UBND XÃ PHÚC THỊNH
PHÒNG VĂN HÓA - XÃ HỘI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9- CẤP XÃ
NĂM HỌC 2026 – 2027

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 31 tháng 10 năm 2026
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian phát đề)

- Thí sinh làm bài ra giấy thi. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Bài 1 (**5,0 điểm**):

1. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=2026$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\left(a^2+2026\right)\left(b^2+2026\right)\left(c^2+2026\right)}$ là một số hữu tỉ.

2. Cho *a,b, c* là các số khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

3. Tính $a+b$ biết: $\left(a+\sqrt{a^2+2026}\right)\left(b+\sqrt{b^2+2026}\right)=2026.$

Bài 2 (**5,0 điểm**):

1. Cho đa thức: $\mathrm{Q}(\mathrm{x})=\mathrm{P}(\mathrm{x})-14\mathrm{x}$ với $\mathrm{P}(\mathrm{x})=x^3+ax^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$

Biết $\mathrm{Q}(1)=\mathrm{Q}(2)=0$. Tính $\mathrm{P}(4)-\mathrm{P}(-1)$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3x^2+4y^2=20-2xy\\(x-y)\left(4x^2+5y^2-20\right)=1\end{cases}$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+2xy+3y-4=0.$

Bài 3 (**2,0 điểm**): Cho $a,b>0$ và $a+b\geq 6.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}.$

Bài 4 (**7,0 điểm**):

Cho tam giác ABC nhọn ($\mathrm{AC}>\mathrm{AB}$), các đường cao $\mathrm{AD},\mathrm{BE},\mathrm{CF}$, trực tâm H. Điểm I nằm giữa B và C sao cho $\mathrm{IB}=2\mathrm{IC}$. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và CH, G là điểm trên tia CH sao cho Q là trung điểm của GH. Gọi J là giao điểm của AG và BH.

1. Chứng minh $\Delta\mathrm{QAH}$ đồng dạng với $\Delta\mathrm{AIB}$.

thuvientoanhoc.com

2. Gọi K là trung điểm của BI. Chứng minh ΔAHG đồng dạng với ΔKBA và $AG = 2AJ$.

3. Giả sử tam giác ABC cân tại C. Gọi N là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC. Chứng minh rằng: $CE \cdot CN - FE \cdot FN = CF^2$.

Bài 5 (**1,0 điểm**):

Viết lên bảng các số $3,4,5,6$. Mỗi lần ta được phép xoá hai số x, y phân biệt trên bảng rồi thay bởi hai số: $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ và $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$. Chứng minh rằng không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1.

----- Hết -----

thuvientoanhoc.com

UBND XÃ PHÚC THỊNH
PHÒNG VĂN HOÁ – XÃ HỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC
(*Đề thi gồm 02 trang)*

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 - CẤP XÃ
NĂM HỌC 2026 – 2027

MÔN: TOÁN
Ngày thi: 31/10/2026
Thời gian: 150 phút **(***Không kể thời gian phát đề)*

Bài 1 (**5,0 điểm**):

1. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=2026$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\left(a^2+2026\right)\left(b^2+2026\right)\left(c^2+2026\right)}$ là một số hữu tỉ.

2. Cho *a,b, c* là các số khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

3. Tính $a+b$ biết: $\left(a+\sqrt{a^2+2026}\right)\left(b+\sqrt{b^2+2026}\right)=2026.$

Bài 2 (**5,0 điểm**):

1. Cho đa thức: $\mathrm{Q}(\mathrm{x})=\mathrm{P}(\mathrm{x})-14\mathrm{x}$ với $\mathrm{P}(\mathrm{x})=x^3+ax^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$

Biết $\mathrm{Q}(1)=\mathrm{Q}(2)=0$. Tính $\mathrm{P}(4)-\mathrm{P}(-1)$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3x^2+4y^2=20-2xy\\(x-y)\left(4x^2+5y^2-20\right)=1\end{cases}$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+2xy+3y-4=0.$

Bài 3 (**2,0 điểm**): Cho $a,b>0$ và $a+b\geq 6.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}.$

Bài 4 (**7,0 điểm**):

Cho tam giác ABC nhọn ($AC>AB$), các đường cao AD, BE, CF, trực tâm H. Điểm I nằm giữa B và C sao cho $IB=2IC$. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và CH, G là điểm trên tia CH sao cho Q là trung điểm của GH. Gọi J là giao điểm của AG và BH.

1. Chứng minh ΔQAH đồng dạng với ΔAIB.

2. Gọi K là trung điểm của BI. Chứng minh ΔAHG đồng dạng với ΔKBA và $AG=2AJ$.

thuvientoanhoc.com

3. Giả sử tam giác ABC cân tại C. Gọi N là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC. Chứng minh rằng: $CE \cdot CN - FE \cdot FN = CF^2$.

Bài 5 (**1,0 điểm**): Viết lên bảng các số $3,4,5,6$. Mỗi lần ta được phép xoá hai số x, y phân biệt trên bảng rồi thay bởi hai số $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ và $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$. Chứng minh rằng không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện một số nhỏ hơn 1.

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

thuvientoanhoc.com

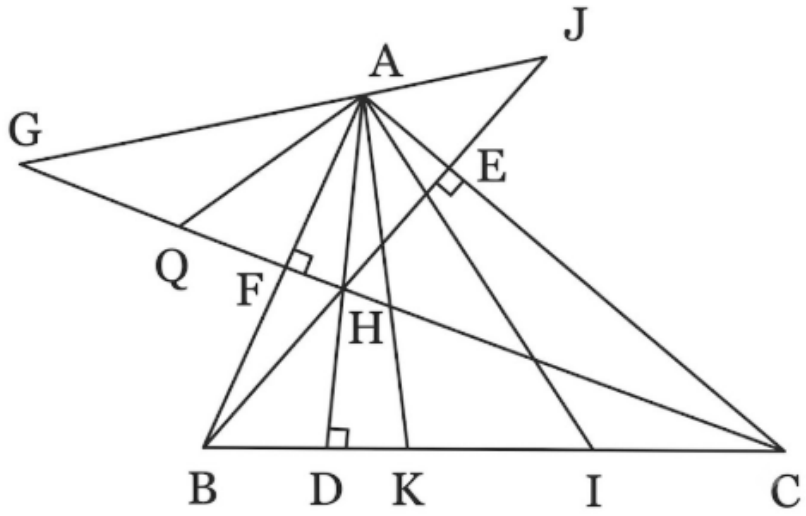
HƯỚNG DẪN CHẤM THI HSG LỚP 9 - MÔN TOÁN

Bài	Tóm tắt lời giải	Điểm
Bài 1 **Câu 1a** **(1,5 đ)**	Ta có $a^2+2026=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$ $b^2+2026=b^2+ab+bc+ca=(b+c)(b+a)$ $c^2+2026=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$ Khi đó $\sqrt{(a^2+2026)(b^2+2026)(c^2+2026)}=\sqrt{\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2}$ $=\lvert(a+b)(b+c)(c+a)\rvert$ Vì a, b, c là các số hữu tỉ nên $\lvert(a+b)(b+c)(c+a)\rvert$ là số hữu tỉ. Do đó $\sqrt{(a^2+2026)(b^2+2026)(c^2+2026)}$ là số hữu tỉ.	0,5 0,5 0,5
Bài 1 **Câu 1b** **(1,5 đ)**	Từ giả thiết ta có: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2bc^2a+2bca^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ $\Rightarrow 2abc(a+b+c)=0\Rightarrow a+b+c=0$ vì $abc\neq 0$ Ta có: $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$ $=-3ab(a+b)=3abc\vdots 3$	0,5 0,5 0,5
Bài 1 **Câu 1c** **(2 đ)**	Ta có: $\left(\sqrt{a^2+2026}+a\right)\left(\sqrt{a^2+2026}-a\right)=a^2+2026-a^2=2026.$ Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{a^2+2026}-a=\sqrt{b^2+2026}+b$ Tương tự ta cũng có: $\sqrt{b^2+2026}-b=\sqrt{a^2+2026}+a$ $\Rightarrow\sqrt{b^2+2026}-b+\sqrt{a^2+2026}-a=\sqrt{a^2+2026}+a+\sqrt{b^2+2026}+b$ $\Rightarrow a+b=0$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 2 **Câu 2a**	Vì $Q(1)=Q(2)=0$ Nên $x=1, x=2$ là nghiệm của đa thức $Q(x)$ $Q(x)$ là đa thức có hạng tử cao nhất là x^3 nên $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$	0,25 0,25

thuvientoanhoc.com

(1,5 đ)	Ta có $P(x)=Q(x)+14x=(x-1)(x-2)(x-k)+14x$ với $\forall x$ Khi đó $P(4)=3.2.(4-k)+56=80-6k$ $P(-1)=(-2)\cdot(-3).(-1-k)-14=-6k-20$ Suy ra $P(4)-P(-1)=100$	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 2 **Câu 2b** **(1,5 đ)**	Từ phương trình (1), ta được $3x^2+4y^2+2xy=20$ (1) Thay vào phương trình (2), ta có: $(x-y)(4x^2+5y^2-3x^2-4y^2-2xy)=1$ $(x-y)^3=1$, suy ra $x=y+1$ Thay vào (1), $3(y+1)^2+4y^2+2(y+1)y-20=0$ $9y^2+8y-17=0$ $y=1$ hoac $y=-\frac{17}{9}$ $y=1$ thì $x=2$ $y=-\frac{17}{9}$ thì $x=-\frac{8}{9}$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(2;1),\left(-\frac{8}{9};-\frac{17}{9}\right)$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 2 **Câu 2c** **(2 đ)**	$x^2+2y^2+2xy+3y-4=0$ (1) $x^2+2xy+y^2)+(y^2+3y-4)=0$ $(x+y)^2+(y-1)(y+4)=0$ $(y-1)(y+4)=-(x+y)^2$ Vì $-(x+y)^2\le 0$ với mọi x, y nên: $(y-1)(y+4)\le 0$ Do đó $-4\le y\le 1$ Vì y nguyên nên $y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$ Thay các giá trị nguyên của y vào (2) ta tìm được các cặp nghiệm nguyên (x; y) của PT đã cho là: (4; -4), (1; -3), (5; -3), (-2; 0), (2;0), (-1; 1).	0,25 0,25 0,5 0,25 0,5 0,25
Bài 3	Tách: $P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}$	

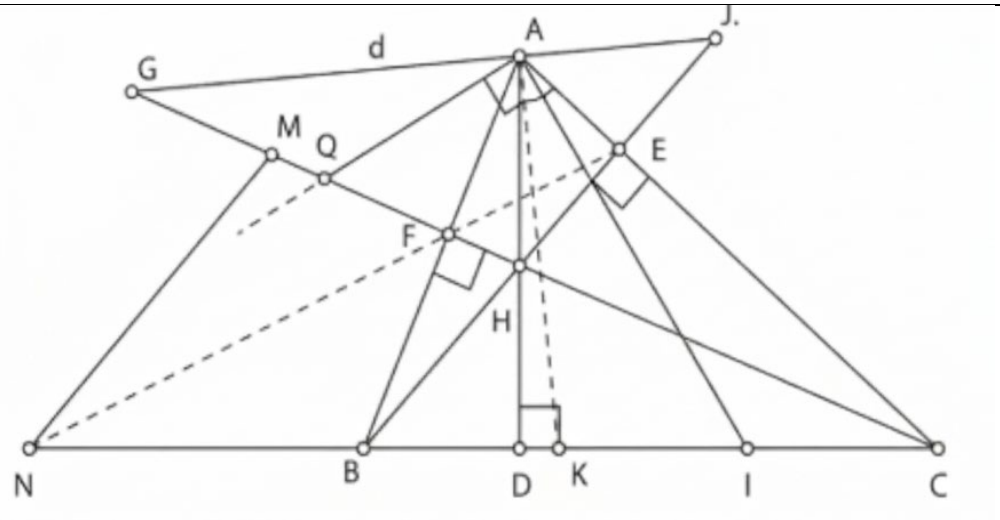
thuvientoanhoc.com

(2 đ)	P = $\left(\frac{6}{a}+\frac{3a}{2}\right)+\left(\frac{8}{b}+\frac{b}{2}\right)+\frac{3}{2}(a+b)$ Áp dụng cosi với 2 số dương ta được $\left(\frac{6}{a}+\frac{3a}{2}\right)\geq 2\sqrt{\frac{6}{a}.\frac{3a}{2}}=6$ $\left(\frac{8}{b}+\frac{b}{2}\right)\geq 2\sqrt{\frac{8}{b}.\frac{b}{2}}=4$ Vì a + b ≥ 6 $nên$ $\frac{3}{2}(a+b)\geq\frac{3}{2}.6=9$ Cộng từng vế ta được : P ≥ 19 Dấu "='' xảy ra khi a = 2, b = 4 Vậy MinP = 19 khi a = 2, b = 4	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 4 **6 điểm**		0,25

thuvientoanhoc.com

Câu a (1,75đ)	a) Ta có: $\widehat{DHC} = \widehat{ABI}$ (cùng phụ với $\widehat{BCH}$)	0,5
	Mà $\widehat{DHC} = \widehat{QHA}$ (đối đỉnh)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{QHA} = \widehat{ABI}$	0,25
	Xét ΔQAH và ΔAIB có $\widehat{QAH} = \widehat{AIB}$ (cùng phụ với $\widehat{HAI}$)	0,25 0,5
	$\widehat{QHA} = \widehat{ABI}(cmt)$	0,25
	Suy ra ΔQAH ~ ΔAIB (g – g)	0,25
Câu b (2 đ)	b) từ câu a ΔQAH ~ ΔAIB (g – g) $=> \frac{AB}{QH} = \frac{BI}{AH} => \frac{AB}{2QH} = \frac{BI}{2AH} => \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$	0,5
	Xét ΔAHG và ΔKBA có $\widehat{AHG} = \widehat{ABK}(cmt); \frac{AB}{GH} = \frac{BK}{AH}$	0,25
	Suy ra $\Delta AHG \backsim \Delta KBA(c.g.c) \Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{AH}{BK}$ (1)	0,5
	Chứng minh tương tự $\Delta AJH \backsim \Delta KAC \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{KC}$	0,25
	Mặt khác $KC = 2KB \Rightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{AH}{2KB}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AJ}{AK} = \frac{AG}{2.AK} \Rightarrow AG = 2.AJ$	0,5
	c)	

thuvientoanhoc.com



Trên tia đối của tia FC lấy điểm M sao cho $\widehat{FNM} = \widehat{FCE}$ — 0,25

Xét tam giác CEF và tam giác NMF có

$$\begin{cases} \widehat{CFE} = \widehat{NFM}\,(dd) \\ \widehat{FCE} = \widehat{FNM} \end{cases} \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta NMF\,(g.g)$$ — 0,25 — 0,25

$$\Rightarrow \frac{EF}{MF} = \frac{CF}{FN} \Rightarrow EF \cdot FN = FM \cdot CF \ (3)$$ — 0,25

Tam giác ABC cân tại C có CF là đường cao đồng thời CF là đường phân giác

Nên $\widehat{FCN} = \widehat{FCE}$ — 0,25

Xét tam giác CNM và tam giác CFE có

$$\begin{cases} \widehat{NMC} = \widehat{FEC}\,(\Delta NMF \sim \Delta CEF) \\ \widehat{FCN} = \widehat{FCE} \end{cases} \Rightarrow \Delta CNM \sim \Delta CFE\,(g.g)$$ — 0,25

$$\Rightarrow \frac{CN}{CF} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow CE \cdot CN = CM \cdot CF \ (4)$$ — 0,25

Từ (3) và (4) suy ra

$$CE \cdot CN - FE \cdot FN = CM \cdot CF - FM \cdot CF = CF(CM - FM) = CF^2$$ — 0,25

Bài 5 (1,0đ)	Tổng nghịch đảo tất cả các số không thay đổi do	0, 5

thuvientoanhoc.com

	$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x+2y}{2xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ và vì tất cả các số trên bảng luôn dương và tổng nghịch đảo các số ban đầu bé hơn 1 nên trên bảng không bao giờ xuất hiện một số nhỏ hơn 1.	0, 5

thuvientoanhoc.com

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 9**
https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9