SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 22 câu; 04 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ CẤP THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Ngày thi: 30/10/2026
(Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh:…….. Số báo danh:……..

Mã đề 221

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng 24. Biết các đỉnh A, B nằm trên trục hoành, hoành độ điểm A dương và đường thẳng BC có phương trình $4x-3y-12=0$. Gọi $C(x_0;y_0)$, khi đó giá trị của biểu thức $x_0^2+y_0^2$ bằng

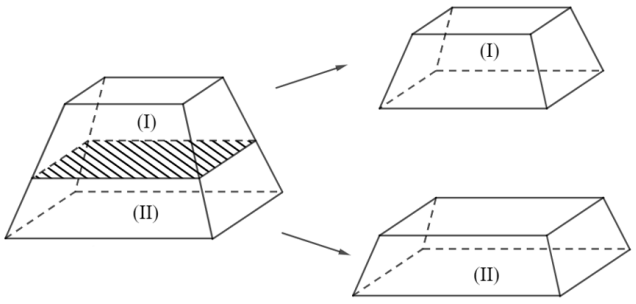
A. 145. **B.** $59+18\sqrt{2}$. **C.** 73. **D.** $75+50\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho $\log_6 3=2a$, $\log_6 5=b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{54} 50=\dfrac{2a-2b+1}{4a+1}$. **B.** $\log_{54} 50=\dfrac{2b+1-a}{2a+1}$.

C. $\log_{54} 50=\dfrac{2b-2a+1}{4a+1}$. **D.** $\log_{54} 50=\dfrac{2a+b+1}{2a+1}$.

Câu 3: Một khối gỗ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy bằng 3 dm, 5 dm và chiều cao bằng 2,5 dm. Người ta cắt khối gỗ theo một mặt phẳng song song với hai đáy tạo thành hai khối gỗ (I) và (II) có thể tích bằng nhau (*hình vẽ*). Sau đó sơn toàn bộ bề mặt của hai khối gỗ (I) và (II) với giá là 8500 đồng/dm^2. Số tiền phải trả để sơn các khối gỗ là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



A. 960. **B.** 808. **C.** 655. **D.** 848.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^2 2x-2\sin x\cos x+2026$ bằng

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2021.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6$ và $CD=8$. Mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng AB, CD và cắt các cạnh AC, CB, BD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Biết tứ giác $MNPQ$ là hình thoi, độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{18}{7}$. **B.** $\dfrac{31}{7}$. **C.** $\dfrac{15}{7}$. **D.** $\dfrac{24}{7}$.

Câu 6: Một trận đấu bóng chuyền giữa hai đội A và B gồm nhiều hiệp đấu. Mỗi hiệp đấu không có kết quả hòa, đội nào thắng 3 hiệp trước là đội thắng trận đấu. Xác suất để đội A thắng trong mỗi hiệp đấu là 0,56 và kết quả của các hiệp đấu là độc lập. Xác suất để đội A thắng trận đấu là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A. 0,61. **B.** 0,29. **C.** 0,18. **D.** 0,51.

Câu 7: Cân kiểm tra 84 con lợn sau một thời gian nuôi thử nghiệm một loại thức ăn mới được bảng mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (kg)	$[35;42)$	$[42;49)$	$[49;56)$	$[56;63)$	$[63;70)$
Số lượng (con)	2	3	13	35	31

Cân nặng trung bình của 84 con lợn là

A. $59,5$ kg. **B.** $52,5$ kg. **C.** $60,8$ kg. **D.** 60 kg.

Câu 8: Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50-0,0002x^2$ triệu đồng. Mỗi tháng nhà máy A phải trả chi phí cho nhân công và khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra chi phí mua nguyên liệu để sản xuất một tấn sản phẩm là 35 triệu đồng. Giả sử nhà máy A phải nộp 6% doanh thu cho cơ quan thuế. Lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, lợi nhuận sau thuế là lợi nhuận sau khi trừ tiền thuế)?

A. 1431. **B.** 1017. **C.** 1345. **D.** 946.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi hệ thức

$$\begin{cases} u_1=1; u_2=4 \\ u_{n+2}+u_n=2\left(u_{n+1}+\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}.$$

Giá trị của u_{30} bằng

A. 1396. **B.** 1219. **C.** 1306. **D.** 1489.

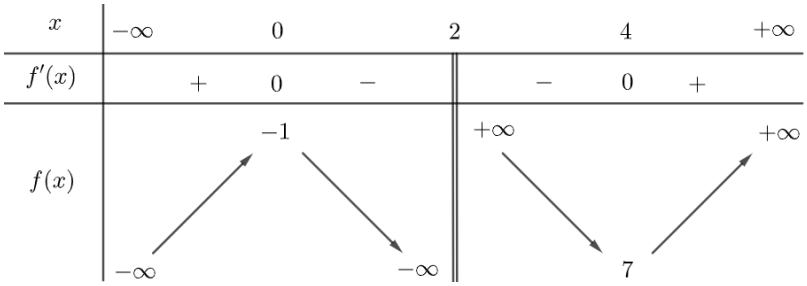
Câu 10: Bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học lớp 12A gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số tự nhiên từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa học sinh cần bấm một mật mã là 3 nút liên tiếp sao cho 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Biết rằng nếu bấm mật mã sai ba lần liên tiếp hoặc bấm hai mật mã sai giống nhau thì bảng điều khiển dừng hoạt động trong 5 phút. Học sinh Bình cần mở cửa phòng học đó nhưng chỉ nhớ được chi tiết 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng. Xác suất để học sinh Bình mở được cửa phòng học đó trước khi bảng điều khiển tạm dừng hoạt động bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{631}{3375}$. **B.** $\dfrac{189}{1003}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{15}$.

Câu 11: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=1$ và $SC=2$. Gọi α là số đo góc nhị diện $[S,BC,A]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một xưởng sơn dự định sản xuất hai loại sơn là sơn ngoài trời và sơn nội thất. Xưởng đã chuẩn bị 6 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Kết quả nghiên cứu thị trường cho thấy nhu cầu sơn ngoài trời không quá 2 tấn. Gọi x và y lần lượt là số tấn sơn ngoài trời và sơn nội thất cần sản xuất. Giả sử rằng lượng sơn sản xuất ra đều được bán hết.

a) Nếu xưởng sản xuất 3 tấn sơn nội thất thì lượng sơn ngoài trời tối đa có thể sản xuất là $1,5$ tấn.

b) Xưởng có đủ nguyên liệu để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời và 4 tấn sơn nội thất.

c) Bất phương trình biểu thị điều kiện về sử dụng nguyên liệu A là $2x+y\le 6$.

d) Nếu giá bán một tấn sơn ngoài trời là 70 triệu đồng, một tấn sơn nội thất là 30 triệu đồng thì doanh thu lớn nhất của xưởng là 200 triệu đồng.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB=BC=CD=a,\ AD=2a.$ Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}.$

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}a^3$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng 60°.

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(A'B'C)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 3: Tháng 01 năm 2025, anh An bắt đầu làm việc cho một công ty X với lương bậc 1 là 16 triệu đồng/tháng. Điều khoản về lương quy định: nếu anh An hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng sẽ được tăng một bậc lương; lương bậc sau tăng 5% so với lương bậc liền trước đó. Trong suốt quá trình làm việc, anh An đều hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình và được tăng lương đúng hạn.

a) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 6 tháng đầu năm 2025 là 90 triệu đồng.

b) Tháng 01 năm 2026, lương của anh An nhận được từ công ty X là 17,64 triệu đồng.

c) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 3 năm kể từ ngày bắt đầu làm việc là $652,98$ triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Ngày 15 tháng 12 năm 2025, anh An đã vay ngân hàng 80 triệu đồng để sửa nhà theo thể thức lãi kép với lãi suất $0,85\%$/tháng. Sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền là 30% số tiền lương của anh nhận từ công ty X trong tháng đó. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hết tháng 3 năm 2027 thì anh An sẽ trả hết nợ ngân hàng.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$.

a) Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

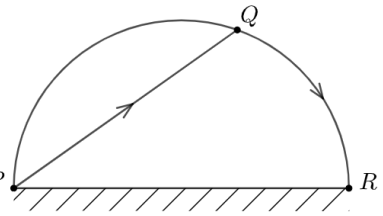
b) Đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

c) Hàm số $k(x)=f\left(\sqrt{x^2-x}\right)$ có 2 điểm cực trị.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $f(2)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong công viên có một hồ nước hình bán nguyệt với đường kính $PR = 3$ km. Từ vị trí điểm P anh Minh chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h thẳng đến vị trí điểm Q trên bờ hồ, rồi đi bộ theo bờ hồ đến vị trí điểm R với vận tốc 6 km/h (*hình vẽ*). Thời gian tối đa để anh Minh di chuyển từ P đến R theo cách đó là bao nhiêu giờ (giả sử thời gian dời thuyền là không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Câu 2: Có bao nhiêu giá trị thực của m sao cho với mỗi giá trị của m có duy nhất một cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2 \ge 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right) \ge 1$ và $mx+y-1-3m=0$?

Câu 3: Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

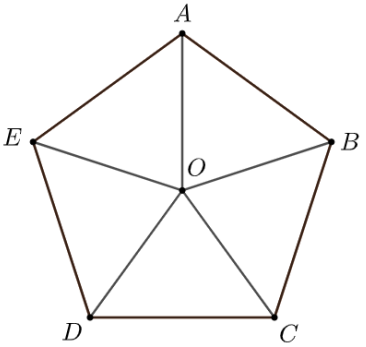
Lượng nước tiêu thụ $\left(m^3\right)$	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	24	57	42	29	18

Để tiết kiệm nước sạch, công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ nhiều nhất trong tháng. Vậy công ty cần lựa chọn những hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ bao nhiêu mét khối trở lên để gửi thông báo (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Câu 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, $BC = 2$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ và $\widehat{BGC} = 90^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 5: Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với kích thước $AB = 4$ m, $BC = 3$ m và chiều cao $AA' = 3$ m. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Anh Cường muốn thiết kế một hệ thống dây trang trí bao gồm các đoạn dây nối thẳng từ M đến N, từ C' đến D và từ P đến Q, trong đó P là điểm thuộc đoạn MN, Q là điểm thuộc đoạn $C'D$. Giả sử các đầu nối không đáng kể thì anh Cường cần ít nhất bao nhiêu mét dây trang trí?

Câu 6: Để trang trí cho một tấm biển hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O, người ta tô màu cho 5 tam giác cân OAB, OBC, OCD, ODE, OEA từ 4 màu xanh, đỏ, tím, vàng và chọn ra 6 số phân biệt từ tập hợp $A = \{1;2;3;...;120\}$ để điền vào các vị trí A, B, C, D, E, O. Có bao nhiêu cách trang trí thỏa mãn đồng thời các yêu cầu sau:



+ Mỗi tam giác được tô bởi đúng 1 màu;
+ Hai tam giác có chung một cạnh thì tô màu khác nhau;
+ 5 số trên năm đỉnh của ngũ giác lần lượt theo cùng chiều kim đồng hồ lập thành một cấp số nhân và công bội của cấp số nhân này là số điền vào vị trí tâm O.

--------- Hết ---------

(*Thí sinh không sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm*)

Giám thị số 1:.....Giám thị số 2:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 22 câu; 04 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ CẤP THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Ngày thi: 30/10/2026
(Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh:…….. Số báo danh:……..

Mã đề 222

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = 1$ và $SC = 2$. Gọi α là số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

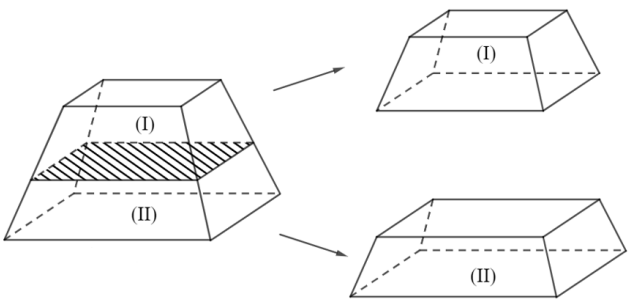
Câu 2: Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - 0,0002x^2$ triệu đồng. Mỗi tháng nhà máy A phải trả chi phí cho nhân công và khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra chi phí mua nguyên liệu để sản xuất một tấn sản phẩm là 35 triệu đồng. Giả sử nhà máy A phải nộp 6% doanh thu cho cơ quan thuế. Lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, lợi nhuận sau thuế là lợi nhuận sau khi trừ tiền thuế)?

A. 1017. **B.** 1431. **C.** 946. **D.** 1345.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 2x - 2\sin x\cos x + 2026$ bằng

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2021.

Câu 4: Một khối gỗ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy bằng 3 dm, 5 dm và chiều cao bằng 2,5 dm. Người ta cắt khối gỗ theo một mặt phẳng song song với hai đáy tạo thành hai khối gỗ (I) và (II) có thể tích bằng nhau (*hình vẽ*). Sau đó sơn toàn bộ bề mặt của hai khối gỗ (I) và (II) với giá là 8500 đồng/dm^2. Số tiền phải trả để sơn các khối gỗ là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



A. 848. **B.** 655. **C.** 960. **D.** 808.

Câu 5: Bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học lớp 12A gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số tự nhiên từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa học sinh cần bấm một mật mã là 3 nút liên tiếp sao cho 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Biết rằng nếu bấm mật mã sai ba lần liên tiếp hoặc bấm hai mật mã sai giống nhau thì bảng điều khiển dừng hoạt động trong 5 phút. Học sinh Bình cần mở cửa phòng học đó nhưng chỉ nhớ được chi tiết 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng. Xác suất để học sinh Bình mở được cửa phòng học đó trước khi bảng điều khiển tạm dừng hoạt động bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{631}{3375}$. **B.** $\dfrac{189}{1003}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{15}$.

Câu 6: Cân kiểm tra 84 con lợn sau một thời gian nuôi thử nghiệm một loại thức ăn mới được bảng mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (kg)	$[35;42)$	$[42;49)$	$[49;56)$	$[56;63)$	$[63;70)$
Số lượng (con)	2	3	13	35	31

Cân nặng trung bình của 84 con lợn là

A. $59,5$ kg. **B.** $52,5$ kg. **C.** $60,8$ kg. **D.** 60 kg.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng 24. Biết các đỉnh A,B nằm trên trục hoành, hoành độ điểm A dương và đường thẳng BC có phương trình $4x-3y-12=0$. Gọi $C(x_0;y_0)$, khi đó giá trị của biểu thức $x_0^2+y_0^2$ bằng

A. 145. **B.** $59+18\sqrt{2}$. **C.** 73. **D.** $75+50\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi hệ thức

$$\begin{cases} u_1=1;u_2=4 \\ u_{n+2}+u_n=2\left(u_{n+1}+\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}.$$

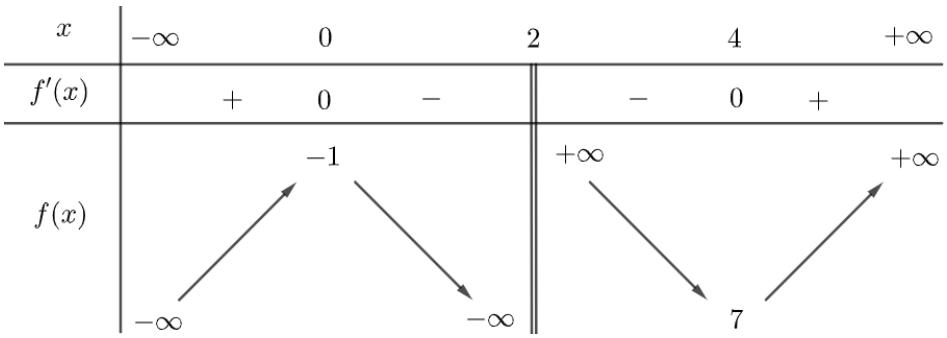
Giá trị của u_{30} bằng

A. 1396. **B.** 1219. **C.** 1306. **D.** 1489.

Câu 9: Một trận đấu bóng chuyền giữa hai đội A và B gồm nhiều hiệp đấu. Mỗi hiệp đấu không có kết quả hòa, đội nào thắng 3 hiệp trước là đội thắng trận đấu. Xác suất để đội A thắng trong mỗi hiệp đấu là $0,56$ và kết quả của các hiệp đấu là độc lập. Xác suất để đội A thắng trận đấu là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A. $0,18$. **B.** $0,51$. **C.** $0,29$. **D.** $0,61$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 11: Cho $\log_6 3=2a$, $\log_6 5=b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{54}50=\dfrac{2b-2a+1}{4a+1}$. **B.** $\log_{54}50=\dfrac{2b+1-a}{2a+1}$.

C. $\log_{54}50=\dfrac{2a+b+1}{2a+1}$. **D.** $\log_{54}50=\dfrac{2a-2b+1}{4a+1}$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6$ và $CD=8$. Mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng AB,CD và cắt các cạnh AC,CB,BD,DA lần lượt tại M,N,P,Q. Biết tứ giác $MNPQ$ là hình thoi, độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{31}{7}$. **B.** $\dfrac{24}{7}$. **C.** $\dfrac{18}{7}$. **D.** $\dfrac{15}{7}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Tháng 01 năm 2025, anh An bắt đầu làm việc cho một công ty X với lương bậc 1 là 16 triệu đồng/tháng. Điều khoản về lương quy định: nếu anh An hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng sẽ được tăng một bậc lương; lương bậc sau tăng 5% so với lương bậc liền trước đó. Trong suốt quá trình làm việc, anh An đều hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình và được tăng lương đúng hạn.

a) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 3 năm kể từ ngày bắt đầu làm việc là $652,98$ triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 6 tháng đầu năm 2025 là 90 triệu đồng.

c) Ngày 15 tháng 12 năm 2025, anh An đã vay ngân hàng 80 triệu đồng để sửa nhà theo thể thức lãi kép với lãi suất $0,85\%$/tháng. Sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền là 30% số tiền lương của anh nhận từ công ty X trong tháng đó. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hết tháng 3 năm 2027 thì anh An sẽ trả hết nợ ngân hàng.

d) Tháng 01 năm 2026, lương của anh An nhận được từ công ty X là 17,64 triệu đồng.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$.

a) Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

b) Đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

c) Hàm số $k(x)=f\left(\sqrt{x^2-x}\right)$ có 2 điểm cực trị.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $f(2)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB=BC=CD=a$, $AD=2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

a) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(A'B'C)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

b) Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng 60°.

c) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}a^3$.

d) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}$.

Câu 4: Một xưởng sơn dự định sản xuất hai loại sơn là sơn ngoài trời và sơn nội thất. Xưởng đã chuẩn bị 6 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Kết quả nghiên cứu thị trường cho thấy nhu cầu sơn ngoài trời không quá 2 tấn. Gọi x và y lần lượt là số tấn sơn ngoài trời và sơn nội thất cần sản xuất. Giả sử rằng lượng sơn sản xuất ra đều được bán hết.

a) Nếu giá bán một tấn sơn ngoài trời là 70 triệu đồng, một tấn sơn nội thất là 30 triệu đồng thì doanh thu lớn nhất của xưởng là 200 triệu đồng.

b) Bất phương trình biểu thị điều kiện về sử dụng nguyên liệu A là $2x+y\le 6$.

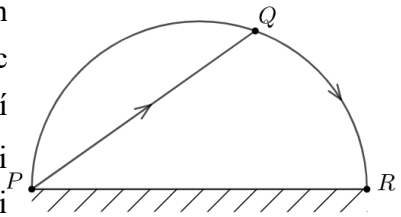
c) Xưởng có đủ nguyên liệu để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời và 4 tấn sơn nội thất.

d) Nếu xưởng sản xuất 3 tấn sơn nội thất thì lượng sơn ngoài trời tối đa có thể sản xuất là $1,5$ tấn.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với kích thước $AB=4$ m, $BC=3$ m và chiều cao $AA'=3$ m. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Anh Cường muốn thiết kế một hệ thống dây trang trí bao gồm các đoạn dây nối thẳng từ M đến N, từ C' đến D và từ P đến Q, trong đó P là điểm thuộc đoạn MN, Q là điểm thuộc đoạn $C'D$. Giả sử các đầu nối không đáng kể thì anh Cường cần ít nhất bao nhiêu mét dây trang trí?

Câu 2: Trong công viên có một hồ nước hình bán nguyệt với đường kính $PR=3$ km. Từ vị trí điểm P anh Minh chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h thẳng đến vị trí điểm Q trên bờ hồ, rồi đi bộ theo bờ hồ đến vị trí điểm R với vận tốc 6 km/h (*hình vẽ*). Thời gian tối đa để anh Minh di chuyển từ P đến R theo cách đó là bao nhiêu giờ (giả sử thời gian dời thuyền là không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

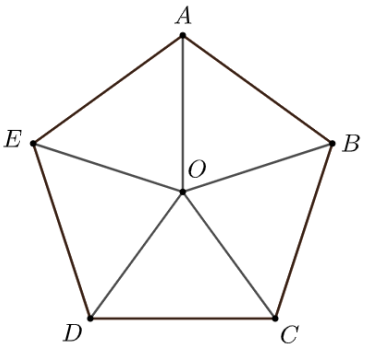


Câu 3: Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ $\left(m^3\right)$	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	24	57	42	29	18

Để tiết kiệm nước sạch, công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ nhiều nhất trong tháng. Vậy công ty cần lựa chọn những hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ bao nhiêu mét khối trở lên để gửi thông báo (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Câu 4: Để trang trí cho một tấm biển hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O, người ta tô màu cho 5 tam giác cân OAB,OBC,OCD,ODE,OEA từ 4 màu xanh, đỏ, tím, vàng và chọn ra 6 số phân biệt từ tập hợp $A=\{1;2;3;...;120\}$ để điền vào các vị trí A,B,C,D,E,O. Có bao nhiêu cách trang trí thỏa mãn đồng thời các yêu cầu sau:



+ Mỗi tam giác được tô bởi đúng 1 màu;
+ Hai tam giác có chung một cạnh thì tô màu khác nhau;
+ 5 số trên năm đỉnh của ngũ giác lần lượt theo cùng chiều kim đồng hồ lập thành một cấp số nhân và công bội của cấp số nhân này là số điền vào vị trí tâm O.

Câu 5: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, $BC=2$, $\widehat{BAC}=30^\circ$ và $\widehat{BGC}=90^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị thực của m sao cho với mỗi giá trị của m có duy nhất một cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2\ge 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right)\ge 1$ và $mx+y-1-3m=0$?

--------- Hết ---------

(*Thí sinh không sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm*)

Giám thị số 1:.....Giám thị số 2:.....

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN THPT

STT	221		222		223		224		225		226		227		228	
	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	1	**A**	1	**C**	1	**B**	1	**A**	1	**D**	1	**D**	1	**C**	1	**A**
2	2	**C**	2	**A**	2	**A**	2	**B**	2	**D**	2	**A**	2	**A**	2	**C**
3	3	**A**	3	**C**	3	**C**	3	**B**	3	**D**	3	**B**	3	**D**	3	**C**
4	4	**C**	4	**C**	4	**B**	4	**C**	4	**B**	4	**D**	4	**B**	4	**C**
5	5	**D**	5	**B**	5	**D**	5	**C**	5	**C**	5	**B**	5	**C**	5	**C**
6	6	**A**	6	**D**	6	**C**	6	**D**	6	**A**	6	**D**	6	**C**	6	**B**
7	7	**D**	7	**A**	7	**C**	7	**B**	7	**D**	7	**C**	7	**D**	7	**C**
8	8	**B**	8	**C**	8	**D**	8	**D**	8	**C**	8	**A**	8	**B**	8	**B**
9	9	**C**	9	**D**	9	**D**	9	**C**	9	**A**	9	**C**	9	**C**	9	**B**
10	10	**B**	10	**B**	10	**D**	10	**A**	10	**D**	10	**B**	10	**B**	10	**B**
11	11	**A**	11	**A**	11	**A**	11	**B**	11	**C**	11	**B**	11	**B**	11	**B**
12	12	**B**	12	**B**	12	**A**	12	**D**	12	**C**	12	**D**	12	**C**	12	**C**
13	1	**ĐSĐĐ**	1	**ĐSSĐ**	1	**SĐSS**	1	**SĐSS**	1	**SĐSS**	1	**SĐĐS**	1	**ĐSĐS**	1	**SĐĐS**
14	2	**SĐSĐ**	2	**SSĐS**	2	**ĐĐĐS**	2	**ĐĐSS**	2	**ĐSĐS**	2	**ĐSĐĐ**	2	**SĐĐĐ**	2	**ĐĐSĐ**
15	3	**SĐĐS**	3	**ĐSĐS**	3	**SĐĐS**	3	**ĐĐĐS**	3	**SĐĐS**	3	**SĐĐS**	3	**SĐĐS**	3	**SSĐĐ**
16	4	**SSĐS**	4	**ĐĐSĐ**	4	**ĐSĐS**	4	**SĐSĐ**	4	**ĐĐĐS**	4	**SSĐS**	4	**SSĐS**	4	**ĐSSS**
17	1	**1.13**	1	**9.2**	1	**9.2**	1	**11**	1	**6000**	1	**6000**	1	**6000**	1	**11**
18	2	**11**	2	**1.13**	2	**1.13**	2	**9.2**	2	**11**	2	**9.2**	2	**11**	2	**9.2**
19	3	**12.5**	3	**12.5**	3	**0.56**	3	**1.13**	3	**1.13**	3	**0.56**	3	**9.2**	3	**6000**
20	4	**0.56**	4	**6000**	4	**12.5**	4	**6000**	4	**12.5**	4	**11**	4	**12.5**	4	**1.13**
21	5	**9.2**	5	**0.56**	5	**6000**	5	**0.56**	5	**0.56**	5	**12.5**	5	**1.13**	5	**0.56**
22	6	**6000**	6	**11**	6	**11**	6	**12.5**	6	**9.2**	6	**1.13**	6	**0.56**	6	**12.5**

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ CẤP THPT – HẢI PHÒNG

(Năm học 2026 - 2027 – Môn Toán – Mã đề 221 – Thời gian 90 phút)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng 24. Biết các đỉnh A, B nằm trên trục hoành, hoành độ điểm A dương và đường thẳng BC có phương trình $4x - 3y - 12 = 0$. Gọi $C(x_0; y_0)$, khi đó giá trị của biểu thức $x_0^2 + y_0^2$ bằng

A. 145 **B.** $59 + 18\sqrt{2}$ **C.** 73 **D.** $75 + 50\sqrt{2}$

Lời giải.

B là giao của BC với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = 3$, nên $B(3; 0)$. Gọi $A(a; 0)$ với $a > 0$. Vì $AC \perp AB$ nên $AC \perp Ox$, suy ra $C(a; y_0)$ và $y_0 = \dfrac{4a - 12}{3}$.

Khi đó $AB = |a - 3|$, $AC = |y_0| = \dfrac{4|a - 3|}{3}$, diện tích

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{2}{3}(a - 3)^2 = 24 \Rightarrow (a - 3)^2 = 36 \Rightarrow a = 9 \ (a > 0).$$

Suy ra $C(9; 8)$ và $x_0^2 + y_0^2 = 81 + 64 = \boxed{145}$.

Câu 2. Cho $\log_6 3 = 2a$, $\log_6 5 = b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{54} 50 = \dfrac{2a - 2b + 1}{4a + 1}$ **B.** $\log_{54} 50 = \dfrac{2b + 1 - a}{2a + 1}$

C. $\log_{54} 50 = \dfrac{2b - 2a + 1}{4a + 1}$ **D.** $\log_{54} 50 = \dfrac{2a + b + 1}{2a + 1}$

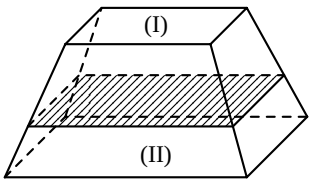
Lời giải.

Ta có $\log_6 2 = 1 - \log_6 3 = 1 - 2a$. Do đó

$$\log_{54} 50 = \frac{\log_6 50}{\log_6 54} = \frac{\log_6 2 + 2\log_6 5}{\log_6 2 + 3\log_6 3} = \frac{1 - 2a + 2b}{1 - 2a + 6a} = \boxed{\frac{2b - 2a + 1}{4a + 1}}.$$

Câu 3.

Một khối gỗ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy bằng 3 dm, 5 dm và chiều cao bằng 2,5 dm. Người ta cắt khối gỗ theo một mặt phẳng song song với hai đáy tạo thành hai khối gỗ (I) và (II) có thể tích bằng nhau (*hình vẽ*). Sau đó sơn toàn bộ bề mặt của hai khối gỗ (I) và (II) với giá là 8500 đồng/dm^2. Số tiền phải trả để sơn các khối gỗ là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



A. 960 **B.** 808 **C.** 655 **D.** 848

Lời giải.

Kéo dài các cạnh bên của hình chóp cụt đến khi gặp nhau tại đỉnh S. Hình chóp đều đáy cạnh a có chiều cao $1{,}25a$ (vì chiều cao hình chóp cụt 2,5 ứng với hiệu cạnh đáy 2), nên thể tích $V(a) = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot 1{,}25a = \dfrac{5}{12}a^3$.

Gọi x là cạnh của thiết diện. Thể tích khối (I) là $V(x) - V(3)$ và bằng nửa thể tích hình chóp cụt:

$$\frac{5}{12}(x^3 - 27) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}(125 - 27) \Rightarrow x^3 = 76.$$

Mặt xung quanh của hình chóp cụt gồm 4 hình thang cân có đường cao $\sqrt{2{,}5^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$ nên có diện tích $4 \cdot \dfrac{3 + 5}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{29}}{2} = 8\sqrt{29}$.

Tổng diện tích cần sơn gồm hai đáy, hai lần thiết diện và mặt xung quanh:

$$S = 9 + 25 + 2x^2 + 8\sqrt{29} = 34 + 2\sqrt[3]{76^2} + 8\sqrt{29} \approx 112{,}96 \ (\text{dm}^2).$$

Số tiền: $112{,}96 \cdot 8500 \approx 960\,160$ đồng, tức khoảng $\boxed{960}$ nghìn đồng.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 2x - 2\sin x \cos x + 2026$ bằng

A. 2024 **B.** 2023 **C.** 2025 **D.** 2021

Lời giải.
Ta có $y = \cos^2 2x - \sin 2x + 2026 = 1 - \sin^2 2x - \sin 2x + 2026$. Đặt $t = \sin 2x \in [-1;1]$:

$$y = -t^2 - t + 2027 = f(t).$$

Parabol $f(t)$ có đỉnh tại $t = -\dfrac{1}{2}$ (cực đại), nên trên $[-1;1]$ giá trị nhỏ nhất đạt tại biên: $f(-1) = 2027$, $f(1) = 2025$.
Vậy $\min y = \boxed{2025}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$ và $CD = 8$. Mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng AB, CD và cắt các cạnh AC, CB, BD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Biết tứ giác $MNPQ$ là hình thoi, độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{18}{7}$ **B.** $\dfrac{31}{7}$ **C.** $\dfrac{15}{7}$ **D.** $\dfrac{24}{7}$

Lời giải.
Vì $(\alpha) \parallel AB$ nên $MN \parallel AB$, $PQ \parallel AB$; vì $(\alpha) \parallel CD$ nên $MQ \parallel CD$, $NP \parallel CD$.
Đặt $\dfrac{CM}{CA} = k$. Từ $MN \parallel AB$ ta có $MN = k \cdot AB = 6k$. Từ $MQ \parallel CD$ ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MQ}{CD}$, tức $MQ = 8(1-k)$.
$MNPQ$ là hình thoi nên $MN = MQ$: $6k = 8(1-k) \Rightarrow k = \dfrac{4}{7}$. Vậy $MN = 6 \cdot \dfrac{4}{7} = \boxed{\dfrac{24}{7}}$.

Câu 6. Một trận đấu bóng chuyền giữa hai đội A và B gồm nhiều hiệp đấu. Mỗi hiệp đấu không có kết quả hòa, đội nào thắng 3 hiệp trước là đội thắng trận đấu. Xác suất để đội A thắng trong mỗi hiệp đấu là $0{,}56$ và kết quả của các hiệp đấu là độc lập. Xác suất để đội A thắng trận đấu là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A. 0,61 **B.** 0,29 **C.** 0,18 **D.** 0,51

Lời giải.
Đặt $p = 0{,}56$, $q = 0{,}44$. Đội A thắng trận trong các trường hợp:

- Thắng $3-0$: p^3.
- Thắng $3-1$ (hiệp cuối A thắng, trong 3 hiệp đầu A thắng 2): $\mathrm{C}_3^2 p^3 q$.
- Thắng $3-2$: $\mathrm{C}_4^2 p^3 q^2$.

Do đó $\mathbb{P} = p^3(1 + 3q + 6q^2) = 0{,}56^3 \cdot 3{,}4816 \approx 0{,}6114 \approx \boxed{0{,}61}$.

Câu 7. Cân kiểm tra 84 con lợn sau một thời gian nuôi thử nghiệm một loại thức ăn mới được bảng mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (kg)	$[35;42)$	$[42;49)$	$[49;56)$	$[56;63)$	$[63;70)$
Số lượng (con)	2	3	13	35	31

Cân nặng trung bình của 84 con lợn là

A. 59,5 kg **B.** 52,5 kg **C.** 60,8 kg **D.** 60 kg

Lời giải.
Giá trị đại diện của các nhóm lần lượt là $38{,}5;\ 45{,}5;\ 52{,}5;\ 59{,}5;\ 66{,}5$. Cân nặng trung bình:

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 38{,}5 + 3 \cdot 45{,}5 + 13 \cdot 52{,}5 + 35 \cdot 59{,}5 + 31 \cdot 66{,}5}{84} = \frac{5040}{84} = \boxed{60}\ (\text{kg}).$$

Câu 8. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng

sản xuất được tối đa 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - 0{,}0002x^2$ triệu đồng. Mỗi tháng nhà máy A phải trả chi phí cho nhân công và khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra chi phí mua nguyên liệu để sản xuất một tấn sản phẩm là 35 triệu đồng. Giả sử nhà máy A phải nộp 6% doanh thu cho cơ quan thuế. Lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, lợi nhuận sau thuế là lợi nhuận sau khi trừ tiền thuế)?

A. 1431 **B.** 1017 **C.** 1345 **D.** 946

Lời giải.
Doanh thu: $R(x) = x(50 - 0{,}0002x^2) = 50x - 0{,}0002x^3$, với $0 < x \leq 200$.
Lợi nhuận sau thuế: $L(x) = R(x) - 0{,}06R(x) - 35x - 150 = -0{,}000188x^3 + 12x - 150$.
$L'(x) = -0{,}000564x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{12}{0{,}000564}} \approx 145{,}87 \in (0; 200]$.
L' đổi dấu từ $+$ sang $-$ tại điểm này nên L đạt lớn nhất: $L_{\max} \approx \boxed{1017}$ (triệu đồng).

Câu 9. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi hệ thức

$$\begin{cases} u_1 = 1;\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} + u_n = 2\left(u_{n+1} + \dfrac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Giá trị của u_{30} bằng

A. 1396 **B.** 1219 **C.** 1306 **D.** 1489

Lời giải.
Hệ thức tương đương $(u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = 3$. Đặt $d_n = u_{n+1} - u_n$ thì (d_n) là cấp số cộng có $d_1 = u_2 - u_1 = 3$, công sai 3, nên $d_n = 3n$.
Suy ra $u_{30} = u_1 + \sum_{n=1}^{29} d_n = 1 + 3 \cdot \dfrac{29 \cdot 30}{2} = 1 + 1305 = \boxed{1306}$.

Câu 10. Bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học lớp 12A gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số tự nhiên từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa học sinh cần bấm một mật mã là 3 nút liên tiếp sao cho 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Biết rằng nếu bấm mật mã sai ba lần liên tiếp hoặc bấm hai mật mã sai giống nhau thì bảng điều khiển dừng hoạt động trong 5 phút. Học sinh Bình cần mở cửa phòng học đó nhưng chỉ nhớ được chi tiết 3 số trên các nút theo thứ tự đã bấm tạo thành một dãy số tăng. Xác suất để học sinh Bình mở được cửa phòng học đó trước khi bảng điều khiển tạm dừng hoạt động bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{631}{3375}$ **B.** $\dfrac{189}{1003}$ **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** $\dfrac{1}{15}$

Lời giải.
Bước 1: Đếm các mật mã có thể bấm. Bình chỉ nhớ 3 số bấm theo thứ tự tạo thành dãy tăng (không nhớ tổng). Một dãy tăng gồm 3 số phân biệt chọn từ $\{0; 1; \ldots; 9\}$ ứng với đúng một tổ hợp chập 3 của 10 phần tử, nên Bình có thể bấm một trong $C_{10}^3 = 120$ mật mã.
Bước 2: Đếm mật mã đúng. Mật mã đúng là dãy tăng $a < b < c$ có $a + b + c = 10$. Xét theo a:

- $a = 0$: $b + c = 10$, $0 < b < c$: $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)$, được 4 bộ;
- $a = 1$: $b + c = 9$, $1 < b < c$: $(2, 7), (3, 6), (4, 5)$, được 3 bộ;
- $a = 2$: $b + c = 8$, $2 < b < c$: $(3, 5)$, được 1 bộ;
- $a \geq 3$: $a + b + c \geq 3 + 4 + 5 = 12 > 10$, không có.

Vậy có 8 mật mã đúng và $120 - 8 = 112$ mật mã sai.
Bước 3: Mô hình hóa số lần bấm. Bảng dừng khi bấm sai ba lần liên tiếp hoặc bấm hai mật mã sai giống nhau. Vì vậy, để mở cửa "trước khi bảng tạm dừng", Bình chỉ được bấm tối đa 3 lần, mỗi lần bấm một mật mã mới (chưa bấm trước

đó), chọn ngẫu nhiên trong các mật mã còn lại. Gọi A_k là biến cố Bình mở được cửa ở lần bấm thứ k.

$$\mathbb{P}(A_1)=\frac{8}{120},\quad \mathbb{P}(A_2)=\frac{112}{120}\cdot\frac{8}{119},\quad \mathbb{P}(A_3)=\frac{112}{120}\cdot\frac{111}{119}\cdot\frac{8}{118}.$$

Bước 4: Tính xác suất. Các biến cố A_1, A_2, A_3 đôi một xung khắc nên

$$\mathbb{P}=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)=\frac{1}{15}+\frac{112}{1785}+\frac{112\cdot111\cdot8}{120\cdot119\cdot118}\approx 0{,}0667+0{,}0627+0{,}0590\approx 0{,}1884.$$

Cách khác: biến cố đối là cả 3 lần bấm đều sai, có xác suất $\dfrac{112}{120}\cdot\dfrac{111}{119}\cdot\dfrac{110}{118}=\dfrac{C_{112}^3}{C_{120}^3}$. Do đó

$$\mathbb{P}=1-\frac{112\cdot111\cdot110}{120\cdot119\cdot118}=\frac{317520}{1685040}=\boxed{\frac{189}{1003}}.$$

Câu 11. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=1$ và $SC=2$. Gọi α là số đo góc nhị diện $[S,BC,A]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\tan\alpha=\sqrt{2}$ **B.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$ **C.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải.
Tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=1$ nên $AC=\sqrt{2}$. Tam giác SAC vuông tại A: $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.
Ta có $BC\perp AB$ và $BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAB)$, suy ra $BC\perp SB$. Do đó góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là $\widehat{SBA}$ và

$$\tan\alpha=\frac{SA}{AB}=\boxed{\sqrt{2}}.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	‖	↘	7	↗	$+\infty$

Trong các số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?

A. 1 **B** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải.
Tiệm cận đứng $x=2$ nên $d=-2<0$. Viết $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x-2}$ (với $\alpha=a$). Khi $x\to+\infty$ thì $f\to+\infty$ nên $a>0$; khi $x\to2^+$ thì $f\to+\infty$ nên $\gamma>0$.
$f'(x)=a-\dfrac{\gamma}{(x-2)^2}=0$ có hai nghiệm $x=0$, $x=4$ nên $\gamma=4a$.
$f(0)=-1$: $-2a+\beta-2a=-1$; $f(4)=7$: $4a+\beta+2a=7$. Giải ra $a=\dfrac{4}{5}$, $\beta=\dfrac{11}{5}$, $\gamma=\dfrac{16}{5}$.
Khi đó $f(x)=\dfrac{\frac{4}{5}x(x-2)+\frac{11}{5}(x-2)+\frac{16}{5}}{x-2}=\dfrac{0{,}8x^2+0{,}6x-1{,}2}{x-2}$, tức $a=0{,}8>0$, $b=0{,}6>0$, $c=-1{,}2<0$, $d=-2<0$.
Vậy có $\boxed{2}$ số dương.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Một xưởng sơn dự định sản xuất hai loại sơn là sơn ngoài trời và sơn nội thất. Xưởng đã chuẩn bị 6 tấn nguyên liệu A và 8 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên

liệu B. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Kết quả nghiên cứu thị trường cho thấy nhu cầu sơn ngoài trời không quá 2 tấn. Gọi x và y lần lượt là số tấn sơn ngoài trời và sơn nội thất cần sản xuất. Giả sử rằng lượng sơn sản xuất ra đều được bán hết.

a) Nếu xưởng sản xuất 3 tấn sơn nội thất thì lượng sơn ngoài trời tối đa có thể sản xuất là $1{,}5$ tấn

b) Xưởng có đủ nguyên liệu để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời và 4 tấn sơn nội thất

c) Bất phương trình biểu thị điều kiện về sử dụng nguyên liệu A là $2x + y \le 6$

d) Nếu giá bán một tấn sơn ngoài trời là 70 triệu đồng, một tấn sơn nội thất là 30 triệu đồng thì doanh thu lớn nhất của xưởng là 200 triệu đồng

Lời giải.

Các ràng buộc: $2x + y \le 6$ (nguyên liệu A), $x + 2y \le 8$ (nguyên liệu B), $0 \le x \le 2$, $y \ge 0$.

a) **Đúng.** Với $y = 3$: $2x + 3 \le 6 \Rightarrow x \le 1{,}5$ và $x + 6 \le 8 \Rightarrow x \le 2$. Vậy $x_{\max} = 1{,}5$ tấn.

b) **Sai.** Với $x = 1$, $y = 4$: nguyên liệu B cần $1 + 2 \cdot 4 = 9 > 8$. Không đủ.

c) **Đúng.** Nguyên liệu A dùng $2x + y$ tấn, không quá 6.

d) **Đúng.** Miền nghiệm là đa giác có các đỉnh $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;2)$, $\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$, $(0;4)$. Doanh thu $T = 70x + 30y$ lần lượt là $0;\ 140;\ 200;\ \frac{580}{3};\ 120$. Lớn nhất bằng 200 triệu đồng.

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}$

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\frac{5\sqrt{3}}{12}a^3$

c) Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D$ bằng 60°

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(A'B'C)$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải.

Đáy là nửa lục giác đều cạnh a nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$, $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA} = 30^\circ$ nên $AA' = AC\tan 30^\circ = a$.

Chọn $a = 1$ và hệ trục $Axyz$ với $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'(0;0;1)$.

a) **Sai.** Góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA}$ (không phải $\widehat{CA'A}$).

b) **Đúng.** Thể tích tỉ lệ với a^3 nên chọn $a = 1$ (khi đó $AA' = 1$).

Phương trình (P). $\overrightarrow{A'C} = \left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right) \parallel \vec{n} = (3;\sqrt{3};-2)$. Mặt phẳng (P) qua $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ nên $3x+\sqrt{3}y-2z = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3$, tức

$$(P)\colon 3x + \sqrt{3}y - 2z - 3 = 0 \iff z = g(x;y) := \frac{3x + \sqrt{3}y - 3}{2}.$$

Phần chứa A. Thay $A(0;0;0)$ vào vế trái được $-3 < 0$, nên khối chứa A gồm các điểm của lăng trụ thỏa $z \ge g(x;y)$, đồng thời $0 \le z \le 1$. Do đó tại điểm $(x;y)$ của đáy, chiều cao của khối là

$$h(x;y) = 1 - \min\{1; \max\{0; g(x;y)\}\}.$$

Chia đáy $ABCD$ thành ba miền.

- Đường $g = 0$, tức $3x + \sqrt{3}y = 3$, đi qua B và $M(1;0) \in AD$.
- Đường $g = 1$, tức $3x + \sqrt{3}y = 5$, đi qua $K'\left(\frac{7}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in BC$ và $N'\left(\frac{5}{3};0\right) \in AD$.

Hai đường này song song nên chia đáy thành: tam giác ABM (có $g \le 0$, chiều cao khối $h = 1$); hình bình hành $BMN'K'$ (có $0 \le g \le 1$); phần còn lại (có $g \ge 1$, $h = 0$, không đóng góp).

Tính thể tích.

- Trên tam giác ABM ($AM = 1$, đường cao $\frac{\sqrt{3}}{2}$): diện tích $\frac{\sqrt{3}}{4}$, khối là lăng trụ cao 1, thể tích $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

– Hình bình hành $BMN'K'$ có $BK' = MN' = \frac{2}{3}$ nằm ngang, chiều cao $\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên diện tích $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Trên miền này $h = 1 - g$ biến thiên tuyến tính từ 1 về 0 theo phương vuông góc với hai cạnh song song, nên giá trị trung bình của h là $\frac{1}{2}$ và thể tích là $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. (Đó là khối lăng trụ cụt với hai đáy là hai cạnh BM, $K'N'$.)

Vậy $V = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$, tức $\frac{5\sqrt{3}}{12}a^3$ (thể tích cả lăng trụ là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, nên khối còn lại có thể tích $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; kết quả đã kiểm tra bằng máy tính).

c) **Sai.** $AC \perp CD$ và $AC \perp CC'$ nên $AC \perp (CDD'C')$, suy ra $AC \perp C'D$. Góc bằng $90°$.

d) **Đúng.** Mặt phẳng $(A'B'C)$ đi qua $A'(0;0;1)$ và có vector pháp tuyến $\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C}\right] \parallel (\sqrt{3}; -1; \sqrt{3})$: $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0$. Khoảng cách từ $D(2;0;0)$ là $\frac{|2\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 3. Tháng 01 năm 2025, anh An bắt đầu làm việc cho một công ty X với lương bậc 1 là 16 triệu đồng/tháng. Điều khoản về lương quy định: nếu anh An hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng sẽ được tăng một bậc lương; lương bậc sau tăng 5% so với lương bậc liền trước đó. Trong suốt quá trình làm việc, anh An đều hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình và được tăng lương đúng hạn.

a) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 6 tháng đầu năm 2025 là 90 triệu đồng

b) Tháng 01 năm 2026, lương của anh An nhận được từ công ty X là 17,64 triệu đồng

c) Tổng số tiền lương anh An nhận được từ công ty X trong 3 năm kể từ ngày bắt đầu làm việc là 652,98 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

d) Ngày 15 tháng 12 năm 2025, anh An đã vay ngân hàng 80 triệu đồng để sửa nhà theo thể thức lãi kép với lãi suất 0,85%/tháng. Sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền là 30% số tiền lương của anh nhận từ công ty X trong tháng đó. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hết tháng 3 năm 2027 thì anh An sẽ trả hết nợ ngân hàng

Lời giải.

Lương bậc k là $u_k = 16 \cdot 1{,}05^{k-1}$ triệu đồng, mỗi bậc kéo dài 6 tháng.

a) **Sai.** 6 tháng đầu nhận $6 \cdot 16 = 96$ triệu đồng, không phải 90.

b) **Đúng.** Tháng 01/2026 là tháng thứ 13, thuộc bậc 3: $16 \cdot 1{,}05^2 = 17{,}64$ triệu đồng.

c) **Đúng.** 3 năm gồm 36 tháng, tức 6 bậc lương: $S = 6 \cdot 16 \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1} \approx 652{,}98$ triệu đồng.

d) **Sai.** Từ tháng 01/2026 đến hết tháng 3/2027 anh An trả nợ 15 lần, mỗi lần 30% lương: 5,292 (6 lần, bậc 3), 5,5566 (6 lần, bậc 4), 5,83443 (3 lần, bậc 5) triệu đồng. Số dư nợ sau mỗi tháng $B_k = 1{,}0085B_{k-1} - 0{,}3u_{(k)}$ với $B_0 = 80$. Tính được $B_{15} \approx 11{,}39 > 0$ triệu đồng, tức chưa trả hết nợ.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 4x + \frac{m}{4}\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

b) Đồ thị hàm số $h(x) = \frac{1}{f(x) + 1}$ có tất cả 3 đường tiệm cận

c) Hàm số $k(x) = f\left(\sqrt{x^2 - x}\right)$ có 2 điểm cực trị

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $f(2)$

Lời giải.

a) **Sai.** Đặt $u = x^2 - 4x + \frac{m}{4}$, $u' = 2x - 4 < 0$ trên $(1;2)$ nên u nghịch biến và $u \in \left(\frac{m}{4} - 4; \frac{m}{4} - 3\right)$. Để g đồng biến cần f nghịch biến trên khoảng đó. Vì $f'(x) = 3x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$, nên cần $\frac{m}{4} - 4 \geq 0$ và $\frac{m}{4} - 3 \leq 2$, tức $16 \leq m \leq 20$. Có 5 giá trị nguyên.

b) **Sai.** $f(x) + 1 = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$ có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị có 3 tiệm cận đứng; ngoài ra $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$ nên có thêm tiệm cận ngang $y = 0$. Tổng cộng 4 đường.

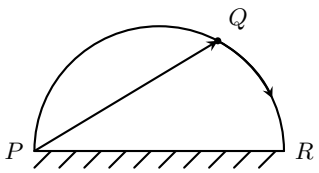
c) **Đúng.** Đặt $t = \sqrt{x^2 - x}$ (miền xác định $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$), $k'(x) = f'(t) \cdot \frac{2x - 1}{2t}$. Do $t' = \frac{2x - 1}{2t}$ khác 0 trên

miền xác định nên $k' = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0$ với $t > 0$, tức $t = 2$, $x^2 - x = 4$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Tại hai điểm này $f'(t)$ đổi dấu và $t(x)$ đơn điệu nên k' đổi dấu. Vậy có 2 điểm cực trị.

d) **Sai.** f là hàm bậc ba nên $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, không có giá trị nhỏ nhất ($f(2) = -3$ chỉ là cực tiểu).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1.
Trong công viên có một hồ nước hình bán nguyệt với đường kính $PR = 3$ km. Từ vị trí điểm P anh Minh chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h thẳng đến vị trí điểm Q trên bờ hồ, rồi đi bộ theo bờ hồ đến vị trí điểm R với vận tốc 6 km/h (*hình vẽ*). Thời gian tối đa để anh Minh di chuyển từ P đến R theo cách đó là bao nhiêu giờ (giả sử thời gian dời thuyền là không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải.
Gọi O là tâm của nửa đường tròn (bán kính 1,5 km) và $\theta = \widehat{QPR} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $PQ = PR\cos\theta = 3\cos\theta$ và góc ở tâm $\widehat{QOR} = 2\theta$ nên độ dài cung QR là $1{,}5 \cdot 2\theta = 3\theta$.
Thời gian di chuyển: $t(\theta) = \dfrac{3\cos\theta}{3} + \dfrac{3\theta}{6} = \cos\theta + \dfrac{\theta}{2}$.
$t'(\theta) = -\sin\theta + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$. Lập bảng biến thiên: t tăng trên $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$, giảm trên $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên

$$t_{\max} = t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \approx \boxed{1{,}13} \text{ (giờ)}.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của m sao cho với mỗi giá trị của m có duy nhất một cặp số nguyên không âm $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$ và $mx + y - 1 - 3m = 0$?

Lời giải.
Vì $x^2 + y^2 \geq 16$ nên cơ số $x^2 + 2y^2 + 1 > 1$, do đó

$$\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 8x + 1 \geq x^2 + 2y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 \leq 16.$$

Gọi S là tập các điểm nguyên không âm $(x; y)$ thỏa $x^2 + y^2 \geq 16$ và $(x-4)^2 + y^2 \leq 16$. Liệt kê được 18 điểm:

$$(3;3), (4;0), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (5;0), (5;1), (5;2), (5;3), (6;0), (6;1), (6;2), (6;3), (7;0), (7;1), (7;2), (8;0).$$

Phương trình $m(x-3) + (y-1) = 0$ là đường thẳng đi qua $I(3;1)$ có hệ số góc $-m$ (không thẳng đứng, nên loại điểm $(3;3)$ nằm trên $x = 3$). Mỗi m ứng với đúng một đường thẳng như vậy, ta cần đường thẳng chứa đúng một điểm của S.
Xét hệ số góc $k = \dfrac{y-1}{x-3}$ của các điểm còn lại: các điểm $(4;1), (5;1), (6;1), (7;1)$ cùng $k = 0$ và $(4;2), (5;3)$ cùng $k = 1$ (đường có ≥ 2 điểm, loại). Các hệ số góc còn lại mỗi giá trị chỉ có một điểm: -1, 2, 3, $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}$.
Vậy có $\boxed{11}$ giá trị của m.

Câu 3. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	24	57	42	29	18

Để tiết kiệm nước sạch, công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ nhiều nhất trong tháng. Vậy công ty cần lựa chọn những hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ bao nhiêu mét khối trở lên để gửi thông báo (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Lời giải.
Tổng số hộ: $n = 24 + 57 + 42 + 29 + 18 = 170$. Cần tìm tứ phân vị thứ ba Q_3 (có 25% hộ tiêu thụ từ Q_3 trở lên).
Tần số tích lũy: $24;\ 81;\ 123;\ 152;\ 170$. Vì $\dfrac{3n}{4} = 127{,}5$ nằm trong nhóm $[12;15)$ nên

$$Q_3 = 12 + \frac{127{,}5 - 123}{29} \cdot 3 = 12 + \frac{13{,}5}{29} \approx 12{,}47 \approx \boxed{12{,}5}\ (\text{m}^3).$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, $BC = 2$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ và $\widehat{BGC} = 90^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải.
Gọi M là trung điểm BC. Tam giác BGC vuông tại G nên $GM = \dfrac{BC}{2} = 1$, suy ra trung tuyến $AM = 3GM = 3$.
Đặt $a = BC = 2$, $b = CA$, $c = AB$. Công thức trung tuyến: $AM^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = 9 \Rightarrow b^2 + c^2 = 20$.
Định lí côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 30^\circ \Rightarrow 4 = 20 - \sqrt{3}\,bc \Rightarrow bc = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$.
Diện tích $S = \dfrac{1}{2}bc\sin 30^\circ = \dfrac{bc}{4} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, và $(b+c)^2 = 20 + 2bc = 20 + \dfrac{32}{\sqrt{3}}$ nên $b + c \approx 6{,}2$ ($p = \dfrac{a+b+c}{2} \approx 4{,}10$).
Vậy $r = \dfrac{S}{p} \approx \boxed{0{,}56}$.

Câu 5. Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với kích thước $AB = 4$ m, $BC = 3$ m và chiều cao $AA' = 3$ m. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Anh Cường muốn thiết kế một hệ thống dây trang trí bao gồm các đoạn dây nối thẳng từ M đến N, từ C' đến D và từ P đến Q, trong đó P là điểm thuộc đoạn MN, Q là điểm thuộc đoạn $C'D$. Giả sử các đầu nối không đáng kể thì anh Cường cần ít nhất bao nhiêu mét dây trang trí?

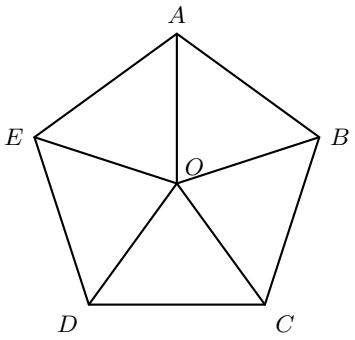
Lời giải.
$MN = BC = 3$ m, $C'D = \sqrt{CD^2 + CC'^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ m. Cần tìm PQ nhỏ nhất, tổng chiều dài dây nhỏ nhất bằng $3 + 5 + PQ_{\min}$.
Đặt hệ trục sao cho $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A'(0;0;3)$. Khi đó $M(4;0;1{,}5)$, $N(4;3;1{,}5)$, $C'(4;3;3)$. Điểm $P(4;t;1{,}5)$ với $t \in [0;3]$, còn $C'D$ nằm trong mặt phẳng $y = 3$. Khoảng cách từ P đến đường thẳng $C'D$ thỏa

$$d^2 = (3-t)^2 + d_N^2 \geq d_N^2,$$

trong đó d_N là khoảng cách từ N đến $C'D$ trong hình chữ nhật $CDD'C'$. Ta có $C'N = 1{,}5$ và $\sin\widehat{NC'D} = \dfrac{CD}{C'D} = \dfrac{4}{5}$, nên $d_N = 1{,}5 \cdot \dfrac{4}{5} = 1{,}2$ (chân đường vuông góc nằm trên đoạn $C'D$ vì $\widehat{NC'D}$ nhọn và $C'H = 1{,}5 \cdot \dfrac{3}{5} = 0{,}9 < 5$).
Vậy $PQ_{\min} = 1{,}2$ khi $P \equiv N$ và tổng chiều dài dây nhỏ nhất là $3 + 5 + 1{,}2 = \boxed{9{,}2}$ (m).

Câu 6.
Để trang trí cho một tấm biển hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O, người ta tô màu cho 5 tam giác cân OAB, OBC, OCD, ODE, OEA từ 4 màu xanh, đỏ, tím, vàng và chọn ra 6 số phân biệt từ tập hợp $A = \{1;2;3;\ldots;120\}$ để điền vào các vị trí A, B, C, D, E, O. Có bao nhiêu cách trang trí thỏa mãn đồng thời các yêu cầu sau:

+ Mỗi tam giác được tô bởi đúng 1 màu;
+ Hai tam giác có chung một cạnh thì tô màu khác nhau;
+ 5 số trên năm đỉnh của ngũ giác lần lượt theo cùng chiều kim đồng hồ lập thành một cấp số nhân và công bội của cấp số nhân này là số điền vào vị trí tâm O.



Lời giải.

Tô màu. Năm tam giác xếp thành vòng tròn, hai tam giác kề nhau (chung cạnh $OA, OB, \ldots$) phải khác màu. Số cách tô vòng 5 phần tử bằng 4 màu: $(4-1)^5 + (-1)^5(4-1) = 240$ cách.

Điền số. Gọi công bội là q (là số điền ở O, nguyên). Năm số trên đỉnh là u, uq, uq^2, uq^3, uq^4 (đọc theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ một đỉnh nào đó). Các số phân biệt nên $q \neq 1$, tức $q \geq 2$; và $uq^4 \leq 120$.

- $q = 2$: $16u \leq 120 \Rightarrow u \leq 7$. Số 2 ở tâm phải khác các số trên đỉnh nên $u \neq 1, 2$; có $u \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$: 5 cấp số.
- $q = 3$: $81u \leq 120 \Rightarrow u = 1$, nhưng khi đó số hạng 3 trùng với số ở O: loại.
- $q \geq 4$: $q^4 \geq 256 > 120$: loại.

Mỗi cấp số có thể bắt đầu từ một trong 5 đỉnh (theo chiều kim đồng hồ) nên có $5 \cdot 5 = 25$ cách điền số.

Vậy số cách trang trí là $25 \cdot 240 = \boxed{6000}$.

——— Hết ———