SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ
CỤM 12 TRƯỜNG THPT
———————
Đề có 10 trang
ĐỀ CHÍNH THỨC

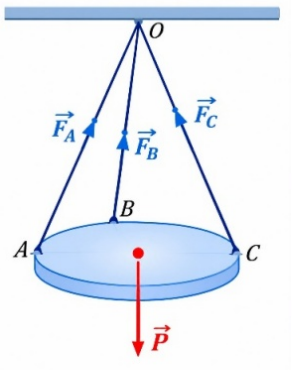
KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT LẦN 2
NĂM HỌC 2026 – 2027
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút, không kể thời gian phát đề.

Mã đề thi: 1001

***Họ và tên:** ..... **Số báo danh:** ..... **Phòng thi số:** ……*

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_A}, \overrightarrow{F_B}, \overrightarrow{F_C}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\vec{F}_A\right| = \left|\vec{F}_B\right| = \left|\vec{F}_C\right| = 25\sqrt{3}(\text{N})$.



Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

A. $50\sqrt{2}$. **B.** 75. **C.** 50. **D.** 25.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên đôi một vuông góc, $SB = 3$, $SC = 4$. Biết số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$ bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{16}{5}$. **B.** $\frac{72}{5}$. **C.** $\frac{24}{5}$. **D.** $\frac{21}{5}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^3$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy $ABCD$ bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

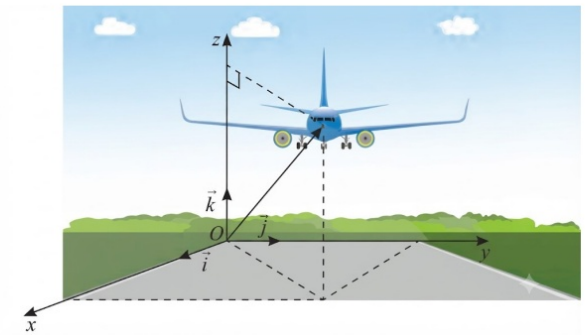
Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 6. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và BC bằng

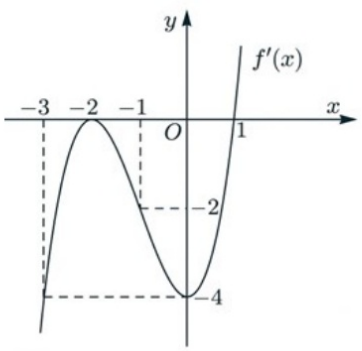
A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Một chiếc máy bay thương mại đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ được gắn như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất và $M(x;y;z)$ (với đơn vị trên các trục tính bằng km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8 giờ 00 phút, máy bay đang ở vị trí $M_1(5;12;1,6)$ và chuyển động thẳng đều với vận tốc $\vec{v}=(600;800;-6)$ (km/h). Tại thời điểm 8 giờ 06 phút, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(125;102;0)$ là bao nhiêu km? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



A. $60,9$. **B.** $61,0$. **C.** $60,8$. **D.** $60,7$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



Biết rằng: $f(-2)-2f(1)=f(3)-f(2)-f(-1)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-2;3]$.

A. $f(1)$. **B.** $f(3)$. **C.** $f(-1)$. **D.** $f(-2)$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{2}=0$ trên khoảng $(-2027\pi;2027\pi)$ là

A. 2026. **B.** 2027. **C.** 4052. **D.** 4054.

Câu 10. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=6\cos x-7$ trên đoạn $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. Giá trị $M+m$ bằng

A. 10. **B.** -11. **C.** 3. **D.** -14.

Câu 11. Gọi u_n là số chấm tròn ở hàng thứ n trong cột thứ hai, và v_n là tổng diện tích của các lưới ô vuông ở hàng thứ n trong cột thứ tư ở hình vẽ bên dưới (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Biết rằng tồn tại ba số nguyên dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân tăng, đồng thời ba số hạng u_a,u_b,u_{c-2} theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và thỏa mãn $v_a+v_b+v_c=584$. Tính giá trị của biểu thức $T=u_{a+b}+v_c$.

Hàng thứ 1	○	Hàng thứ 1	□
Hàng thứ 2	○ ○	Hàng thứ 2	⊞ ⊞
Hàng thứ 3	○ ○ ○	Hàng thứ 3	⊞ ⊞ ⊞
Hàng thứ 4	○ ○ ○ ○	Hàng thứ 4	⊞ ⊞ ⊞ ⊞

A. 222. **B.** 518. **C.** 224. **D.** 4102.

Câu 12. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB=a; AC=a\sqrt{3}; BC=a$. Gọi M là trung điểm CC' và khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{14}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 13. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3, bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 43. **B.** 30. **C.** 37. **D.** 25.

Câu 14. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là các nghiệm của phương trình: $e^{x^2-5x+6}=1$. Tổng $S={x_1}^2+{x_2}^2$ bằng

A. $S=13$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=10$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)+H(4)=4$ và $F(1)+G(1)+H(1)=1$. Tính $\int_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\,\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{|3a^2-1|}{2}$. **C.** $I=\frac{a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{a^2+2}{2}$.

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2^x+2^{3-x}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $m+2\sqrt{n}$ (m, n là các số nguyên dương). Tính $P=\frac{m}{n+2}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{8}{11}$. **D.** $\frac{9}{10}$.

Câu 18. Số đường tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Tọa độ điểm M là

A. $M\left(1;-2;-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $M\left(-1;-2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $M\left(-1;2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $M\left(1;2;-\frac{5}{2}\right)$.

Câu 20. Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ) bằng:

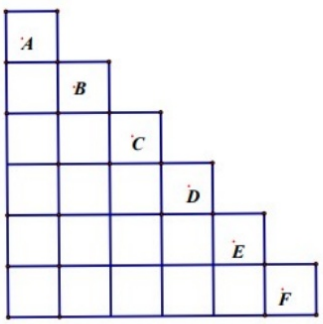
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $u_1-4u_2+6u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng thứ 20 là

A. $u_{20}=\frac{1}{387.421.498}$. **B.** $u_{20}=\frac{1}{387.420.489}$.

C. $u_{20}=387.420.489$. **D.** $u_{20}=387.421.498$.

Câu 22. Từ tập $A=\{1;2;.....;50\}$ gồm 50 số tự nhiên liên tiếp, cần chọn ra 21 số phân biệt để gắn vào 21 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A,B,C,D,E,F theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\log(T)$ bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*).



A. 5,4. **B.** 8,7. **C.** 6,3. **D.** 8,5.

Câu 23. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

A. $F(x)=-\cot x-\tan x$. **B.** $F(x)=\cot x-\tan x$.

C. $F(x)=\cos x+\sin x$. **D.** $F(x)=-\cos x-\sin x$.

Câu 24. Để giám sát dư chấn, viện Vật lý Địa cầu thiết lập một hệ thống quan trắc địa chấn được mô hình hóa trên hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ (đơn vị: km), với mặt phẳng (Oxy) biểu diễn mặt đất. Có ba trạm quan trắc được đặt trên mặt đất tại các vị trí $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$ và $C(0;3;0)$. Tại một thời điểm, các trạm quan trắc ghi nhận được một trận động đất có tâm chấn E nằm sâu dưới lòng đất (nghĩa là cao độ của E mang giá trị âm). Phân tích dữ liệu sóng, các chuyên gia xác định được khoảng cách từ tâm chấn E đến các trạm A,B,C lần lượt là 3 km, 3 km và $2\sqrt{3}$ km. Tọa độ tâm chấn E của trận động đất là:

A. $E(2;1;2)$. **B.** $E(2;-1;-2)$. **C.** $E(1;2;-2)$. **D.** $E(2;1;-2)$.

Câu 25. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong ba lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 366. **B.** 225. **C.** 360. **D.** 6.

Câu 26. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2-5x+4\right)\le 2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27. Tập xác định của hàm số: $y=\log\left(2x-x^2\right)$ là tập hợp nào sau đây?

A. $D=[0;2]$. **B.** $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=(0;2)$. **D.** $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Câu 28. Nhà máy M chuyên sản xuất linh kiện điện tử cung cấp cho nhà máy N. Hai nhà máy thỏa thuận rằng: Hàng tháng nhà máy M cung cấp cho nhà máy N số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy N (tối đa 150 nghìn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x nghìn sản phẩm thì giá bán cho mỗi nghìn sản phẩm là $P(x)=90-0,002x^2$ (triệu đồng).

Chi phí để nhà máy M sản xuất x nghìn sản phẩm trong một tháng bao gồm:

+) Chi phí cố định: 200 triệu đồng.

+) Chi phí cho mỗi nghìn sản phẩm làm ra: 30 triệu đồng.

Hỏi nhà máy M cần bán cho nhà máy N bao nhiêu nghìn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

A. 100. **B.** 120. **C.** 90. **D.** 99.

Câu 29. Một bể chứa dầu ban đầu có 30000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t, trong đó t tính theo giờ $(0\le t\le 24)$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t)=k.\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Biết rằng nếu bể không bị rò rỉ thì sau 9 giờ bơm liên tục, thể tích dầu đạt 57000 lít. Tuy nhiên trên thực tế, ngay từ lúc bắt đầu bơm, bể bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 16 giờ, thể tích dầu trong bể là bao nhiêu lít?

A. 88000. **B.** 85000. **C.** 84000. **D.** 86000.

Câu 30. Mỗi ngày bác Hùng đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày của bác Hùng trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

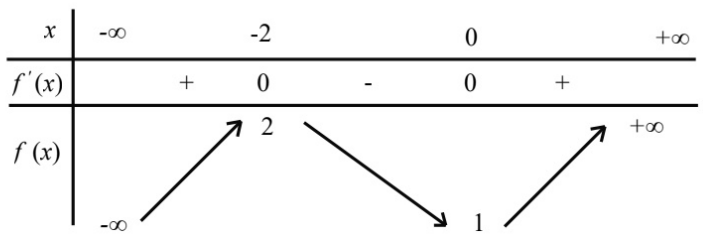
Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 0,36. **B.** 0,13. **C.** 3,39. **D.** 11,62.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-2;5;-3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $P=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0;4;0)$ **B.** $M(-1;4;-1)$. **C.** $M\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$. **D.** $M(-1;0;-1)$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Tại thời điểm $t=0$, một điểm P xuất phát từ gốc toạ độ và chuyển động trên trục số thực. Vận tốc của P tại thời điểm t là $v(t)=t^2-kt+4$ (với $k\in\mathbb{R}$).

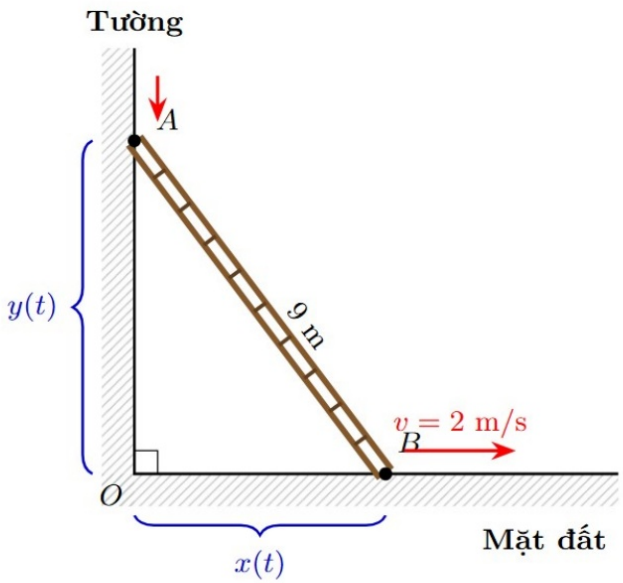
a) Vị trí của điểm P tại thời điểm t là $s(t)=\frac{t^3}{3}-k\frac{t^2}{2}+4t+1$

b) Nếu $k=5$, quãng đường điểm P đi được từ $t=0$ đến $t=2$ là 3.

c) Nếu $k=0$, vị trí của P tại thời điểm $t=1$ là $\frac{13}{3}$.

d) Nếu $k=3$, sau khi xuất phát, P đổi hướng chuyển động một lần.

Câu 2. Một chiếc thang có chiều dài không đổi 9 m tựa vào một bức tường thẳng đứng trên một mặt đất bằng phẳng (coi góc tạo bởi tường và mặt đất là góc vuông). Tại thời điểm $t=0$, đầu trên A của thang chạm sát tường ở độ cao 9 m so với mặt đất, đầu dưới B chạm sát chân tường O. Sau đó, đầu dưới B được kéo di chuyển trên mặt đất ra xa chân tường O theo một đường thẳng vuông góc với tường với vận tốc không đổi là 2 m/s, làm cho đầu trên A trượt xuống dọc theo bức tường cho đến khi chạm đất (giả sử trong suốt quá trình chuyển động, đầu trên A luôn được giữ trượt sát theo bức tường). Gọi $x(t)$ và $y(t)$ (đơn vị: mét) lần lượt là khoảng cách từ chân tường O đến đầu dưới B và độ cao của đầu trên A so với mặt đất tại thời điểm t (giây).



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau trong suốt quá trình thang trượt (với $0<t<4{,}5$):

a) Tại thời điểm diện tích tam giác OAB bắt đầu giảm, tốc độ thay đổi của góc α (góc hợp bởi chiếc thang và mặt đất) là $\frac{\sqrt{2}}{9}$ rad/s.

b) Kể từ lúc bắt đầu trượt cho đến khi đầu trên của thang cách mặt đất 3 m, diện tích của tam giác vuông OAB (tạo bởi chiếc thang, bức tường và mặt đất) luôn tăng.

c) Khi đầu trên của thang cách mặt đất 3 m thì tốc độ trượt xuống của đầu trên là $4\sqrt{2}$ m/s.

d) Hàm số biểu thị độ cao $y(t)$ của đầu trên A theo thời gian t là $y(t)=\sqrt{81-4t^2}$ (mét).

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=3, SB=4, SC=6$ và các góc ở đỉnh $\widehat{ASB}=60°, \widehat{BSC}=120°, \widehat{CSA}=90°$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $SABC$ và I là điểm thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}, \overrightarrow{SB}=\vec{b}, \overrightarrow{SC}=\vec{c}$.

a) Gọi M là điểm di động trên đường thẳng AB. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng IM (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng $4,86$.

b) Độ dài đoạn thẳng GI bằng $\dfrac{\sqrt{511}}{4}$.

c) Tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-6$.

d) Biểu diễn của vectơ $\overrightarrow{GI}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là $\overrightarrow{GI}=\dfrac{1}{12}\vec{a}-\dfrac{11}{12}\vec{b}-\dfrac{7}{12}\vec{c}$.

Câu 4. Trước kỳ thi học sinh giỏi, nhà trường tổ chức buổi gặp mặt 10 em học sinh trong đội tuyển. Biết các em có số thứ tự trong danh sách được đánh số tăng dần và lập thành một cấp số cộng $u_1,u_2,\ldots,u_{10}$ (với công sai $d>0$). Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 10 em ngồi vào hai dãy bàn đối diện nhau (dãy 1 và dãy 2), mỗi dãy có 5 ghế được đánh số từ 1 đến 5 theo thứ tự từ trái sang phải (ghế số k của dãy 1 đối diện với ghế số k của dãy 2, mỗi ghế chỉ được ngồi một học sinh). Gọi A là biến cố: *"Tổng các số thứ tự của mỗi cặp học sinh ngồi đối diện nhau đều bằng nhau"*.

a) Xác suất để biến cố A xảy ra đồng thời học sinh có số thứ tự nhỏ nhất (u_1) và học sinh có số thứ tự lớn nhất (u_{10}) đều ngồi ở các ghế đầu bàn (tức là các ghế số 1 hoặc số 5 của hai dãy) bằng $\dfrac{2}{945}$.

b) Xác suất để biến cố A xảy ra, đồng thời hai học sinh u_1,u_2 không ngồi ở hai ghế kề nhau trên cùng một dãy bàn và tổng các số thứ tự của 5 học sinh ngồi ở dãy 1 lớn hơn tổng các số thứ tự của 5 học sinh ngồi ở dãy 2 bằng $\dfrac{2}{4725}$.

c) Để biến cố A xảy ra, học sinh có số thứ tự u_2 bắt buộc phải ngồi đối diện với học sinh có số thứ tự u_9.

d) Xác suất của biến cố A bằng $\dfrac{1}{945}$.

Câu 5. Để khảo sát mức độ suy giảm trí nhớ theo thời gian (đường cong quên lãng Ebbinghaus), học sinh trong một lớp Toán đã làm một bài kiểm tra lần đầu (thang điểm 100) và sau đó làm lại các bài kiểm tra có độ khó tương đương theo định kỳ hàng tháng mà không ôn tập lại kiến thức. Điểm trung bình của lớp tại thời điểm t (tháng) kể từ lần kiểm tra đầu tiên ($0\le t\le 12$) được mô hình hóa bởi hàm số:

$$f(t)=a-b\log(t+1) \quad (a,b\in\mathbb{R}).$$

Biết rằng tại thời điểm ban đầu ($t=0$), điểm trung bình của học sinh là 80 điểm và sau 9 tháng kể từ lần kiểm tra đầu tiên, điểm trung bình giảm xuống còn 63 điểm.

a) Tốc độ suy giảm điểm trung bình của học sinh tại thời điểm tròn 3 tháng bằng $\dfrac{17}{4}$ (điểm/tháng).

b) Giá trị của các tham số trong mô hình lần lượt là $a=80$ và $b=17$.

c) Sau 12 tháng kể từ lần kiểm tra đầu tiên, điểm trung bình của học sinh trong lớp còn lại khoảng $61,1$ điểm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

d) Giả sử ngay sau bài kiểm tra ở tháng thứ 9, giáo viên tổ chức một đợt ôn tập chuyên sâu giúp điểm trung bình của lớp lập tức tăng thêm 12 điểm; từ thời điểm đó trở đi, quá trình quên kiến thức bắt đầu lại theo một hàm số mới $g(u)=c-d\log(u+1)$ (với $u\ge 0$ là số tháng tính từ lúc vừa ôn tập xong). Biết hệ số suy giảm mới giảm đi $\ln 10$ lần so với hệ số b ban đầu ($d=\dfrac{b}{\ln 10}$). Khi đó, tại thời điểm tròn 12 tháng kể từ bài kiểm tra đầu tiên ($t=12$), tốc độ suy giảm điểm số tức thời của lớp là $1,8$ (điểm/tháng).

Câu 6. Vào mùa thu hoạch, người ta thu hoạch hết số táo trên từng cây xuống. Khi chọn ngẫu nhiên một quả từ cây thứ nhất thì nhận thấy xác suất để chọn được quả bị hỏng là $\frac{2}{21}$. Những quả hỏng của cây thứ nhất được loại bỏ hết sau đó cho những quả còn lại vào thùng rỗng A. Thùng này tiếp tục được cho thêm một số quả táo tốt từ cây thứ hai sao cho vừa đủ 100 quả rồi đóng thùng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả từ thùng này thì xác suất để chọn được 2 quả từ cây thứ nhất là $\frac{19}{33}$.

a) Tỉ lệ số quả hỏng và số quả không bị hỏng ở cây thứ nhất là $\frac{2}{21}$.

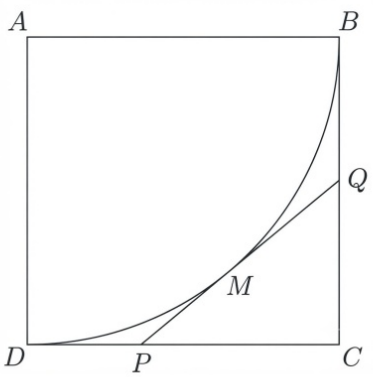
b) Cây thứ nhất có 76 quả tốt không bị hỏng.

c) Giả sử cây thứ hai có 7 quả hỏng và toàn bộ số quả tốt của cây thứ 2 đã được bỏ vào thùng A. Bỏ toàn bộ quả ở cả 2 cây vào chung một thùng B. Khi đó nếu bốc ngẫu nhiên 2 quả từ thùng B thì xác suất bốc được 2 quả đều hỏng là $\frac{7}{437}$.

d) Tổng số quả thu hoạch được từ cây thứ nhất (kể cả quả hỏng) là 85 quả.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Một xưởng cơ khí cần gia công một tấm thép mỏng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2 m. Người ta muốn cắt bỏ một góc của tấm thép bằng một đường cắt thẳng (tiếp tuyến PQ) tiếp xúc với một mép viền uốn cong là một cung tròn tâm A, bán kính AB (như hình vẽ bên).



Để tiết kiệm vật liệu phế phẩm và tối ưu hóa kết cấu góc cắt, kỹ sư cần đặt vị trí tiếp tuyến PQ sao cho đoạn cắt PQ có độ dài nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính độ dài đoạn thẳng DP (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} 2x+3y-6\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 2x-3y-1\le 0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là một đa giác phẳng. Tính diện tích của đa giác đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Câu 3. Một vật nhỏ dao động điều hòa theo phương thẳng đứng có khoảng cách từ vật đến mặt đất ở thời điểm t (giây) được cho bởi hàm số: $h(t)=50+6\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(cm);\quad (t\ge 0)$.

Tính tổng quãng đường (theo đơn vị centimet) mà vật di chuyển được kể từ thời điểm ban đầu ($t=0$) cho đến thời điểm gia tốc chuyển động của vật bằng 0 lần thứ hai.

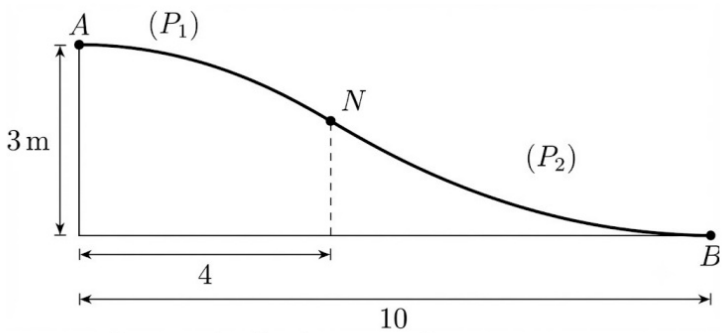
Câu 4. Một quỹ đầu tư theo dõi sự biến động giá trị tài sản ròng của một dự án khởi nghiệp trong 9 tháng đầu hoạt động. Tại thời điểm x tháng kể từ khi bắt đầu dự án ($0\le x\le 9, x\in\mathbb{R}$), giá trị tài sản ròng của dự

án được mô hình hóa bởi hàm số liên tục $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (đơn vị: tỷ đồng), với a,b,c là các hằng số thực. Qua theo dõi thực tế, tại thời điểm tròn 1 tháng, giá trị tài sản ròng của dự án đạt 19 tỷ đồng; sau đó giá trị này giảm dần và đạt mức thấp nhất trong suốt quá trình khảo sát tại thời điểm tròn 3 tháng với giá trị là 3 tỷ đồng, trước khi phục hồi và tăng trưởng mạnh trở lại từ tháng thứ ba trở đi. Tính giá trị tài sản ròng của dự án đó (theo đơn vị tỷ đồng) tại thời điểm tròn 6 tháng.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi $AC\cap BD=O$, gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và SC. Tính góc (tính theo độ) giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

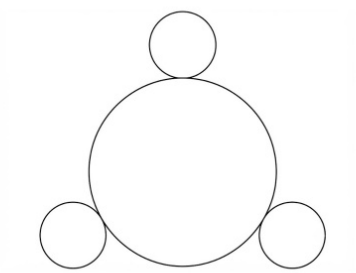
Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\equiv O$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Gọi $M\in(ABCD)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=-2MA'+MB'^2-MC'^2+MD'^2+2026$

Câu 7. Một resort muốn đắp đồi trượt cỏ cho trẻ em. Đường trượt được thiết kế bắt đầu từ vị trí A cao 3 m thoải dần theo dạng một parabol (P_1) có đỉnh ngay vị trí bắt đầu trượt và được kết nối với một parabol (P_2) tại N cách vị trí ban đầu 4 m theo phương ngang. Về mặt kỹ thuật, để đường trượt mượt mà thì vị trí kết nối này phải đảm bảo hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm kết nối của cả hai parabol trên phải bằng nhau. Parabol (P_2) có đỉnh ở vị trí kết thúc B có cao độ bằng 0 và cách vị trí ban đầu 10 m theo phương ngang. Hình bên dưới thể hiện mặt cắt bên của đồi trượt cỏ.

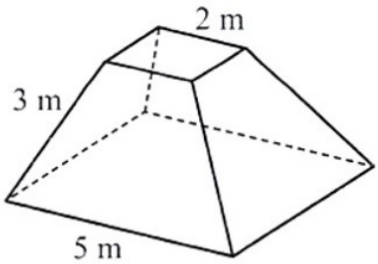


Biết đồi trượt rộng 5 m, tính số mét khối đất đắp thành đồi trượt.

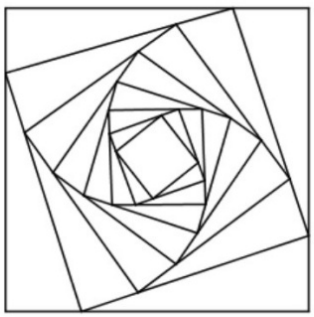
Câu 8. Cho tập $X=\{1;2;3;...;12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập hợp X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.



Câu 9. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình tham khảo bên dưới). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1500000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 10. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, ...C_n$. Gọi S_i là diện tích hình vuông C_i $(i \in \{1;2;3;...\})$. Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n + ...$ Biết $T = \dfrac{32}{3}$, tính a?

Câu 11. Một quy trình luyện kim yêu cầu làm nguội một khối hợp kim đặc biệt từ nhiệt độ ban đầu $800°C$ xuống đúng $50°C$ để đảm bảo độ cứng cơ học. Quá trình làm nguội được thực hiện qua hai giai đoạn liên tiếp:

+) Giai đoạn 1: Để khối hợp kim nguội tự nhiên trong môi trường không khí ở nhiệt độ phòng ổn định $30°C$.

+) Giai đoạn 2: Nhúng khối hợp kim vào một bể dung dịch làm lạnh đặc biệt luôn được duy trì ở nhiệt độ $10°C$.

Biết rằng nhiệt độ của hợp kim trong quá trình làm nguội tuân theo định luật làm mát của Newton: $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, trong đó T_m là nhiệt độ môi trường xung quanh, T_0 là nhiệt độ của vật thể tại thời điểm bắt đầu giai đoạn làm mát, t (phút) là thời gian làm mát và k là hệ số làm mát của môi trường.

Qua thực nghiệm, nếu chỉ để khối hợp kim trong không khí thì sau đúng 10 phút nhiệt độ của nó giảm từ $800°C$ xuống còn $415°C$. Hệ số làm mát của dung dịch đặc biệt cao gấp 3 lần hệ số làm mát của không khí.

Quá trình làm nguội phát sinh chi phí như sau: duy trì hợp kim trong môi trường không khí tốn chi phí chống oxy hóa là 20.000 đồng/phút, trong khi chi phí tiêu hao hóa chất trong bể dung dịch lạnh là 70.000 đồng/phút (giả sử thời gian vận chuyển hợp kim giữa hai môi trường là không đáng kể).

Hãy tính mức chi phí thấp nhất để làm nguội khối hợp kim (*làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị nghìn đồng*).

Câu 12. Bạn Tuấn có 6 chiếc hộp phân biệt, 4 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, các quả bóng cùng màu không phân biệt được nhau. Gọi S là tập hợp tất cả các cách bạn Tuấn phân bổ 11 quả bóng này vào 6 chiếc hộp (không nhất thiết cả 6 hộp đều có bóng). Chọn ngẫu nhiên một cách phân bổ từ tập hợp S. Gọi P là xác suất để cách phân bổ đó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: Hộp nào cũng có bóng, mỗi hộp có không quá 3 quả bóng đồng thời không có hộp nào chứa 2 quả bóng đỏ trở lên. Tính giá trị $1584.P$.

_____HẾT_____

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ
CỤM 12 TRƯỜNG THPT
————————

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT
LẦN 02
NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN

Mã đề / Câu	*1001*	*1002*	*1003*	*1004*
1	**B**	**C**	**A**	**B**
2	**C**	**B**	**C**	**D**
3	**A**	**D**	**A**	**A**
4	**D**	**D**	**B**	**D**
5	**A**	**B**	**C**	**C**
6	**A**	**C**	**A**	**D**
7	**C**	**A**	**D**	**B**
8	**B**	**B**	**A**	**A**
9	**D**	**D**	**A**	**D**
10	**B**	**B**	**B**	**A**
11	**B**	**B**	**D**	**D**
12	**A**	**A**	**B**	**C**
13	**C**	**C**	**B**	**A**
14	**A**	**B**	**A**	**C**
15	**C**	**A**	**C**	**D**
16	**C**	**B**	**D**	**B**
17	**D**	**A**	**B**	**C**
18	**B**	**C**	**C**	**D**
19	**C**	**D**	**D**	**B**
20	**A**	**A**	**C**	**D**
21	**B**	**B**	**D**	**A**
22	**D**	**C**	**D**	**B**
23	**A**	**D**	**C**	**C**
24	**D**	**A**	**A**	**A**
25	**B**	**C**	**B**	**B**
26	**C**	**C**	**A**	**B**
27	**C**	**A**	**D**	**A**
28	**A**	**D**	**B**	**C**
29	**D**	**C**	**D**	**A**
30	**B**	**D**	**C**	**B**
31	**D**	**D**	**B**	**B**
32	**D**	**A**	**C**	**C**
1	**SĐĐS**	**ĐSSĐ**	**SĐSĐ**	**SSĐĐ**
2	**SSĐĐ**	**ĐĐĐS**	**SĐĐS**	**ĐSĐS**

3	**SSDĐ**	**ĐSĐS**	**ĐĐĐS**	**ĐĐSS**
4	**SĐĐĐ**	**SĐSĐ**	**SĐSĐ**	**SĐSĐ**
5	**SĐĐS**	**ĐSSĐ**	**ĐĐSS**	**ĐSĐS**
6	**SĐĐS**	**SĐĐS**	**ĐSSĐ**	**ĐĐSĐ**
1	**0,83**	**2029**	**2**	**70**
2	**1,96**	**0,83**	**30**	**45**
3	**21**	**958**	**958**	**2**
4	**84**	**2**	**41,4**	**2029**
5	**45**	**1,96**	**0,83**	**30**
6	**2029**	**45**	**70**	**84**
7	**70**	**41,4**	**84**	**16**
8	**16**	**70**	**45**	**1,96**
9	**41,4**	**21**	**21**	**0,83**
10	**2**	**30**	**1,96**	**958**
11	**958**	**84**	**2029**	**41,4**
12	**30**	**16**	**16**	**21**

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Các lực $\overrightarrow{F_A},\overrightarrow{F_B},\overrightarrow{F_C}$ đôi một vuông góc và có cùng độ lớn $25\sqrt{3}$ nên hợp lực $\vec{F}=\overrightarrow{F_A}+\overrightarrow{F_B}+\overrightarrow{F_C}$ có $\left|\vec{F}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_A}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_B}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_C}\right|^2=3\cdot\left(25\sqrt{3}\right)^2=5625$, suy ra $\left|\vec{F}\right|=75$.

Đèn cân bằng nên trọng lượng của đèn là $P=\left|\vec{F}\right|=75$ (N). Chọn B.

Câu 2. Do $SA\perp SB$, $SA\perp SC$ nên $SA\perp(SBC)$. Gọi H là hình chiếu của S trên BC. Ta có $BC\perp SH$, $BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAH)$, suy ra $BC\perp AH$. Do đó $[A,BC,S]=\widehat{SHA}=45^\circ$.

Tam giác SBC vuông tại S có $BC=5$, $SH=\dfrac{SB\cdot SC}{BC}=\dfrac{12}{5}$. Tam giác SAH vuông tại S có $SA=SH\cdot\tan 45^\circ=\dfrac{12}{5}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{12}{5}\cdot 3\cdot 4=\dfrac{24}{5}$. Chọn C.

Câu 3. $f'(x)=x^2(x-1)(x-2)^3$ có dấu cùng dấu với $(x-1)(x-2)$ khi $x\neq 0$, nên $f'(x)>0$ khi $x<1$, $x\neq 0$ hoặc $x>2$; $f'(x)<0$ khi $1<x<2$.

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$. Mà $(-1;1)\subset(-\infty;1)$. Chọn A.

Câu 4. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=60^\circ$ nên tam giác ABC đều, $AC=a$, $BD=a\sqrt{3}$, suy ra $OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC=\dfrac{a}{2}$.

Kẻ $OK\perp BC$ tại K. Do $B'O\perp(ABCD)$ nên $BC\perp(B'OK)$, suy ra góc giữa $(BB'C'C)$ và $(ABCD)$ là $\widehat{B'KO}=60^\circ$.

Tam giác OBC vuông tại O nên $OK=\dfrac{OB\cdot OC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, suy ra $B'O=OK\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{3a}{4}$.

$S_{ABCD}=2S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V=B'O\cdot S_{ABCD}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. Chọn D.

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}$, với $\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+AA'^2=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ+2a^2=\dfrac{3a^2}{2}$.

$AB' = BC' = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$. Suy ra $\cos\left(AB', BC'\right) = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{3a^2} = \dfrac{1}{2}$, nên góc giữa AB' và BC' bằng 60°. Chọn A.

Câu 6. Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp \left(SAB\right)$. Kẻ $BH \perp SE$ tại H, khi đó $BH \perp BC$ nên $d\left(SE, BC\right) = BH = d\left(B, SE\right)$.

Do E là trung điểm AB nên $d\left(B, SE\right) = d\left(A, SE\right)$. Tam giác SAE vuông tại A có $AE = \dfrac{a}{2}$, $SE = \sqrt{2a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3a}{2}$.

$d\left(A, SE\right) = \dfrac{SA \cdot AE}{SE} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{2}}{\dfrac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Chọn A.

Câu 7. Gọi M là vị trí máy bay lúc 8 giờ 06 phút. Từ 8 giờ 00 phút đến 8 giờ 06 phút máy bay bay được 6 phút $= \dfrac{1}{10}$ giờ nên $\overrightarrow{M_1M} = \dfrac{1}{10}\vec{v} = (60; 80; -0,6)$, suy ra $M(65; 92; 1)$.

$MF = \sqrt{(125-65)^2 + (102-92)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3701} \approx 60,8$ $\left(\text{km}\right)$. Chọn C.

Câu 8. Từ đồ thị: $f'(x) \le 0$ với mọi $x \in \left[-2; 1\right]$ (chỉ bằng 0 tại $x = -2$ và $x = 1$) và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \left(1; 3\right]$.

Suy ra trên $\left[-2; 3\right]$ hàm số nghịch biến trên $\left[-2; 1\right]$, đồng biến trên $\left[1; 3\right]$, nên $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = \max\left\{f(-2); f(3)\right\}$.

Từ giả thiết: $f(-2) - f(3) = \left[f(1) - f(2)\right] + \left[f(1) - f(-1)\right]$.

Do hàm số đồng biến trên $\left[1; 3\right]$ nên $f(1) < f(2)$; do hàm số nghịch biến trên $\left[-2; 1\right]$ nên $f(1) < f(-1)$. Suy ra $f(-2) - f(3) < 0$, tức $f(-2) < f(3)$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-2; 3\right]$ là $f(3)$. Chọn B.

Câu 9. $2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Với $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$: $-2027\pi < \dfrac{\pi}{4} + k2\pi < 2027\pi \Leftrightarrow -1013,625 < k < 1013,375$, có 2027 giá trị nguyên của k.

Với $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi:\ -2027\pi<\frac{3\pi}{4}+k2\pi<2027\pi\Leftrightarrow -1013{,}875<k<1013{,}125$, có 2027 giá trị nguyên của k.

Vậy phương trình có 4054 nghiệm. Chọn D.

Câu 10. Với $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ thì $\cos x$ lớn nhất bằng 1 tại $x=0$ và nhỏ nhất bằng $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ tại $x=-\frac{2\pi}{3}$, nên $-\frac{1}{2}\le\cos x\le 1$.

Suy ra $-10\le y\le -1$, do đó $M=-1$, $m=-10$, $M+m=-11$. Chọn B.

Câu 11. Theo quy luật thể hiện trong hình: hàng thứ n cột thứ hai có n chấm tròn nên $u_n=n$; hàng thứ n cột thứ tư có n lưới, mỗi lưới gồm n^2 ô vuông nên $v_n=n\cdot n^2=n^3$.

Theo giả thiết: $a<b<c$ là các số nguyên dương, $b^2=ac$, $2b=a+c-2$ và $a^3+b^3+c^3=584$.

Thay $c=2b-a+2$ vào $b^2=ac$ ta được $b^2=2ab-a^2+2a$, suy ra $(b-a)^2=2a$.

Do $(b-a)^2$ là số chẵn nên $b-a$ chẵn. Đặt $b-a=2k$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$, ta được $a=2k^2$, $b=2k^2+2k$, $c=\frac{b^2}{a}=2(k+1)^2$.

Do $c^3<584$ nên $c\le 8$, suy ra $(k+1)^2\le 4$, do đó $k=1$. Khi đó $a=2$, $b=4$, $c=8$; thử lại $2^3+4^3+8^3=584$, thỏa mãn.

Vậy $T=u_{a+b}+v_c=u_6+v_8=6+512=518$. Chọn B.

Câu 12. Tam giác ABC có $\cos\widehat{ABC}=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2a\cdot a}=-\frac{1}{2}$ nên $\widehat{ABC}=120^\circ$,

$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 120^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Đường thẳng CC' cắt $\left(A'BC\right)$ tại C và M là trung điểm CC' nên

$d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C',\left(A'BC\right)\right)$.

AC' cắt $A'C$ tại trung điểm của mỗi đường nên $d\left(C',\left(A'BC\right)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)$. Suy ra

$d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Kẻ $AK\perp BC$ tại K, $AH\perp A'K$ tại H. Khi đó $BC\perp\left(AA'K\right)$ nên $AH\perp\left(A'BC\right)$, $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AH$.

$AK = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Đặt $AA' = h$, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{h^2}$ hay $\dfrac{7}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{h^2}$, suy ra $h = a$.

Vậy $V = AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Chọn A.

Câu 13. Cỡ mẫu $n = 25$.

$\dfrac{n}{4} = 6,25$ nên Q_1 thuộc nhóm $[10;12)$: $Q_1 = 10 + \dfrac{6,25-4}{6} \cdot 2 = \dfrac{43}{4}$.

$\dfrac{3n}{4} = 18,75$ nên Q_3 thuộc nhóm $[14;16)$: $Q_3 = 14 + \dfrac{18,75-18}{4} \cdot 2 = \dfrac{115}{8}$.

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \dfrac{115}{8} - \dfrac{86}{8} = \dfrac{29}{8}$. Chọn mẫu số dương, ta có $a = 29$, $b = 8$, suy ra $P = a + b = 37$.
Chọn C.

Câu 14. $e^{x^2-5x+6} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$. Vậy $S = 2^2 + 3^2 = 13$. Chọn A.

Câu 15. Do $F(x), G(x), H(x)$ đều là nguyên hàm của $f(x)$ nên

$\int\limits_1^4 f(t)\mathrm{d}t = F(4) - F(1) = G(4) - G(1) = H(4) - H(1)$.

Cộng lại: $3\int\limits_1^4 f(t)\mathrm{d}t = \big[F(4) + G(4) + H(4)\big] - \big[F(1) + G(1) + H(1)\big] = 4 - 1 = 3$, suy ra $\int\limits_1^4 f(t)\mathrm{d}t = 1$.
Chọn C.

Câu 16. Với $a > 0$: $I = \int\limits_{-1}^{0} (-x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^a x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2+1}{2}$. Chọn C.

Câu 17. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{3-x} \ln 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

$f(0) = 9$, $f(3) = 9$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2}$. Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 9$, $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 4\sqrt{2}$.

Tổng bằng $9 + 4\sqrt{2} = 9 + 2\sqrt{8}$ nên $m = 9$, $n = 8$, $P = \dfrac{9}{8+2} = \dfrac{9}{10}$. Chọn D.

Câu 18. Tập xác định $D = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(2x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 0$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

Khi $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x\sqrt{x^2-1}}=2$ và

$y-2x=\dfrac{2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-3x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}-3x+1}{\sqrt{x^2-1}}\to-3$, nên $y=2x-3$ là tiệm cận xiên.

Khi $x\to-\infty$: $\sqrt{x^2-1}=-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$, tương tự ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(y+2x)=3$, nên $y=-2x+3$ là tiệm cận xiên.

Vậy đồ thị có 3 đường tiệm cận. Chọn B.

Câu 19. $\overrightarrow{OM}+2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)+3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$.

Suy ra $M\left(\dfrac{4-8}{4};\dfrac{4+4}{4};\dfrac{2+8}{4}\right)$ hay $M\left(-1;2;\dfrac{5}{2}\right)$. Chọn C.

Câu 20. Đồ thị cắt Ox tại $A(1;0)$, cắt Oy tại $B(0;-1)$. Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}$. Chọn A.

Câu 21. Gọi q là công bội. $u_1-4u_2+6u_3=3-12q+18q^2=18\left(q-\dfrac{1}{3}\right)^2+1\ge1$, dấu bằng khi $q=\dfrac{1}{3}$.

Khi đó $u_{20}=u_1q^{19}=3\cdot\dfrac{1}{3^{19}}=\dfrac{1}{3^{18}}=\dfrac{1}{387420489}$. Chọn B.

Câu 22. Sắp 21 số được chọn theo thứ tự tăng dần $x_1<x_2<\ldots<x_{21}$. Theo điều kiện, hàng 1 là x_1, hàng 2 là x_2,x_3, hàng 3 là x_4,x_5,x_6, …, hàng 6 là $x_{16},\ldots,x_{21}$, xếp tăng dần từ trái sang phải. Mỗi bộ 21 số cho đúng một cách xếp.

Các ô A,B,C,D,E,F chứa số lớn nhất của mỗi hàng: $A=x_1$, $B=x_3$, $C=x_6$, $D=x_{10}$, $E=x_{15}$, $F=x_{21}$. Gọi d là công sai, ta có $B=A+d$, …, $F=A+5d$.

Giữa E và F có 5 số nên $d-1\ge5$, tức $d\ge6$; giữa các ô liền trước có $1,2,3,4$ số nên điều kiện này đủ. Do $A+5d\le50$ nên $d\le9$ và A có $50-5d$ cách chọn.

Với mỗi A, d: chọn 1 số giữa A và B, 2 số giữa B và C, …, 5 số giữa E và F, mỗi khoảng có $d-1$ số, nên có $C_{d-1}^1C_{d-1}^2C_{d-1}^3C_{d-1}^4C_{d-1}^5$ cách.

$d=6$: $20\cdot5\cdot10\cdot10\cdot5\cdot1=50000$.

$d=7$: $15\cdot6\cdot15\cdot20\cdot15\cdot6=2430000$.

$d=8$: $10\cdot 7\cdot 21\cdot 35\cdot 35\cdot 21=37815750$.

$d=9$: $5\cdot 8\cdot 28\cdot 56\cdot 70\cdot 56=245862400$.

$T=286158150$, suy ra $\log T\approx 8,5$. Chọn D.

Câu 23. Xét trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ chứa $\dfrac{\pi}{4}$: $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ nên $F(x)=-\cot x-\tan x+C$.

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2+C=-2\Leftrightarrow C=0$. Vậy $F(x)=-\cot x-\tan x$. Chọn A.

Câu 24. Gọi $E(x;y;z)$ với $z<0$. Ta có $EA^2=9$, $EB^2=9$, $EC^2=12$.

$EA^2=EB^2\Leftrightarrow x^2=(x-4)^2\Leftrightarrow x=2$. $EC^2-EA^2=3\Leftrightarrow (y-3)^2-y^2=3\Leftrightarrow y=1$.

$z^2=9-x^2-y^2=4$, mà $z<0$ nên $z=-2$. Vậy $E(2;1;-2)$. Chọn D.

Câu 25. Số cách chọn 4 học sinh bất kì: $C_{12}^4=495$.

Số cách chọn 4 học sinh có đủ cả ba lớp: $C_5^2\cdot 4\cdot 3+5\cdot C_4^2\cdot 3+5\cdot 4\cdot C_3^2=120+90+60=270$.

Vậy số cách chọn thỏa mãn là $495-270=225$. Chọn B.

Câu 26. $\log_2\left(x^2-5x+4\right)\le 2\Leftrightarrow 0<x^2-5x+4\le 4$. Ta có $x^2-5x+4\le 4\Leftrightarrow 0\le x\le 5$ và $x^2-5x+4>0\Leftrightarrow x<1$ hoặc $x>4$.

Suy ra $x\in[0;1)\cup(4;5]$, có 2 nghiệm nguyên là $x=0$, $x=5$. Chọn C.

Câu 27. Điều kiện: $2x-x^2>0\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy $D=(0;2)$. Chọn C.

Câu 28. Lợi nhuận mỗi tháng (triệu đồng):
$L(x)=x\left(90-0,002x^2\right)-(200+30x)=-0,002x^3+60x-200$ với $0<x\le 150$.

$L'(x)=-0,006x^2+60$; $L'(x)=0\Leftrightarrow x=100$. $L'(x)>0$ trên $(0;100)$, $L'(x)<0$ trên $(100;150)$ nên $L(x)$ lớn nhất khi $x=100$. Chọn A.

Câu 29. Nếu không rò rỉ: $V(9)-V(0)=\displaystyle\int_0^9 k\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=18k=57000-30000$, suy ra $k=1500$.

Khi bị rò rỉ, tốc độ thay đổi thể tích là $1500\sqrt{t}-500$ (lít/giờ). Do đó
$V(16)=30000+\displaystyle\int_0^{16}\left(1500\sqrt{t}-500\right)\mathrm{d}t=30000+64000-8000=86000$ (lít). Chọn D.

Câu 30. Giá trị đại diện các nhóm: $2,85$; $3,15$; $3,45$; $3,75$; $4,05$.

$\overline{x}=\dfrac{3\cdot 2,85+6\cdot 3,15+5\cdot 3,45+4\cdot 3,75+2\cdot 4,05}{20}=\dfrac{67,8}{20}=3,39$.

$s^2=\dfrac{3\cdot 2,85^2+6\cdot 3,15^2+5\cdot 3,45^2+4\cdot 3,75^2+2\cdot 4,05^2}{20}-3,39^2=\dfrac{232,47}{20}-11,4921=0,1314\approx 0,13$.

Chọn B.

Câu 31. Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, suy ra $I\left(\dfrac{1-4}{3};\dfrac{2+10}{3};\dfrac{3-6}{3}\right)=(-1;4;-1)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ nên $P=3MI$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (Oxz), tức $M(-1;0;-1)$. Chọn D.

Câu 32. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2$, $x=0$.

$f'(0)=0$ nên $c=0$; $f(0)=1$ nên $d=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên $a>0$.

Tổng hai nghiệm của $f'(x)$: $-\dfrac{2b}{3a}=-2$ nên $b=3a>0$.

Vậy $a>0$, $b>0$, $c=0$, $d>0$: có 3 số dương. Chọn D.

<u>PHẦN II</u>. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

a) Sai. $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}-k\dfrac{t^2}{2}+4t+C$. Do P xuất phát từ gốc tọa độ nên $s(0)=0$, suy ra $C=0$ và $s(t)=\dfrac{t^3}{3}-k\dfrac{t^2}{2}+4t$.

b) Đúng. Với $k=5$: $v(t)=(t-1)(t-4)$, $v(t)\ge 0$ trên $[0;1]$ và $v(t)\le 0$ trên $[1;2]$. Với $s(t)=\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{5t^2}{2}+4t$ có $s(0)=0$, $s(1)=\dfrac{11}{6}$, $s(2)=\dfrac{2}{3}$.

Quãng đường đi được: $\int\limits_0^2|v(t)|\mathrm{d}t=[s(1)-s(0)]+[s(1)-s(2)]=\dfrac{11}{6}+\dfrac{7}{6}=3$.

c) Đúng. Với $k=0$: $s(1)=\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{13}{3}$.

d) Sai. Với $k=3$: $v(t)=t^2-3t+4=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ với mọi t nên P không đổi hướng chuyển động.

Câu 2. Ta có $x(t)=2t$, $x^2+y^2=81$ nên $y(t)=\sqrt{81-4t^2}$ với $0<t<4{,}5$. Gọi $\alpha=\widehat{OBA}$, ta có $x=9\cos\alpha$, $y=9\sin\alpha$.

d) Đúng. $y(t)=\sqrt{81-4t^2}$ (mét).

a) Sai. $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{81}{4}\sin 2\alpha$. Khi thang trượt, α giảm từ 90° về 0° nên diện tích tăng khi $45^\circ<\alpha<90^\circ$ và giảm khi $0^\circ<\alpha<45^\circ$. Diện tích bắt đầu giảm khi $\alpha=45^\circ$.

Đạo hàm hai vế của $x(t)=9\cos\alpha(t)$ ta được $x'(t)=-9\sin\alpha\cdot\alpha'(t)$, mà $x'(t)=2$ nên $\alpha'(t)=-\dfrac{2}{9\sin\alpha}$.

Tại $\alpha=45^\circ$: $\alpha'=-\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$, tức góc α giảm với tốc độ $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$ rad/s, không phải $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$ rad/s.

b) Sai. Khi đầu trên cách mặt đất 3 m thì $\sin\alpha=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tức $\alpha<45^\circ$. Do đó trước thời điểm này góc α đã giảm qua 45° và diện tích tam giác OAB đã giảm.

c) Đúng. $y=3\Leftrightarrow\sqrt{81-4t^2}=3\Leftrightarrow t=3\sqrt{2}$. $y'(t)=\dfrac{-4t}{\sqrt{81-4t^2}}$ nên $y'\left(3\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}$, tức tốc độ trượt xuống của đầu trên là $4\sqrt{2}$ m/s.

Câu 3. Ta có $\vec{a}^2=9$, $\vec{b}^2=16$, $\vec{c}^2=36$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos60^\circ=6$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot6\cdot\cos120^\circ=-12$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$.

c) Đúng. $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=6-12=-6$.

d) Đúng. $\overrightarrow{SI}=\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{SG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ nên $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{12}\vec{a}-\dfrac{11}{12}\vec{b}-\dfrac{7}{12}\vec{c}$.

b) Sai. $GI^2=\overrightarrow{GI}^2=\dfrac{1}{144}\left(\vec{a}-11\vec{b}-7\vec{c}\right)^2=\dfrac{1}{144}\left(\vec{a}^2+121\vec{b}^2+49\vec{c}^2-22\vec{a}\cdot\vec{b}+154\vec{b}\cdot\vec{c}-14\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$

$=\dfrac{9+1936+1764-132-1848}{144}=\dfrac{1729}{144}$.

Suy ra $GI=\dfrac{\sqrt{1729}}{12}\neq\dfrac{\sqrt{511}}{4}$.

a) Sai. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB, khi đó $IM\geq IH$ nên giá trị nhỏ nhất của IM là IH.

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SA}=\dfrac{-2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

$AI^2 = \frac{1}{9}\left(4\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 8\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a}\right) = \frac{36+64+36+48-48}{9} = \frac{136}{9}$.

$AB^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 13$; $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}\right) = \frac{18-32+12}{3} = -\frac{2}{3}$.

$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{AB} = \frac{2}{3\sqrt{13}}$, suy ra $IH^2 = AI^2 - AH^2 = \frac{136}{9} - \frac{4}{117} = \frac{196}{13}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của IM là $IH = \frac{14}{\sqrt{13}} \approx 3{,}88 \neq 4{,}86$.

Câu 4. Số cách xếp 10 học sinh vào 10 ghế: $n(\Omega) = 10!$.

Do $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ là cấp số cộng với $d > 0$ nên $u_i + u_j = u_k + u_l \Leftrightarrow i + j = k + l$. Nếu A xảy ra thì tổng mỗi cặp đối diện bằng $\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}}{5} = u_1 + u_{10}$, nên các cặp đối diện phải là (u_1, u_{10}), (u_2, u_9), (u_3, u_8), (u_4, u_7), (u_5, u_6).

c) Đúng. Theo lập luận trên, u_2 phải ngồi đối diện u_9.

d) Đúng. Xếp 5 cặp vào 5 vị trí có 5! cách, mỗi cặp có 2 cách đổi chỗ, nên $n(A) = 5! \cdot 2^5 = 3840$ và $P(A) = \frac{3840}{10!} = \frac{1}{945}$.

a) Sai. Cặp (u_1, u_{10}) ngồi ở vị trí số 1 hoặc số 5: 2 cách, đổi chỗ trong cặp: 2 cách, 4 cặp còn lại: $4! \cdot 2^4 = 384$ cách. Xác suất bằng $\frac{2 \cdot 2 \cdot 384}{10!} = \frac{1536}{10!} = \frac{2}{4725} \neq \frac{2}{945}$.

b) Đúng. Số cách xếp thuộc A mà u_1, u_2 ngồi kề nhau trên cùng một dãy: chọn hai vị trí kề nhau có thứ tự cho cặp (u_1, u_{10}) và (u_2, u_9): $4 \cdot 2 = 8$ cách; u_1, u_2 cùng dãy 1 hoặc cùng dãy 2: 2 cách; 3 cặp còn lại: $3! \cdot 2^3 = 48$ cách. Có $8 \cdot 2 \cdot 48 = 768$ cách.

Số cách thuộc A mà u_1, u_2 không ngồi kề nhau trên cùng một dãy: $3840 - 768 = 3072$.

Hiệu tổng số thứ tự của dãy 1 và dãy 2 có dạng $(\pm 9 \pm 7 \pm 5 \pm 3 \pm 1)d \neq 0$ (tổng của năm số lẻ là số lẻ), và đổi chỗ toàn bộ hai dãy cho nhau vẫn giữ các điều kiện trên nhưng đổi dấu hiệu này. Do đó đúng một nửa số cách có tổng dãy 1 lớn hơn, tức 1536 cách.

Xác suất bằng $\frac{1536}{10!} = \frac{2}{4725}$.

Câu 5. b) Đúng. $f(0) = a = 80$; $f(9) = 80 - b\log 10 = 80 - b = 63$ nên $b = 17$.

a) Sai. $f(t)=80-17\log(t+1)$, $f'(t)=-\dfrac{17}{(t+1)\ln 10}$. Tốc độ suy giảm tại $t=3$ là $\dfrac{17}{4\ln 10}\approx 1,85$ (điểm/tháng), khác $\dfrac{17}{4}$.

c) Đúng. $f(12)=80-17\log 13\approx 61,1$ (điểm).

d) Sai. $d=\dfrac{17}{\ln 10}$, $g'(u)=-\dfrac{d}{(u+1)\ln 10}=-\dfrac{17}{(u+1)\ln^2 10}$. Tại $t=12$ thì $u=3$, tốc độ suy giảm là $\dfrac{17}{4\ln^2 10}\approx 0,80$ (điểm/tháng), khác $1,8$.

Câu 6. Gọi n là số quả táo của cây thứ nhất, khi đó có $\dfrac{2n}{21}$ quả hỏng và $\dfrac{19n}{21}$ quả tốt.

a) Sai. Tỉ lệ số quả hỏng và số quả không bị hỏng là $\dfrac{2}{19}$.

b) Đúng. Gọi m là số quả tốt của cây thứ nhất. Ta có
$\dfrac{C_m^2}{C_{100}^2}=\dfrac{19}{33}\Leftrightarrow m(m-1)=\dfrac{19\cdot 100\cdot 99}{33}=5700\Leftrightarrow m=76$.

d) Sai. $n=\dfrac{21\cdot 76}{19}=84$ quả.

c) Đúng. Cây thứ nhất có 84 quả, trong đó 8 quả hỏng. Cây thứ hai có $100-76=24$ quả tốt và 7 quả hỏng, tức 31 quả. Thùng B có 115 quả, trong đó 15 quả hỏng.

Xác suất cần tìm: $\dfrac{C_{15}^2}{C_{115}^2}=\dfrac{105}{6555}=\dfrac{7}{437}$.

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Do $AD\perp DC$, $AB\perp BC$ nên DC, BC tiếp xúc với cung tròn tại D, B. Suy ra $PD=PM$, $QB=QM$, AP là phân giác $\widehat{DAM}$, AQ là phân giác $\widehat{MAB}$, nên $\widehat{PAQ}=45^\circ$ và $PQ=DP+BQ$.

Đặt $\widehat{DAP}=\varphi$ $\left(0<\varphi<45^\circ\right)$, $x=\tan\varphi\in(0;1)$. Ta có $DP=2\tan\varphi=2x$,

$BQ=2\tan\left(45^\circ-\varphi\right)=\dfrac{2(1-x)}{1+x}$.

$PQ=2\left(x+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=2\left[(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-2\right]\geq 2\left(2\sqrt{2}-2\right)$, dấu bằng khi $(1+x)^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$.

Khi đó $DP=2\sqrt{2}-2\approx 0,83$ (m).

Đáp số: $0,83$.

Câu 2. Miền nghiệm là tứ giác $OMNK$ với $O(0;0)$, $M\left(\frac{1}{2};0\right)$, $N\left(\frac{7}{4};\frac{5}{6}\right)$ (giao của $2x+3y=6$ và $2x-3y=1$), $K(0;2)$.

Gọi $E(3;0)$ là giao của $2x+3y=6$ với Ox.

$S_{OMNK}=S_{OEK}-S_{MEN}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{6}=3-\frac{25}{24}=\frac{47}{24}\approx 1,96$.

Đáp số: $1,96$.

Câu 3. Gia tốc $a(t)=h''(t)=-96\pi^2\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$. $a(t)=0\Leftrightarrow 4\pi t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow t=\frac{5}{24}+\frac{k}{4}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Do $t\geq 0$ nên $k\geq 0$; gia tốc bằng 0 lần thứ hai ứng với $k=1$, tức $t=\frac{11}{24}$.

Khi t tăng từ 0 đến $\frac{11}{24}$, $4\pi t-\frac{\pi}{3}$ tăng từ $-\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{3\pi}{2}$: h tăng từ $h(0)=53$ đến $h\left(\frac{1}{12}\right)=56$, giảm đến $h\left(\frac{1}{3}\right)=44$, rồi tăng đến $h\left(\frac{11}{24}\right)=50$.

Quãng đường: $3+12+6=21$ (cm).

Đáp số: 21.

Câu 4. $f'(x)=3x^2+2ax+b$. Theo giả thiết $f(1)=19$, $f(3)=3$ và $f'(3)=0$:

$$\begin{cases}a+b+c=18\\9a+3b+c=-24\\6a+b=-27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-9\\c=30\end{cases}.$$

Thử lại: $f'(x)=3(x+1)(x-3)$ nên trên $[0;9]$ hàm số giảm trên $[0;3]$, tăng trên $[3;9]$, thỏa mãn.

$f(6)=216-108-54+30=84$ (tỷ đồng).

Đáp số: 84.

Câu 5. Gọi O là tâm đáy. $OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$.

$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$, $N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$, $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$,

$MN=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{8}+\frac{3a^2}{8}}=a.$

Mặt phẳng (SBD) là mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến $\vec{i}=(1;0;0)$.

$\sin\left(MN,(SBD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{i}\right|}{MN}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên góc cần tìm bằng 45°.

Đáp số: 45.

Câu 6. Ta có $C(3;3;0)$, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=(0;0;-3)$ nên $A'(0;0;-3)$, $B'(3;0;-3)$, $C'(3;3;-3)$. Gọi $M(x;y;0)$.

$MB'^2-MC'^2+MD'^2=\left[(x-3)^2+y^2+9\right]-\left[(x-3)^2+(y-3)^2+9\right]+\left[x^2+(y-3)^2+9\right]=x^2+y^2+9=MA'^2.$

Suy ra $P=MA'^2-2MA'+2026=\left(MA'-1\right)^2+2025$.

Do $MA'\ge d\left(A',(ABCD)\right)=AA'=3$ nên $MA'-1\ge 2$, suy ra $P\ge 2029$, dấu bằng khi $M\equiv A$.

Đáp số: 2029.

Câu 7. Chọn hệ trục Oxy với O là chân đường cao từ A, Ox nằm ngang, khi đó $A(0;3)$, $B(10;0)$.

(P_1): $y=mx^2+3$; (P_2): $y=n(x-10)^2$. Tại $x=4$ hai parabol có cùng tung độ và cùng hệ số góc tiếp tuyến: $\begin{cases}16m+3=36n\\8m=-12n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\frac{3}{40}\\n=\frac{1}{20}\end{cases}$.

Diện tích mặt cắt: $S=\int_0^4\left(3-\frac{3x^2}{40}\right)\mathrm{d}x+\int_4^{10}\frac{(x-10)^2}{20}\mathrm{d}x=\frac{52}{5}+\frac{18}{5}=14\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Thể tích đất: $V=14\cdot 5=70\ \left(\mathrm{m}^3\right)$.

Đáp số: 70.

Câu 8. Chọn ngẫu nhiên 4 số từ X có $C_{12}^4=495$ cách, rồi chọn ngẫu nhiên một trong bốn số đó để đặt vào vòng tròn lớn có 4 cách, ba số còn lại đặt vào ba vòng tròn nhỏ. Do đó $n(\Omega)=1980$, các kết quả đồng khả năng và $1980P$ bằng số kết quả thuận lợi.

Gọi số ở vòng tròn lớn là c, ba số ở vòng tròn nhỏ là $x<y<z$. Điều kiện: $y+z<c<x+y+z$ và $c\le 12$. Với mỗi bộ $(x;y;z)$, số giá trị của c là $\min\{x-1;12-y-z\}$ (cần $y+z\le 11$).

$x=2$: các bộ $(y;z)$ với $y+z\le 11$ là $(3;4)$, $(3;5)$, $(3;6)$, $(3;7)$, $(3;8)$, $(4;5)$, $(4;6)$, $(4;7)$, $(5;6)$, mỗi bộ có 1 giá trị c: 9 kết quả.

$x=3$: $(4;5)$ có 2, $(4;6)$ có 2, $(4;7)$ có 1, $(5;6)$ có 1: 6 kết quả.

$x=4$: $(5;6)$ có 1 kết quả. $x=1$ hoặc $x\ge 5$: không có.

Vậy $1980P=9+6+1=16$.

Đáp số: 16.

Câu 9. Gọi chân tháp là khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB=5$, $A'B'=2$, $AA'=3$. Mặt chéo $ACC'A'$ là hình thang cân với $AC=5\sqrt{2}$, $A'C'=2\sqrt{2}$.

Chiều cao: $h=\sqrt{AA'^2-\left(\dfrac{AC-A'C'}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$V=\dfrac{h}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(25+4+10)=\dfrac{39\sqrt{2}}{2}\ \left(\text{m}^3\right)$.

Số tiền: $1,5\cdot\dfrac{39\sqrt{2}}{2}=\dfrac{117\sqrt{2}}{4}\approx 41,4$ (triệu đồng).

Đáp số: 41,4.

Câu 10. Các đỉnh của (C_2) chia mỗi cạnh của (C_1) theo tỉ lệ $1:3$ nên cạnh của (C_2) là $\sqrt{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, suy ra $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$.

Dãy (S_n) là cấp số nhân lùi vô hạn với $S_1=a^2$, $q=\dfrac{5}{8}$, nên $T=\dfrac{a^2}{1-\dfrac{5}{8}}=\dfrac{8a^2}{3}=\dfrac{32}{3}$, suy ra $a^2=4$, $a=2$.

Đáp số: 2.

Câu 11. Trong không khí: $T(t)=30+770e^{-kt}$, $T(10)=415\Leftrightarrow e^{-10k}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln 2}{10}$. Hệ số làm mát của dung dịch là $3k$.

Gọi $x\ \left(^\circ\text{C}\right)$ là nhiệt độ khi kết thúc giai đoạn 1, $50\le x\le 800$.

Thời gian giai đoạn 1: $x=30+770e^{-kt_1}\Leftrightarrow t_1=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{770}{x-30}$.

Thời gian giai đoạn 2: $50=10+(x-10)e^{-3kt_2} \Leftrightarrow t_2=\dfrac{1}{3k}\ln\dfrac{x-10}{40}$.

Chi phí (nghìn đồng): $C(x)=20t_1+70t_2=\dfrac{1}{k}\left[20\ln\dfrac{770}{x-30}+\dfrac{70}{3}\ln\dfrac{x-10}{40}\right]$.

$C'(x)=\dfrac{1}{k}\left[-\dfrac{20}{x-30}+\dfrac{70}{3(x-10)}\right]=\dfrac{10(x-150)}{3k(x-30)(x-10)}$; $C'(x)<0$ trên $[50;150)$, $C'(x)>0$ trên $(150;800]$.

Chi phí thấp nhất: $C(150)=\dfrac{10}{\ln 2}\left[20\ln\dfrac{77}{12}+\dfrac{70}{3}\ln\dfrac{7}{2}\right]\approx 958$ (nghìn đồng).

Đáp số: 958.

Câu 12. Xếp 4 quả đỏ và 5 vách ngăn thành một hàng, số quả đỏ trong 6 đoạn lần lượt là số quả đỏ trong 6 hộp (hai vách đứng liền nhau ứng với một hộp không có quả đỏ). Chọn 5 vị trí đặt vách ngăn trong 9 vị trí có $C_9^5=126$ cách. Tương tự, số cách phân bố 7 quả xanh là $C_{12}^5=792$. Do đó $n(S)=126\cdot 792=99792$.

Không hộp nào chứa từ 2 quả đỏ trở lên nên 4 quả đỏ nằm ở 4 hộp khác nhau: $C_6^4=15$ cách.

Khi đó 4 hộp có quả đỏ chứa thêm từ 0 đến 2 quả xanh; 2 hộp không có quả đỏ chứa từ 1 đến 3 quả xanh. Bớt đi 1 quả xanh ở mỗi hộp không có quả đỏ, ta cần đếm số bộ 6 số thuộc $\{0;1;2\}$ có tổng bằng 5.

Gọi k là số các số bằng 2, j là số các số bằng 1, $2k+j=5$: $k=0$, $j=5$ có $C_6^5=6$ bộ; $k=1$, $j=3$ có $6\cdot C_5^3=60$ bộ; $k=2$, $j=1$ có $C_6^2\cdot 4=60$ bộ. Tổng 126 bộ.

Số kết quả thuận lợi: $15\cdot 126=1890$, nên $P=\dfrac{1890}{99792}=\dfrac{5}{264}$ và $1584P=30$.

Đáp số: 30.

---------- HẾT ----------