm.Theo định lí Pitago, ta có



$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (dm)

Vậy $sin\ B = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$Cos\ B = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; $tan\ B = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; $cot\ B = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Vì góc B và góc C là hai góc phụ nhau nên:

$Sin\ B = cos\ C = \frac{3}{5}$; $Cos\ B = sin\ C = \frac{4}{5}$; $tanB = cot\ C = \frac{3}{4}$; $cotB = tan\ C = \frac{4}{3}$

🗁. Bài tập

Bài 1: Chứng minh các hệ thức:

a) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

a) Ta có $1 + \cot^2\alpha = 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Nhận xét: Trong cách giải trên ta đã biến đổi vế trái thành vế phải. Ta cũng có thể biến đổi vế phải thành vế trái theo chiều ngược lại.

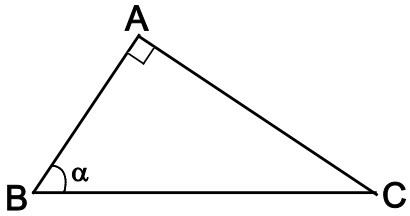
Hai hệ thức trên cũng là hệ thức cơ bản, nên nhớ để sau này vận dụng.

thuvientoanhoc.com

Bài 2: Cho α là một góc nhọn. Chứng minh rằng:

a) $\sin\alpha < \tan\alpha$; b) $\cos\alpha < \cot\alpha$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ $\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$ mà BC > AB nên $\frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB}$

Do đó $\sin\alpha < \tan\alpha$;

b) Ta có $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ $\cot\alpha = \frac{AB}{AC}$ mà BC > AC nên $\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC}$

Do đó $\cos\alpha < \cot\alpha$

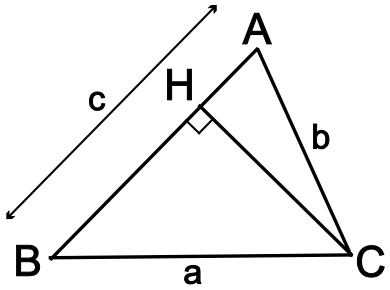
Nhận xét: Phương pháp giải ví dụ này là dùng định nghĩa của tỉ số lượng giác.

Bài 3: Chứng minh định lí sin: Trong một tam giác nhọn, độ dài các cạnh tỉ lệ với sin của các góc đối diện: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Hướng dẫn giải

** Tìm cách giải:*

Để có sin A (hoặc sin B, sin C) thì phải xét tam giác vuông với A là một góc nhọn. Do đó phải vẽ thêm đường cao.



** Trình bày lời giải:*

Vẽ đường cao CH.

Xét ΔACH vuông tại H ta có: $\sin A = \frac{CH}{AC}$ (1)

Xét ΔBCH vuông tại H ta có: $\sin B = \frac{CH}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CH}{AC} : \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$. Do đó $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Lưu ý: Nếu ΔABC có $\hat{C} \geq 90^\circ$ thì ta vẫn có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

thuvientoanhoc.com

Bài 4: Tìm góc x, biết rằng:

a) $tan\ x = 3cot\ x$; b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

a) $tan\ x = 3cot\ x$;. Suy ra $\tan x = \dfrac{3}{\tan x}$ (vì $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$).

Do đó $tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$ Vậy $x = 60^o$.

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ Bình phương hai vế ta được: $sin^2 x + 2sin\ x.cos\ x + cos^2 x = 2$

$\Leftrightarrow 2sin\ x.cos\ x + 1 = 2$ (vì $sin^2 x + cos^2 x = 1$)

$\Leftrightarrow 2sin\ x.cos\ x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2sin\ x.cos\ x = 0 \Leftrightarrow sin^2 x - 2sin\ x.cos\ x + cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (sin\ x - cos\ x)^2 = 0$. Do đó $sin\ x = cos\ x$

$\Leftrightarrow sin\ x = sin\ (90^o - x)$ (vì $cos\ x = sin\ (90^o - x)$)

Dẫn tới $x = 90^o - x \Leftrightarrow 2x = 90^o \Leftrightarrow x = 45^o$.

Nhận xét: Phương pháp chung để giải ví dụ này là tìm cách đưa phương trình có hai tỉ số lượng giác về dạng còn một tỉ số lượng giác bằng cách vận dụng quan hệ giữa các tỉ số lượng giác đó

Bài 5: Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lí:

a) $P = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

b) $Q = \tan 15^0 . \tan 25^0 . \tan 35^0 . \tan 45^0 . \tan 55^0 . \tan 65^0 . \tan 75^0$

c) Biết $\cos\alpha = \dfrac{20}{29}$ Tính $sin\ \alpha$, $tan\ \alpha$ và $\cot\alpha$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí nếu hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng côsin góc kia, tang của góc này bằng côtang góc kia, ta có:

a) $P = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

$= \left(\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ\right) + \left(\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ\right) + ... + \left(\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ\right) + \sin^2 45^\circ$

$= \left(\sin^2 1^\circ + cos^2 1^\circ\right) + \left(\sin^2 2^\circ + cos^2 2^\circ\right) + ... + \left(\sin^2 44^\circ + cos^2 44^\circ\right) + \sin^2 45^\circ$

thuvientoanhoc.com

$= 1+1+1+...+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 44,5$

b) $Q = \tan 15^0.\tan 25^0.\tan 35^0.\tan 45^0.\tan 55^0.\tan 65^0.\tan 75^0$

$=\left(\tan 15^0.\tan 75^0\right).\left(\tan 25^0.\tan 65^0\right).\left(\tan 35^0.\tan 55^0\right).\tan 45^0$

$=\left(\tan 15^0.\cot 15^0\right).\left(\tan 25^0.\cot 65^0\right).\left(\tan 35^0.\cot 35^0\right).\tan 45^0$

$=1.1.1.1=1$

c) Ta có $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841}$

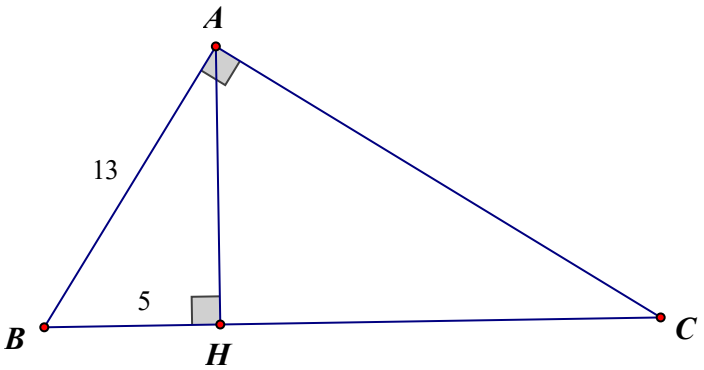
Do đó $\sin\alpha = \frac{21}{29}$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{21}{29}:\frac{20}{29} = \frac{21}{20}$ $\cos\alpha = \frac{20}{21}$

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính $\sin B$, $\sin C$ biết rằng:

a) $AB = 13$ và $BH = 5$; b) $BH = 3$ và $CH = 4$.

Hướng dẫn giải

a) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có



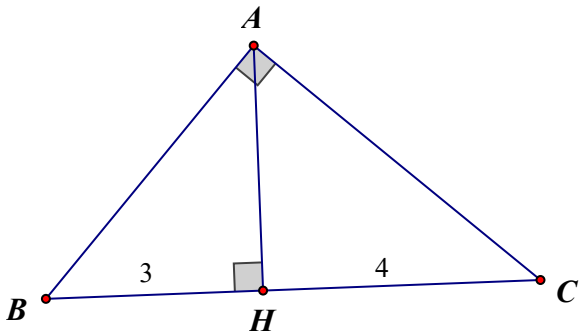
$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{13^2}{5} = 33,8$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 31,2$

$SinB = \frac{AC}{BC} = \frac{31,2}{33,8} = \frac{12}{13}$

$SinC = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{33,8} = \frac{5}{13}$

b) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có $AH^2 = BH.CH = 3.4 \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$



Tam giác ABH vuông. Theo định lý Pytago ta có $AB = \sqrt{HB^2 + AH^2} = \sqrt{3^2+12} = \sqrt{21}$

$SinB = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

Tam giác ABC vuông, $BC = BH + HC = 3 + 4 = 7$

Theo định lý Pytago ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{49 - 21} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$$SinC = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Cách 2: Tam giác AHC vuông tại H; Theo định lý Pytago có

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}$$

$$SinC = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Nhận xét: Học sinh vận dụng các hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông từ đó tính ra tỉ số lượng giác của các góc nhọn trong tam giác vuông.

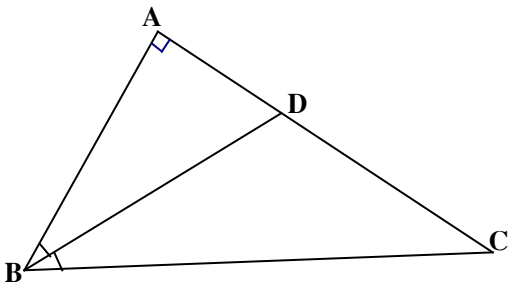
Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

Hướng dẫn giải

Vẽ đường phân giác BD của ΔABC ($D \in AC$).

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có : $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD + DC}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB + BC}.$$



Xét ΔABD có $\widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow \tan\widehat{ABD} = \frac{AD}{AB}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$$

Vậy $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

thuvientoanhoc.com

🗁. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

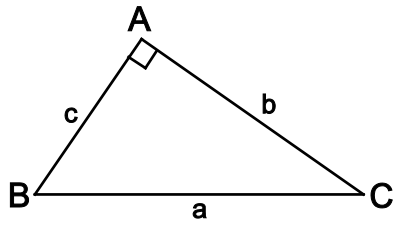
🗁. Lý thuyết

1. Định lí

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề;
- Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

Trong hình vẽ bên thì:



$b = a.\sin B = a.\cos C$; $c = a.\sin C = a.\cos B$;

$b = c.\tan B = c.\cot C$; $c = b.\tan C = b.\cot B$;

2. Giải tam giác vuông

Là tìm tất cả các cạnh và góc của tam giác vuông khi biết hai yếu tố của nó (trong đó ít nhất có một yếu tố về độ dài).

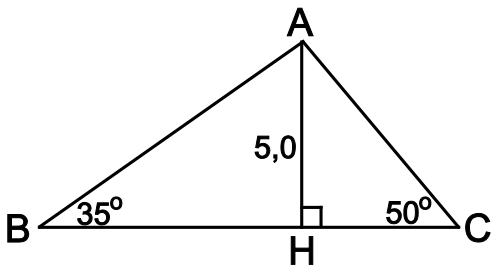
🗁. Bài tập

Bài 1: Giải tam giác ABC biết $\hat{B} = 35^\circ$; $\hat{C} = 50^\circ$ và đường cao AH = 5,0cm.

Hướng dẫn giải

Ta phải tìm $\hat{A}$ AB, AC và BC.

$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 95^\circ$



- Xét ΔABH vuông tại H ta có:

$AH = AB.\sin B \Rightarrow AB = \dfrac{AH}{\sin B} = \dfrac{5,0}{\sin 35^\circ} \approx 8,7(cm)$

$BH = AH.\cot B \approx 5,0.\cot 35^o \approx 7,1$ (cm).

- Xét ΔACH vuông tại H ta có

$AH = AC.\sin C \Rightarrow AC = \dfrac{AH}{\sin C} = \dfrac{5,0}{\sin 50^\circ} \approx 6,5(cm)$

$CH = AH.\cot C \approx 5,0.\cot 50^o \approx 4,2$ (cm).

Do đó $BC = BH + CH = 7,1 + 4,2 = 11,3$ (cm).

Vậy $\hat{A} = 95^\circ$; AB = 8,7cm; AC = 6,5cm và BC = 11,3cm.

thuvientoanhoc.com

Lưu ý: Sau khi tính được AB và AC, có thể tính BH và CH theo AB và AC:

$$BH = AB.\cos B \ ; \ CH = AC.\cos C.$$

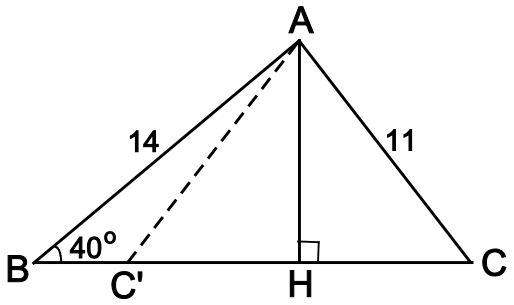
Tuy nhiên, ta nên tính BH và CH theo các số đo đã cho trong đề bài để kết quả được chính xác hơn.

Bài 2: Cho tam giác ABC, AB = 14cm, AC = 11cm và $\hat{B} = 40^o$. Tính độ dài BC.

Hướng dẫn giải

** Tìm cách giải*

Vẽ đường cao AH để vận dụng các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông. Tính HB và HC từ đó tính được BC.



** Trình bày lời giải*

Vẽ đường cao AH. Xét ΔABH vuông tại H có:

$AH = AB.\sin B = 14.\sin 40^o \approx 9,0$ (cm).

$BH = AB.\cos B = 14.\cos 40^o \approx 10,7$ (cm).

Xét ΔAHC vuông tại H có: $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} \approx 6,3$ (cm).

- Nếu H nằm giữa B và C thì $BC = BH + HC \approx 10,7 + 6,3 = 17$ (cm).
- Nếu C' nằm giữa B và H thì $BC' = BH - HC' \approx 10,7 - 6,3 = 4,4$ (cm).

Lưu ý: Học sinh có thể chỉ giải một nghiệm hình là chưa đủ. Bài toán có 2 nghiệm hình

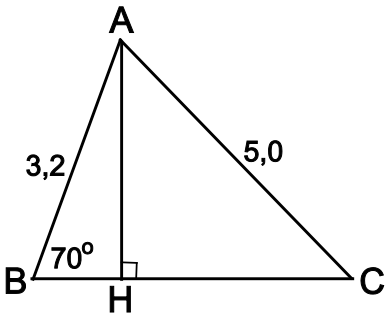
Bài 3: Cho tam giác ABC, AB = 3,2cm; AC = 5,0cm và $\hat{B} = 70^\circ$ Tính độ dài BC.

Hướng dẫn giải

Vẽ đường cao AH. Xét ΔABH vuông tại H có:

$AH = AB.\sin B = 3,2.\sin 70^o \approx 3,0$ (cm).

$BH = AB.\cos B = 3,2.\cos 70^o \approx 1,1$ (cm).



Xét ΔAHC vuông tại H có:

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} \approx \sqrt{5,0^2 - 3,0^2} = 4,0$ (cm).

Điểm C không thể nằm giữa H và B vì trên tia HB có HC > HB. Chỉ còn trường hợp điểm H nằm giữa B và C. Ta có $BC = BH + HC \approx 1,1 + 4,0 = 5,1$ (cm).

thuvientoanhoc.com

🗁. GIẢI BÀI TOÁN HỆ THỨC LƯỢNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

🗁. Lý thuyết

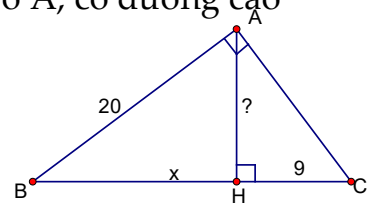
- Thường gọi độ dài một cạnh cần tìm là ẩn, từ đó thiết lập phương trình, giải phương trình tính ra kết quả

🗁. Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A, đương cao AH. Biết AB = 20cm, HC = 9cm. Tính độ dài AH.

Hướng dẫn giải

Đặt $BH = x$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông ở A, có đường cao AH. Ta được: $AB^2 = BH.BC$ hay $20^2 = x(x + 9)$.



Thu gọn ta được phương trình : $x^2 + 9x - 400 = 0$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 16$; $x_2 = -25$ (loại)

Dùng định lý Pitago tính được AH = 12 cm

Lưu ý : Giải PT bậc 2 nên dùng máy tính để giải cho nhanh.

Thuộc một số bộ ba số Pitago càng tốt để mau chóng ghi kết quả

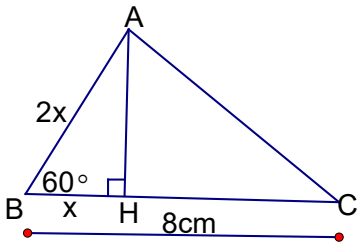
Bài 2: Cho tam giác ABC , $\hat{B} = 60^0$, BC = 8cm; AB + AC = 12cm . Tính độ dài cạnh AB.

Hướng dẫn giải

Kẻ AH ⊥ BC. Đặt $AB = 2x$. Từ đó tính được $BH = x$ và $AH = x\sqrt{3}$; $HC = 8 - x$

Áp dụng định lí Pitago ta cho tam giác AHC vuông tại H

Ta có: AC = $\sqrt{\left(x\sqrt{3}\right)^2 + (8-x)^2} = \sqrt{4x^2 - 16x + 64}$



Do AB + AC = 12 nên $2x + \sqrt{4x^2 - 16x + 64} = 12$

Giải PT trên ta được : x = 2,5

AB = 2.2,5 = 5cm

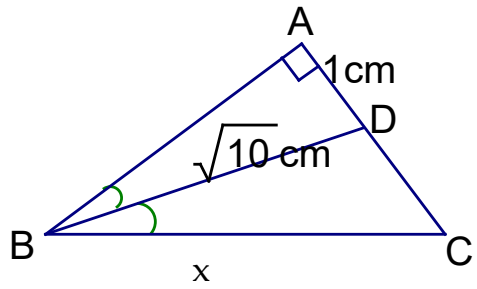
Chú ý: Ta cũng tính được chu vi tam giác ABC = 20cm .

Diện tích tam giác ABC = $10\sqrt{3}$ cm.

thuvientoanhoc.com

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác. Biết rằng AD = 1cm; BD = $\sqrt{10}$ cm. Tính độ dài cạnh BC (nhập kết quả dưới dạng số thập phân)

Bài giải sơ lược



Áp dụng định lí Pitago tính được AB = 3cm.

Đặt BC = x , dùng Pitago tính được $AC^2 = \sqrt{x^2 - 9}$.

Do AD = 1 nên DC = $\sqrt{x^2 - 9} - 1$

Tam giác ABC có BD là phân giác góc ABC nên :

$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ hay $\frac{3}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9} - 1}$. Từ đó ta được phương trình $8x^2 - 6x - 90 = 0$

Giải phương trình tìm được x = 3,75cm

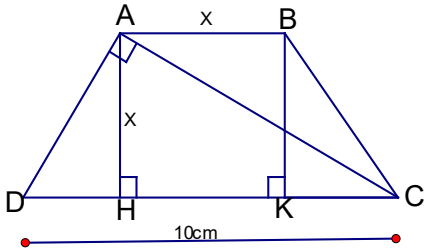
Trả lời : **BC = 3,75cm**

Bài 4: Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên . Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Hướng dẫn giải

Kẻ AH ⊥ CD ; BK ⊥ CD. Đặt AH = AB = x ⇒ HK = x

$\Delta AHD = \Delta BKC$ (cạnh huyền- góc nhọn)



Suy ra : $DH = CK = \frac{10 - x}{2}$.

Vậy $HC = HK + CK = x + \frac{10 - x}{2} = \frac{x + 10}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ADC vuông ở A có đường cao AH

Ta có : $AH^2 = DH.CH$ hay $x^2 = \frac{10 - x}{2}.\frac{10 + x}{2} \Leftrightarrow 5x^2 = 100$

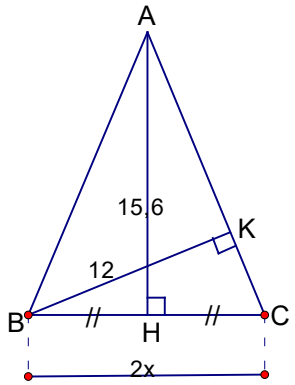
Giải phương trình trên ta được $x = 2\sqrt{5}$ và $x = -2\sqrt{5}$ (loại)

Vậy : $AH = 2\sqrt{5}$

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh đáy có độ dài 15,6cm, đường cao ứng với cạnh bên dài 12cm. Tính độ dài cạnh đáy BC.

Hướng dẫn giải

Đặt $BC = 2x$, từ tính chất của tam giác cân ta suy ra $CH = x$



Áp dụng định lí Pitago tính được $AC = \sqrt{15,6^2 + x^2}$

Từ hai tam giác vuông KBC và HAC đồng dạng ta được:

$\frac{BC}{AC} = \frac{KB}{AH}$ hay $\frac{2x}{\sqrt{15,6^2 + x^2}} = \frac{12}{15,6}$

Đưa về phương trình $15,6^2 + x^2 = 6,76x^2$

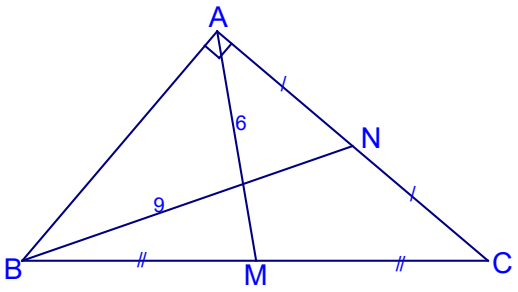
Giải phương trình trên ta được nghiệm dương x = 6,5

Vậy **BC = 2.6,5 = 13** (cm)

Bài 6: Tính độ dài cạnh AB của tam giác ABC vuông tại A có hai đường trung tuyến AM và BN lần lượt bằng 6 cm và 9 cm.

Hướng dẫn giải

Đặt $AB = x$; $AN = y \Rightarrow AC = 2y$.



Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền ta được
$BC = 2AM = 2.6 = 12$ (cm)

Dùng định lí Pitago cho hai tam giác vuông ABC và ABN vuông tại A

Ta được: $x^2 + 4y^2 = 144$ (1)

và $x^2 + y^2 = 81 \Leftrightarrow y^2 = 81 - x^2$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được phương trình : $x^2 + 4(81 - x^2) = 144$

Thu gọn phương trình trên ta được phương trình : $3x^2 = 180$

Nghiệm dương của phương trình : $x = 2\sqrt{5}$

Trả lời: $AB = 2\sqrt{5}$ cm

thuvientoanhoc.com

🗁. MỘT SỐ BÀI TẬP SƯU TẦM

BÀI TẬP VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

PHẦN BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}$. Đường cao AH = 15cm. Tính HB, HC.

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 12cm, AC = 16cm, phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, tính chu vi ΔABC biết AH = 14cm, $\frac{HB}{HC}=\frac{1}{4}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A, đương cao AH. Biết AB = 20cm, HC = 9cm. Tính độ dài AH.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác góc B. Biết rằng AD = 1cm; BD = $\sqrt{10}$ cm. Tính độ dài cạnh BC.

Bài 6: Cho tam giác ABC , $\hat{B}=60^o$, BC = 8cm; AB + AC = 12cm . Tính độ dài cạnh AB.

Bài 7: Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Bài 8: a. Cho tam giác ABC có $\hat{B}=60^o,\hat{C}=50^o,AC=35cm$. Tính diện tích tam giác ABC.

b. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A}=\hat{D}=90^o,\hat{C}=40^o,AB=4cm,AD=3cm$. Tính diện tích tứ giác.

c. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC=4,BD=5,\widehat{AOB}=50^o$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 9: Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, chu vi ΔAHB bằng 30cm, chu vi ΔACH bằng 4dm. Tính BH, CH và chu vi ΔABC.

Bài 10: Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

Bài 11: Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10 cm, $\hat{B}=60^0$ và $\hat{A}=90^0$

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ BE ⊥ DC kéo dài. Tính BE, CE và DC.

thuvientoanhoc.com

Bài 12: Cho ΔABC vuông tại A, AB = a, AC = 3a. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$.

a) Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$.

b) Chứng minh ΔBDE đồng dạng ΔCDB.

c) Tính tổng $\widehat{AFB} + \widehat{BCD}$.

Bài 13: Chình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5a, AC = 12a.

a) Tính $\frac{\sin B + cosB}{sinB - cosB}$

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài 14: Cho đoạn thẳng AB = 2a. Từ trung điểm O của AB vẽ tia Ox $\perp$ AB. Trên Ox lấy điểm D sao cho $OD = \frac{a}{2}$. Từ B kẽ BC vuông góc với đường thẳng AD.

a) Tính AD, AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 15: Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^o$. Chứng minh: AM = AN.

Bài 16: Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và AH = 420. Tính chu vi tam giác ABC.

Bài 17: Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = 2\sqrt{13}$; OA = 6. Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = $3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông ADEF cạnh bằng 2 cm có D $\in$ AB, E $\in$ BC, F $\in$ AC. Biết AB > AC và $S_{ADEF} = \frac{4}{9} S_{ABC}$. Tính AB ; AC.

Bài 19: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh: AH = 3HI.

Bài 20: Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ đường thẳng cắt BC ở E và cắt đường thẳng DC ở F. Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 21: Cho hình thang ABCD có $\hat{B} = \hat{C} = 90^o$. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết AB = $3\sqrt{5}$ cm, HA = 3cm. Chứng minh:

a) HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8

b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$

thuvientoanhoc.com

Bài 22: Cho ΔABC nhọn. đường cao AD và BE. Gọi $I \in AD$ và $Q \in BE$ sao cho $\hat{BIC} = \hat{AQC} = 90^0$.

a) Chứng minh: CA.CE = CD.CB

b) Chứng minh: ΔIQC là tam giác cân

c) BI cắt AQ tại K. Chứng minh: $CK \perp IQ$

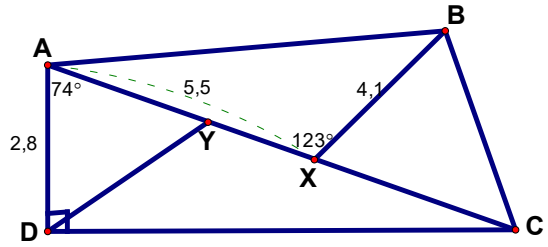
Bài 23: Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH. Biết AC = 12cm, BC = 15cm.

a) Tính HA, HB, HC.

b) Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên AB, AC.
Chứng minh: AE.AB = AF.AC

c) Chứng minh: $HE^2 + HF^2 = HB.HC$

Bài 24: Cho hình vẽ:



a/ Tính AC

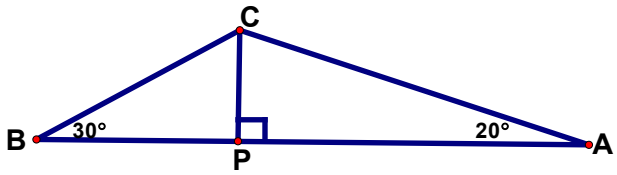
b/ Gọi Y là điểm trên AX sao cho DY // BX. Hãy tính XY.

c/ Tính diện tích tam giác BCX.

Bài 25: Cho hình vẽ dưới đây biết $BC = 60\ cm$. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P. Tính:

a/ AP; BP

b/ CP và diện tích tam giác ABC.



Bài 26: Cho tam giác ABC có AB = 24cm; AC = 18cm; BC = 30cm

a/ Tính đường cao AH, số đo góc B và C.

b/ Phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính BD, CD.

c/ Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Tứ giác AEDF là hình gì? Tính chu vi và diện tích tứ giác AEDF.

thuvientoanhoc.com

Bài 27: Tam giác ABC vuông tại A, AB = a, AC = 3a. Trên AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$.

a/ Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$

b/ Chứng minh ΔBDE đồng dạng với ΔCDB.

c/ Tính tổng $\widehat{AEB} + \widehat{BCD}$.

Bài 28: Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 30^o; BC = 10\ cm$.

a/ Tính AB, AC.

b/ Từ A kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc. Chứng minh MN// BC và MN = AB.

c/ Chứng minh hai tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 29: Cho tam giác ABC cân, AB = AC = 10cm; BC = 16cm. Trên đường cao AH lấy điểm I sao cho $AI = {}^1/_3\, AH$. Vẽ tia Cx song song với AH, Cx cắt tia BI tại D.

a/ Tính các góc của tam giác ABC.

b/ Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 30: Cho tam giác ABC vuông tại A . Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với trung tuyến AM . Các tia phân giác của các góc AMB; AMC cắt đường thẳng d lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) Tứ giác BCED là hình thang

b) BD . CE = $\frac{BC^2}{4}$

c) Giả sử AC = 2AB , chứng minh EC = BC

Bài 31: Cho hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên . Tính chu vi và diện tích hình thang cân đó biết đáy nhỏ bằng 14 cm , đáy lớn bằng 50 cm .

Bài 32: Cho tam giác ABC có AB>AC, kẻ trung tuyến AM và đường cao AH. Chứng minh:

a) $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

b) $AB^2 - AC^2 = 2BC.MH$

Bài 33: Cho hình thang ABCD (AB//CD có AB = 3cm; CD = 14cm; AC = 15cm; BD = 8cm.

a) Chứng minh AC vuông góc với BD.

b) Tính diện tích hình thang.

thuvientoanhoc.com

Bài 34: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = 2HA. Gọi I là hình chiếu của D trên HE.

a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm. b) Tính tg IED và tg HCE.

c) Chứng minh $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$ d) Chứng minh: $DE \perp EC$.

Bài 35: Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh:

a) ΔANL đồng dạng ΔABC

b) $AN.BL.CM = AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$

Bài 36: Giải tam giác ABC, biết:

a) $\hat{A} = 90^o, BC = 10, \hat{B} = 75^o$.

b) $\widehat{BAC} = 120^o, AB = AC = 6$.

c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, đường cao AH = 4.

d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, một góc nhọn bằng 47o.

Bài 37: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 3cm, BC = 6cm. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

a) Giải tam giác vuông ABC. b) Tính độ dài AH và chứng minh: EF = AH.

c) Tính: EA.EB + AF.FC.

Bài 38: Cho hình thoi ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Cho biết khoảng cách từ O đến mỗi cạnh hình thoi là h; AC = m; BD = n. Chứng minh rằng: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2}$.

Bài 39: Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 33,6. Biết $24.AB = 7.AC$. Tìm độ dài các cạnh và số đo các góc của tam giác.

Bài 40: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), $AB = 2, CD = 6$ và chiều cao bằng 4. Tính số đo góc tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh bên.

Bài 41: Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 40^o, \hat{C} = 60^o$, đường trung tuyến AM. Tính số đo góc AMC.

Bài 42: Cho tam giác ABC nhọn, AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh rằng

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

thuvientoanhoc.com

Bài 43: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $\hat{C} = 30^o, \hat{D} = 60^o, AD = 2, CD = 6$.

a. Tìm AD.

b. Tính diện tích hình thang.

Bài 44: Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} + \hat{D} = 90^o$. Chứng minh rằng: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

Bài 45: Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A} < 90^o$, $AB = AC = 2\sqrt{2}\ cm, BC = \sqrt{2}\ cm$.Kẻ đường cao BH. Chứng minh rằng: AH = 7.HC

---------- HẾT----------

(Nguồn 45 bài tập tự luyện của thầy Bùi Anh Tuấn – VT – VP)

thuvientoanhoc.com