Chương 2

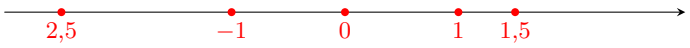
BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 1 BẤT ĐẲNG THỨC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Bất đẳng thức

Khi biểu diễn số thực trên trục số, điểm biểu đến số bé hơn nằm trước điểm biểu diễn số lớn hơn. Chẳng hạn, $-2{,}5 < -1 < 1{,}5$.



- Số a lớn hơn hoặc bằng số b, tức là $a > b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \geq b$.
- Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b, tức là $a < b$ hoặc $a = b$, kí hiệu là $a \leq b$.

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$, $a \geq b$, $a <\leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

2 Tính chất bất đẳng thức

2.1. Tính chất bắc cầu

Tính chất. Cho ba số a, b, c. Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$ (tính chất bắc cầu).

Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<$, $\geq$, $\leq$.

2.2. Tính chất liên hệ thứ tự và phép cộng

- Hai bất đẳng thức $a > b$ và $m > n$ được gọi là hai bất đẳng thức *cùng chiều*.
- Hai bất đẳng thức $a > b$ và $m < n$ được gọi là hai bất đẳng thức *ngược chiều*.

Ta thấy: Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức mới *cùng chiều* với bất đẳng thức đã cho.
Một cách tổng quát, ta có:
Tính chất. Cho ba số a, b, c. Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<$, $\geq$, $\leq$.

2.3. Tính chất liên hệ thứ tự và phép nhân

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một ***số dương*** thì được một bất đẳng thức mới ***cùng chiều*** với bất đẳng thức đã cho.
Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một ***số âm*** thì được một bất đẳng thức mới ***ngược chiều*** với bất đẳng thức đã cho.
Một cách tổng quát, ta có:

thuvientoanhoc.com

Tính chất. Cho ba số a, b, c và $a > b$.

- Nếu $c > 0$ thì $a \cdot c > b \cdot c$;
- Nếu $c < 0$ thì $a \cdot c < b \cdot c$.

Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<$, $\geq$, $\leq$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Viết bất đẳng thức và một số yếu tố liên quan

Ví dụ 1. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) x nhỏ hơn 5. b) a không lớn hơn b. c) m không nhỏ hơn n.

Lời giải.

a) $x < 5$. b) $a \leq b$ c) $m \geq n$.

Ví dụ 2.
Biển báo giao thông R.306 (hình bên) báo tốc độ tối thiểu cho các xe cơ giới. Biển có hiệu lực bắt buộc các loại xe cơ giới vận hành với tốc độ không nhỏ hơn trị số ghi trên biển trong điều kiện giao thông thuận lợi và an toàn. Nếu một ô tô đi trên đường đó với tốc độ a (km/h) thì a phải thoả mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?



(A) $a < 60$. (B) $a > 60$. (C) $a \geq 60$. (D) $a \leq 60$.

Lời giải.
Vì a không nhỏ hơn 60 nên ta có $a \geq 60$.
Chọn đáp án (C)

Ví dụ 3. Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

a) Tuần tới, nhiệt độ t (°C) tại Tokyo là trên -5°C.

b) Nhiệt độ t (°C) bảo quản của một loại sữa là dưới 4°C.

c) Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi x của một người phải ít nhất là 16 tuổi.

Lời giải.

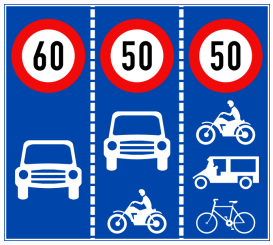
a) $t > -5$; b) $t < 4$; c) $x \geq 16$.

Ví dụ 4. Hãy chỉ ra một bất đẳng thức diễn tả số a lớn hơn 3. Vế trái, vế phải của bất đẳng thức đó là gì?

Lời giải.
Để diễn tả số a lớn hơn 3, ta có bất đẳng thức $a > 3$. Khi đó a là vế trái, 3 là vế phải của bất đẳng thức.

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 5.
Khi đi đường, chúng ta có thể thấy các biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe cơ giới được phép đi (hình bên). Viết các bất đẳng thức để mô tả tốc độ cho phép trong tình huống mở đầu biển báo:



a) Ô tô ở làn giữa;

b) Xe máy ở làn bên phải.

Lời giải.
Với x là tốc độ cho phép của ô tô (xe máy), ta có:

a) Ô tô ở làn giữa: $x \leq 50$.

b) Xe máy ở làn bên phải: $x \leq 50$.

□

Ví dụ 6. Gọi a là số tuổi của bạn Na, b là số tuổi của bạn Toàn, biết rằng bạn Toàn lớn tuổi hơn bạn Na. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau ba năm nữa.

Lời giải.
Bất đẳng thức biểu diễn số tuổi của bạn Toàn và bạn Na là

$$b > a.$$

Cộng 3 vào hai vế của bất đẳng thức $b > a$, ta được bất đẳng thức biểu diễn số tuổi sau ba năm của bạn Toàn và bạn Na

$$b + 3 > a + 3.$$

□

Ví dụ 7. Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

a) $-2 > -7$;

b) $a^2 + 1 > 0$.

Lời giải.

a) Vế trái là -2 , vế phải là -7.

b) Vế trái là $a^2 + 1$, vế phải là 0.

□

Ví dụ 8. Trong các cặp bất đẳng thức sau đây, cặp bất đẳng thức nào cùng chiều?

a) $3 < 4$ và $11 < 23$;

b) $\sqrt{50} > 7$ và $6 > \sqrt{34}$.

c) $\sqrt{17} > \sqrt{13}$ và $\sqrt{82} < \sqrt{97}$.

Lời giải.
Cặp bất đẳng thức ở các câu a, b là cặp bất đẳng thức cùng chiều. Cặp bất đẳng thức ở câu c là cặp bất đẳng thức ngược chiều. □

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 9. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{2\,024}{2\,023} > \dfrac{2021}{2022}$;

b) $\dfrac{2\,024}{1000} > 1{,}9$;

c) $-\dfrac{2022}{2\,023} > -1{,}1$.

Lời giải.

thuvientoanhoc.com

a) Ta có $\dfrac{2\,024}{2\,023}=1+\dfrac{1}{2\,023}>1$ và $\dfrac{2021}{2022}=1-\dfrac{1}{2022}<1$ nên $\dfrac{2\,024}{2\,023}>\dfrac{2021}{2022}$.

b) Ta có $\dfrac{2\,024}{1000}=2+\dfrac{24}{1000}>2$ và $1{,}9=2-0{,}1<2$ nên $\dfrac{2\,024}{1000}>1{,}9$.

c) Ta có $\dfrac{2022}{2\,024}=1-\dfrac{2}{2\,024}<1$ và $1{,}1=1+0{,}1>1$ nên $\dfrac{2022}{2\,024}<1{,}1$. Từ đây suy ra $-\dfrac{2022}{2\,023}>-1{,}1$.

□

Ví dụ 10. Chứng minh rằng

a) $\sqrt{11}-\sqrt{3}>\sqrt{10}-\sqrt{3}$; b) $2023+\left(-2^{29}\right)>2022+\left(-2^{29}\right)$; c) $\dfrac{2024}{2023}>\dfrac{2025}{2024}$.

Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{11}>\sqrt{10}$. Cộng hai vế của bất đẳng thức với $-\sqrt{3}$, ta được:

$$\sqrt{11}-\sqrt{3}>\sqrt{10}-\sqrt{3}.$$

Vậy $\sqrt{11}-\sqrt{3}>\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

b) Ta có $2023>2022$. Cộng hai vế của bất đẳng thức với -2^{29}, ta được:

$$2023+\left(-2^{29}\right)>2022+\left(-2^{29}\right).$$

Vậy $2023+\left(-2^{29}\right)>2022+\left(-2^{29}\right)$.

c) Ta có $\dfrac{1}{2023}>\dfrac{1}{2024}$. Cộng hai vế của bất đẳng thức với 1, ta được:

$$\frac{1}{2023}+1>\frac{1}{2024}+1 \text{ hay } \frac{2024}{2023}>\frac{2025}{2024}.$$

Vậy $\dfrac{2024}{2023}>\dfrac{2025}{2024}$.

□

Ví dụ 11. Cho hai số a và b thoả mãn $a<b$. Chứng tỏ $a+3<b+5$.

Lời giải.

Cộng 3 vào hai vế của bất đẳng thức $a<b$, ta được:

$$a+3<b+3. \tag{1}$$

Cộng b vào hai vế của bất đẳng thức $3<5$, ta được:

$$3+b<5+b \text{ hay } b+3<b+5. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a+3<b+5$ (tính chất bắc cầu). □

Ví dụ 12. Cho hai số m và n thoả mãn $m>n$. Chứng tỏ $m+5>n+4$.

Lời giải.

Cộng 4 vào hai vế của bất đẳng thức $m>n$, ta được:

$$m+4>n+4. \tag{1}$$

Cộng m vào hai vế của bất đẳng thức $5>4$, ta được:

$$m+5>m+4. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $m+5>n+4$ (tính chất bắc cầu). □

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 13. Chứng minh:

a) $(a+1)^2 \le 2a+2$ với $a^2 \le 1$. b) $(a-1)^2 \ge 4-2a$ với $a^2 \ge 3$. c) $(a-1)^2 \ge a^2-1$ với $a \le 1$.

Lời giải.

a) Do $a^2 \le 1$ nên $a^2+2a+1 \le 1+2a+1$, suy ra $(a+1)^2 \le 2a+2$. Vậy $(a+1)^2 \le 2a+2$.

b) Do $a^2 \ge 3$ nên $a^2-(2a-1) \ge 3-(2a-1)$, suy ra $a^2-2a+1 \ge 4-2a$. Vậy $(a-1)^2 \ge 4-2a$ với $a^2 \ge 3$.

c) Vì $a \le 1$ nên $-2a \ge -2$, suy ra $-2a+a^2+1 \ge -2+a^2+1$. Do đó $(a-1)^2 \ge a^2-1$.

□

Ví dụ 14. Cho $a > b$ và $c > d$. Chứng minh $a+c > b+d$.

Lời giải.

Do $a > b$ nên $a+c > b+c$.
Lại có $c > d$ nên $b+c > b+d$.
Vậy $a+c > b+d$. □

Ví dụ 15. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a > b$ và $c > d$. Chứng minh: $ac > bd$.

Lời giải.

Do $a > b$ nên $ac > bc$ (vì $c > 0$).
Lại có $c > d$ nên $bc > bd$ (vì $b > 0$).
Vậy $ac > bd$. □

Ví dụ 16. Cho $a < b$. Chứng minh

a) $a+b > 2a$; b) $5a-b < 4a$; c) $a-1 < b+6$.

Lời giải.

Để chứng minh $A > B$ ta có thể chứng minh $A-B > 0$.

Do $a < b$ nên $b-a > 0$ và $a-b < 0$.

a) Xét hiệu $a+b-2a = b-a > 0$. Vậy $a+b > 2a$.

b) Xét hiệu $(5a-b)-4a = a-b < 0$. Vậy $5a-b < 4a$.

c) Xét hiệu $(b+6)-(a-1) = b-a+7$.
Do $b-a > 0$ và $7 > 0$ nên $(b-a)+7 > 0$.
Vậy $(b+6)-(a-1) > 0$ hay $a-1 < b+6$.

□

Ví dụ 17. Cho $a \ge 2b$. Chứng minh:

a) $2a-1 \ge a+2b-1$; b) $4b+4a \le 5a+2b$.

Lời giải.

Để chứng minh $A > B$ ta có thể chứng minh $A-B > 0$.

Do $a \ge 2b$ nên $a-2b \ge 0$.

a) Xét hiệu $(2a-1)-(a+2b-1) = a-2b \ge 0$. Vậy $2a-1 \ge a+2b-1$.

b) Xét hiệu $(5a+2b)-(4b+4a) = a-2b \ge 0$. Vậy $5a+2b \ge 4b+4a$ hay $4b+4a \le 5a+2b$.

□

Ví dụ 18. Cho $a \geq b$. Chứng minh $5b - 2 \leq 5a - 2$.

Lời giải.
Vì $a \geq b$ nên $5a \geq 5b$.
Do đó $5a - 2 \geq 5b - 2$ hay $5b - 2 \leq 5a - 2$. Vậy $5b - 2 \leq 5a - 2$. □

Ví dụ 19. Cho $a < b$. Chứng minh

a) $3a + 19 > -3b + 19$; b) $-2a - 8 > -2b - 8$; c) $2a + 1 < 2b + 1$.

Lời giải.

a) Do $a < b$ nên $-3a > -3b$, suy ra $-3a + 19 > -3b + 19$.

b) Do $a < b$ nên $-2a > -2b$, suy ra $-2a - 8 > -2b - 8$.

c) Do $a < b$ nên $2a < 2b$, suy ra $2a + 1 < 2b + 1$.

□

Ví dụ 20. Cho hai số a, b thoả mãn $a^2 > b^2 > 0$. Chứng tỏ $5a^2 > 4b^2$.

Lời giải.
Nhân hai vế của bất đẳng thức $a^2 > b^2$ với 5 , ta được:

$$5a^2 > 5b^2. \tag{3}$$

Vì $b^2 > 0$ nên khi nhân hai vế của bất đẳng thức $5 > 4$ với b^2, ta được:

$$5b^2 > 4b^2. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra $5a^2 > 4b^2$ (tính chất bắc cầu). □

Ví dụ 21. Cho hai số m, n thỏa mãn $0 < m^2 < n^2$. Chứng tỏ $\dfrac{3}{2}m^2 < 2n^2$.

Lời giải.
Nhân hai vế của bất đẳng thức $m^2 < n^2$ với $\dfrac{3}{2}$, ta được:

$$\frac{3}{2}m^2 < \frac{3}{2}n^2. \tag{5}$$

Vì $n^2 > 0$ nên khi nhân hai vế của bất đẳng thức $\dfrac{3}{2} > 2$ với b^2, ta được:

$$\frac{3}{2}n^2 < 2n^2. \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra $\dfrac{3}{2}m^2 < 2n^2$ (tính chất bắc cầu). □

Dạng 3. So sánh hai số

Ví dụ 22. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:

a) $2\,023 + (-19)$ và $2\,024 + (-19)$; b) $19 + 2\,023$ và $-31 + 2\,023$;

c) $\sqrt{2} + 2$ và 4; d) $-3 + 23^{50}$ và $-2 + 23^{50}$

Lời giải.

a) Vì $2\,023 < 2\,024$ nên

$$2\,023 + (-19) < 2\,024 + (-19) \quad \leftarrow \text{cộng vào hai vế với cùng một số } -19.$$

Vậy $2\,023 + (-19) < 2\,024 + (-19)$.

b) Vì $19 > -31$ nên

$$19 + 2\,023 > -31 + 2\,023 \quad \leftarrow \text{cộng vào hai vế với cùng một số } 2\,023.$$

Vậy $19 + 2\,023 > -31 + 2\,023$.

c) Vì $\sqrt{2} < 2$ nên

$$\sqrt{2} + 2 < 2 + 2 \quad \leftarrow \text{cộng vào hai vế với cùng một số } 2.$$

Vậy $\sqrt{2} + 2 < 4$.

d) Ta có $-3 < -2$ nên

$$-3 + 23^{50} < -2 + 23^{50} \quad \leftarrow \text{Cộng hai vế của bất đẳng thức với } 23^{50}.$$

Vậy $-3 + 23^{50} < -2 + 23^{50}$.

□

Ví dụ 23. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a) $a - 3$ và $b - 3$;

b) $-5a + 1$ và $-5b + 1$.

Lời giải.

a) Ta có $a < b$. Cộng thêm -3 vào hai vế ta được $a - 3 < b - 3$.

b) Ta có $a < b$. Nhân hai vế với -5 ta được $-5a > -5b$. Cộng thêm 1 vào hai vế, ta được $-5a + 1 > -5a + 1$.

□

Ví dụ 24. Cho số a bất kì, hãy so sánh:

a) a và $a - 4$;

b) $a - 7$ và $a + 5$.

Lời giải.

a) Ta có $0 > -4$. Cộng thêm a vào hai vế ta được $a > a - 4$.

b) Ta có $-7 < 5$. Cộng thêm a vào hai vế ta được $a - 7 < a + 5$.

□

Ví dụ 25. Thay $\boxed{?}$ trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp $(<, >)$ để được khẳng định đúng.

a) $3 \cdot (-7) \ \boxed{?} \ 3 \cdot (-5)$;

b) $(-3) \cdot (-7) \ \boxed{?} \ (-3) \cdot (-5)$.

Lời giải.

a) Vì $-7 < -5$ và $3 > 0$ nên $3 \cdot (-7) \ \boxed{<} \ 3 \cdot (-5)$. ← nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương.

b) Vì $-7 < -5$ và $-3 < 0$ nên $(-3) \cdot (-7) \ \boxed{>} \ (-3) \cdot (-5)$. ← nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số âm.

□

Ví dụ 26. Thay $\boxed{?}$ trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp $(<, >)$ để được khẳng định đúng.

a) $13 \cdot (-10{,}5) \boxed{?} 13 \cdot 11{,}2$;

b) $(-13) \cdot (-10{,}5) \boxed{?} (-13) \cdot 11{,}2$.

Lời giải.

a) Vì $-10{,}5 < 11{,}2$ và $13 > 0$ nên $13 \cdot (-10{,}5) \boxed{<} 13 \cdot 11{,}2$. ← nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương.

b) Vì $-10{,}5 < 11{,}2$ và $-13 < 0$ nên $(-13) \cdot (-10{,}5) \boxed{>} (-13) \cdot 11{,}2$. ← nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số âm.

□

Ví dụ 27. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:

a) $1962 \cdot 12$ và $1963 \cdot 12$.

b) $47 \cdot (-19)$ và $50 \cdot (-19)$.

c) $(-163) \cdot (-75)^{15}$ và $(-162) \cdot (-75)^{15}$.

d) m và n, biết $-10m \leq -10n$.

Lời giải.

a) Ta có $1962 < 1963$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với 12 , ta được:

$$1962 \cdot 12 < 1963 \cdot 12.$$

b) Ta có $47 < 50$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với -19 , ta được:

$$47 \cdot (-19) > 50 \cdot (-19).$$

c) Ta có $-163 < -162$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với $(-75)^{15}$, ta được:

$$(-163) \cdot (-75)^{15} > (-162) \cdot (-75)^{15}.$$

d) Nhân hai vế của bất đẳng thức $-10m \leq -10n$ với $\left(-\dfrac{1}{10}\right)$, ta được

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot (-10m) &\geq \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot (-10n) \\ m &\geq n. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 28. Cho số m bất kì, hãy so sánh m^2 và m.

Lời giải.

- Trường hợp $m < 0$ thì $m^2 > 0$, do đó $m^2 > m$.
- Trường hợp $m = 0$ thì $m^2 = 0$, do đó $m^2 = m$.
- Trường hợp $0 < m < 1$. Nhân hai vế cho $m > 0$ ta được $m^2 < m$.
- Trường hợp $m = 1$ thì $m^2 = 1$, do đó $m^2 = m$.
- Trường hợp $m > 1$. Nhân hai vế với m ta được $m^2 > m$.

Tóm lại:

- Nếu $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì $m^2 = m$.
- Nếu $m < 0$ hoặc $m > 1$ thì $m^2 > m$.
- Nếu $0 < m < 1$ thì $m^2 < m$.

□

thuvientoanhoc.com

Dạng 4. Bài toán thực tế

Ví dụ 29. Một nhà tài trợ dự kiến tổ chức một buổi đi dã ngoại tập thể nhằm giúp các bạn học sinh vùng cao trải nghiệm thực tế tại một trang trại trong 1 ngày (từ 14h00 ngày hôm trước đến 12h00 ngày hôm sau). Cho biết số tiền tài trợ dự kiến là 30 triệu đồng và giá thuê các dịch vụ và phòng nghỉ là 17 triệu đồng 1 ngày, giá mỗi suất ăn trưa, ăn tối là 60 000 đồng và mỗi suất ăn sáng là 30 000 đồng. Hỏi có thể tổ chức cho nhiều nhất bao nhiêu bạn tham gia được?

Lời giải.
Gọi số bạn tham gia là x ($x \in \mathbb{N}^*$).
Theo đề bài ta có $17\,000\,000 + (60\,000 + 30\,000)x \le 30\,000\,000$ hay $90\,000x \le 13\,000\,000$.
Suy ra $x \le \dfrac{1300}{9} = 144{,}(4)$.
Vậy có thể tổ chức nhiều nhất cho 144 bạn tham gia. □

Ví dụ 30. Một ca nô đi xuôi dòng trong 2 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 40 km/h và tốc độ của dòng nước là 6 km/h. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km/h.

Lời giải.
Gọi tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) ($x > 6$). Tốc độ ca nô đi xuôi dòng là $x + 6$ (km/h).
Ta có $x \le 40$ nên $x + 6 \le 40 + 6$, tức là $x + 6 \le 46$.
Gọi s (km) là quãng đường ca nô đi được trong 2 giờ 30 phút $= 2{,}5$ giờ.
Ta có $s = 2{,}5 \cdot (x + 6)$ (km). Do $x + 6 \le 46$ nên $2{,}5 \cdot (x + 6) \le 2{,}5 \cdot 46 = 115$ hay $s \le 115$.
Vậy quãng đường ca nô đi đi được trong 2 giờ 30 phút không vượt quá 115 km. □

Ví dụ 31. Chỉ số cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt **BMI** (tiếng anh là *Body Mass Index*) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số cơ thể của người được tính theo công thức sau $BMI = \dfrac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét. Căn cứ vào bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á - Thái Bình Dương, một người đàn ông có $BMI \ge 30$ sẽ bị béo phì độ II (trung bình) hoặc độ III (nặng), người đó cần phải có biện pháp tập thể dục, thể thao, thay đổi chế độ dinh dưỡng để có được cơ thể khỏe mạnh (*Nguồn: Toán 7—Tập Hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm* 2017). Bác Dũng có chiều cao 1,65 và cân nặng ít nhất là 82 kg. Hỏi bác Dũng có bị béo phì độ II hoặc độ III không?

Lời giải.
Gọi m (kg) là khối lượng cơ thể của bác Dũng, h (m) là chiều cao của bác Dũng.
Theo giả thiết, ta có $m \ge 82$; $h = 1{,}65$. Do đó chỉ số BMI của bác Dũng là

$$BMI = \frac{m}{(1{,}65)^2} = \frac{m}{2{,}7225}$$

Do $m \ge 82$ nên $\dfrac{m}{2{,}7225} \ge \dfrac{82}{2{,}7225}$.
Vì $\dfrac{82}{2{,}7225} \approx 30{,}11938$ và $30{,}11938 > 30$ nên $\dfrac{m}{2{,}7225} > 30$.
Như vậy bác Dũng có thể đã bị béo phì độ II hoặc độ III. □

Dạng 5. Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

- Nếu $f(x) \ge k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$.
  Ta viết $\min f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

thuvientoanhoc.com

Nếu $f(x) \le k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$.
Ta viết $\max f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

Ví dụ 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 6x + 10$.

Lời giải.

Ta có $A = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1 \ge 1$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$).
Do đó $\min A = 1$ khi và chỉ khi $x = 3$. □

Ví dụ 33. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 5x^2 - 10x + 3$.

Lời giải.

Ta có $B = 5x^2 - 10x + 3 = 5x^2 - 10x + 5 - 2 = 5(x-1)^2 - 2 \ge -2$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$).
Vậy $\min B = -2$ khi và chỉ khi $x = 1$. □

Ví dụ 34. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = -x^2 + 5x - 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} C &= -x^2 + 5x - 4 = -(x^2 - 5x + 4) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4\right) \\ &= -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4} \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{5}{2}). \end{aligned}$$

Vậy $\max C = \dfrac{9}{4}$ khi $x = \dfrac{5}{2}$. □

Ví dụ 35. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} E &= 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43 = 2x^2 + 8x + 8 + y^2 - 10y + 25 + 10 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + (y-5)^2 + 10 = 2(x+2)^2 + (y-5)^2 + 10 \ge 10. \end{aligned}$$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -2$ và $y = 5$).
Vậy $\min E = 10$ khi và chỉ khi $x = -2$ và $y = 5$. □

Ví dụ 36. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

Lời giải.

Ta có

$$F = \frac{2x-1}{x^2+2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2}{x^2+2} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - \frac{x^2+2}{x^2+2} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - 1 \ge -1.$$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$).
Vậy $\min F = -1$ khi và chỉ khi $x = -1$. □

thuvientoanhoc.com

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dùng kí hiệu để viết bất đẳng thức tương ứng với mỗi trường hợp sau:

a) x nhỏ hơn hoặc bằng -2;

b) m là số âm;

c) y là số dương;

d) p lớn hơn hoặc bằng $2\,024$.

Lời giải.

a) $x \leq -2$.

b) $m < 0$.

c) $y > 0$.

d) $p \geq 2\,024$.

Bài 2. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;

b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;

c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là $20\,000$ đồng.

Lời giải.

a) Với t là số tuổi, ta có bất đẳng thức: $t \geq 18$.

b) Với x là số người xe buýt chở được, ta có bất đẳng thức: $x \leq 45$.

c) Với y là mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động, ta có bất đẳng thức: $y \geq 20\,000$.

Bài 3. Dùng các kí hiệu $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ để diễn tả:

a) Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở hình dưới.

b) Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4*b*.



Hình a)



Hình b)

Lời giải.

a) $v \leq 70$.

b) $P \leq 10$.

Bài 4. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) m lớn hơn 8;

b) n nhỏ hơn 21;

c) x nhỏ hơn hoặc bằng 4;

d) y lớn hơn hoặc bằng 0.

Lời giải.

thuvientoanhoc.com

a) $m > 8$. b) $n < 21$. c) $x \leq 4$. d) $y \geq 0$.

Bài 5. Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

a) Cộng hai vế của bất đẳng thức $m > 5$ với -4;

b) Cộng hai vế của bất đẳng thức $x^2 \leq y + 1$ với 9;

c) Nhân hai vế của bất đẳng thức $x > 1$ với 3, rồi tiếp tục cộng với 2;

d) Cộng vào hai vế của bất đẳng thức $m \leq -1$ với -1, rồi tiếp tục cộng với -7.

Lời giải.

a) Cộng hai vế của bất đẳng thức $m > 5$ với -4 ta được

$$\begin{aligned} m + (-4) &> 5 + (-4) \\ m - 4 &> 1. \end{aligned}$$

b) Cộng hai vế của bất đẳng thức $x^2 \leq y + 1$ với 9 ta được

$$\begin{aligned} x^2 + 9 &\leq y + 1 + 9 \\ x^2 + 9 &\leq y + 10. \end{aligned}$$

c) Nhân hai vế của bất đẳng thức $x > 1$ với 3 ta được

$$\begin{aligned} x \cdot 3 &> 1 \cdot 3 \\ 3x &> 3. \end{aligned}$$

Cộng hai vế của bất đẳng thức $3x > 3$ với 2 ta được

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 3 + 2 \\ 3x + 2 &> 5. \end{aligned}$$

d) Cộng vào hai vế của bất đẳng thức $m \leq -1$ với -1 ta được

$$\begin{aligned} m + (-1) &\leq -1 + (-1) \\ m - 1 &\leq -2. \end{aligned}$$

Cộng hai vế của bất đẳng thức $m - 1 \leq -2$ với -7 ta được

$$\begin{aligned} m - 1 + (-7) &\leq -2 + (-7) \\ m - 8 &\leq -9. \end{aligned}$$

Bài 6. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a) $5a + 7$ và $5b + 7$; b) $-3a - 9$ và $-3b - 9$.

Lời giải.

a) Vì $a < b$ và $5 > 0$ nên $5a < 5b$.
Cộng hai vế của bất đẳng thức trên với 7 ta được $5a + 7 < 5b + 7$.

b) Vì $a < b$ và $-3 < 0$ nên $-3a > -3b$.
Cộng hai vế của bất đẳng thức trên với -9 ta được $-3a - 9 > -3b - 9$.

thuvientoanhoc.com

Bài 7. So sánh hai số a và b, nếu:

a) $a+1\,954<b+1\,954$; b) $-2a>-2b$.

Lời giải.

a) Ta có $a+1\,954<b+1\,954$. (1)
Cộng cả hai vế của bất đẳng thức (1) với $-1\,954$ ta được

$$a+1\,954-1\,954<b+1\,954-1954.$$

Hay $a<b$.

b) Ta có $-2a>-2b$. (2)
Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (2) với $-\dfrac{1}{2}$ ta được

$$-2a\cdot\frac{-1}{2}<-2b\cdot\frac{-1}{2}$$

Hay $a<b$.

□

Bài 8. So sánh hai số x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x+5>y+5$; b) $-11x\le-11y$; c) $3x-5<3y-5$; d) $-7x+1>-7y+1$.

Lời giải.

a) Cộng hai vế của bất đẳng thức $x+5>y+5$ với -5 ta được

$$\begin{aligned}x+5+(-5)&>y+5+(-5)\\ x&>y.\end{aligned}$$

Vậy $x>y$.

b) Nhân hai vế của bất đẳng thức $-11x\le-11y$ với $\dfrac{-1}{11}$ ta được

$$\begin{aligned}-11x\cdot\left(\frac{-1}{11}\right)&\ge-11y\cdot\left(\frac{-1}{11}\right)\\ x&\ge y.\end{aligned}$$

Vậy $x\ge y$.

c) Cộng hai vế của bất đẳng thức $3x-5<3y-5$ với 5 ta được

$$\begin{aligned}3x-5+5&<3y-5+5\\ 3x&<3y.\end{aligned}$$

Tiếp tục nhân hai vế của bất đẳng thức $3x<3y$ với $\dfrac{1}{3}$ ta được

$$\begin{aligned}3x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)&<3y\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\\ x&<y.\end{aligned}$$

Vậy $x<y$.

thuvientoanhoc.com

d) Cộng hai vế của bất đẳng thức $-7x+1>-7y+1$ với -1 ta được

$$\begin{aligned} -7x+1+(-1) &> -7y+1+(-1) \\ -7x &> -7y. \end{aligned}$$

Tiếp tục nhân hai vế của bất đẳng thức $-7x>-7y$ với $\dfrac{-1}{7}$ ta được

$$\begin{aligned} -7x\cdot\left(\frac{-1}{7}\right) &< -7y\cdot\left(\frac{-1}{7}\right) \\ x &< y. \end{aligned}$$

Vậy $x<y$.

□

Bài 9. So sánh $2m$ và m.

Lời giải.

Bạn phải xét ba trường hợp: $m=0$; $m>0$; $m<0$.

- Nếu $m=0$ thì $2m=m=0$.
- Nếu $m>0$ thì $2m>m$.
- Nếu $m<0$ thì $2m<m$.

□

Bài 10. Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

a) $2\cdot(-7)+2\,023<2\cdot(-1)+2\,023$;

b) $(-3)\cdot(-8)+1\,975>(-3)\cdot(-7)+1\,975$.

Lời giải.

a) Vì $-7<-1$ và $2>0$ nên $2\cdot(-7)<2\cdot(-1)$.
Cộng hai vế của bất đẳng thức trên với $2\,023$ ta được $2\cdot(-7)+2\,023<2\cdot(-1)+2\,023$.

b) Vì $-8<-7$ và $-3<0$ nên $(-3)\cdot(-8)>(-3)\cdot(-7)$.
Cộng hai vế của bất đẳng thức trên với $2\,023$ ta được $(-3)\cdot(-8)+2\,023>2\cdot(-7)+2\,023$.

□

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) $-\dfrac{2\,023}{2\,024}>-\dfrac{2\,024}{2\,023}$;

b) $\dfrac{34}{11}>\dfrac{26}{9}$.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{2\,023}{2\,024}=1-\dfrac{1}{2\,024}<1$ và $\dfrac{2\,024}{2\,023}=1+\dfrac{1}{2\,023}>1$ nên $\dfrac{2\,023}{2\,024}<\dfrac{2\,024}{2\,023}$.
Suy ra $-\dfrac{2\,023}{2\,024}>-\dfrac{2\,024}{2\,023}$.

b) Ta có $\dfrac{34}{11}=3+\dfrac{1}{11}>3$ và $\dfrac{26}{9}=3-\dfrac{1}{9}<3$ nên $\dfrac{34}{11}>\dfrac{26}{9}$.
Vậy $\dfrac{34}{11}>\dfrac{26}{9}$.

□

thuvientoanhoc.com

Bài 12. Chứng minh

a) $\sqrt{29}-\sqrt{6}>\sqrt{28}-\sqrt{6}$;

b) $26{,}2<2a+3{,}2<26{,}4$ với $11{,}5<a<11{,}6$.

Lời giải.

a) Ta có
$\sqrt{29}>\sqrt{28}$ (vì $29>28$)
Cộng hai vế cho $-\sqrt{6}$ ta được
$\sqrt{29}-\sqrt{6}>\sqrt{28}-\sqrt{6}$.
Vậy $\sqrt{29}-\sqrt{6}>\sqrt{28}-\sqrt{6}$.

b) Ta có $11{,}5<a<11{,}6$
Nhân 2 vào hai vế ta được
$23<2a<23,2$
Cộng $3,2$ vào hai vế ta được
$26{,}2<2a+3{,}2<26{,}4$.

□

Bài 13. Chứng minh

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}<a^2+\dfrac{4}{5}$ với $a\neq 0$;

b) $2m+4>2n+3$ với $m>n$.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{20}$.
Mà $\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{20}$ nên $\dfrac{5}{20}<\dfrac{16}{20}$.
Do đó $\dfrac{1}{4}<\dfrac{4}{5}<a^2+\dfrac{4}{5}$ với $a\neq 0$.
Vậy $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}<a^2+\dfrac{4}{5}$ với $a\neq 0$.

b) $2m+4>2n+3$ với $m>n$.
Ta có $m>n$
Nhân 2 vào hai vế
Ta được $2m>2n$
Cộng 4 vào hai vế
Ta được $2m+4>2n+3$.

□

Bài 14.

a) Cho $a>b>0$. Chứng minh $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh $\dfrac{2022}{2023}$ và $\dfrac{2023}{2024}$.

Lời giải.

a) Cho $a>b>0$. Chứng minh $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$. Ta có $a>b>0$ nên $ab>0$ do đó $\dfrac{1}{ab}>0$.
Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $a>b$ cho $\dfrac{1}{ab}$
Ta được $a\cdot\dfrac{1}{ab}>b\cdot\dfrac{1}{ab}$ hay $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$.
Do đó $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh $\dfrac{20022}{2023}$ và $\dfrac{2023}{2024}$.
Ta có
$\dfrac{2022}{2023}=1-\dfrac{1}{2023}$.
$\dfrac{2023}{2024}=1-\dfrac{1}{2024}$.
Vì $\dfrac{1}{2023}>\dfrac{1}{2024}$ nên $1-\dfrac{1}{2023}<1-\dfrac{1}{2024}$ hay $\dfrac{2022}{2023}<\dfrac{2023}{2024}$.

thuvientoanhoc.com

Bài 15. Chứng minh $x^2+y^2 \geq 2xy$ với mọi số thực x, y.

Lời giải.
Ta có $(x-y)^2 \geq 0$ với mọi số thực x, y
Suy ra $x^2+y^2 \geq 2xy$
Suy ra $x^2+y^2-2xy \geq 0$.
Dấu "=" khi $(x-y)^2=0$ suy ra $x=y$.

Bài 16. Cho $a+3>b+3$. Chứng minh rằng $-2a+1<-2b+1$.

Lời giải.
Ta có $a+3>b+3 \Rightarrow a>b \Rightarrow -2a<-2b \Rightarrow -2a+1<-2b+1$.

Bài 17. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $a<\dfrac{a+b+c}{2}$.

Lời giải.
Ta có $a<b+c$ (bất đẳng thức tam giác).

$$\Rightarrow 2a<a+b+c \Rightarrow a<\frac{a+b+c}{2}.$$

Bài 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: $A=2x^2+28x+101$.

Lời giải.
Ta có $A=2x^2+28x+98+3=2(x+7)^2+3 \geq 3$. Do đó $\min A=3$ khi và chỉ khi $x=-7$.

Bài 19. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức: $C=-x^2+5x$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} C &= -x^2+5x=-(x^2-5x) \\ &= -\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right) \\ &= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right] \\ &= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $\max C=\dfrac{24}{5}$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{5}{2}$.

thuvientoanhoc.com

Bài 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn

1.1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình dạng $ax+b<0$ (hoặc $ax+b>0$; $ax+b\le 0$; $ax+b\ge 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a\neq 0$ được gọi là **bất phương trình bậc nhất một ẩn** x.

1.2. Nghiệm của bất phương trình

- Với bất phương trình bậc nhất bậc nhất có ẩn là x, số x_0 được gọi là *nghiệm* của phất phương trình nếu ta thay $x=x_0$ thì nhận được một khẳng định đúng.
- Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2 Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình $ax+b>0$ $(a\neq 0)$ được giải như sau:

- Cộng hai vế của bất phương trình với $-b$, ta được bất phương trình:
$$ax>-b.$$
- Nhân hai vế của bất phương trình nhận được với $\dfrac{1}{a}$:
  - Nếu $a>0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>-\dfrac{b}{a}$.
  - Nếu $a<0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x<-\dfrac{b}{a}$.

— *Các bất phương trình $ax+b>0$, $ax+b\le 0$, $ax+b\ge 0$ được giải tương tự.*

— *Ta cũng có thể giải được các bất phương trình một ẩn đưa được về dạng $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\le 0$, $ax+b\ge 0$.*

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết bất phương trình bậc nhất, nghiệm của bất phương trình

Ví dụ 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $0x<0$; b) $3x<0$; c) $x^3+1\ge 0$; d) $-x+1\le 0$;

e) $a+2\,023>0$; f) $0x-5<0$; g) $5x-7\le 0$; h) $x^2+1\le 0$.

Lời giải.

Hai bất phương trình $0x<0$ và $x^3+1\ge 0$ không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

thuvientoanhoc.com

- Bất phương trình $3x < 0$ có dạng $ax + b < 0$ với $a = 3 \neq 0$ và $b = 0$, nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.
- Bất phương trình $-x + 1 \leq 0$ có dạng $ax + b \leq 0$ với $a = -1 \neq 0$ và $b = 1$, nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.
- Bất phương trình $a + 2\,023 > 0$ có dạng $ax + b > 0$ với $a = 1 \neq 0$ và $b = 2\,023$, nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.
- Bất phương trình $5x - 7 \leq 0$ có dạng $ax + b \leq 0$ với $a = 5$ và $b = -7$, nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.
- Hai bất phương trình $0x - 5 < 0$ và $x^2 + 1 \leq 0$ không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ 2. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn x?

a) $3x + 16 \leq 0$; b) $-5x + 5 > 0$; c) $x^2 - 4 > 0$; d) $-3x < 0$;

e) $-3x + 7 \leq 0$; f) $4x - \dfrac{3}{2} > 0$; g) $x^3 > 0$; h) $2x^2 - 19 \leq 0$.

Lời giải.

- a), b), d), e), f) là bất phương trình bậc nhất một ẩn x.
- c), h) không là bất phương trình bậc nhất một ẩn x vì $x^2 - 4$, $2x^2 - 19$ là các đa thức bậc hai.
- g) không là bất phương trình bậc nhất một ẩn x vì x^3 là một đa thức bậc ba.

Ví dụ 3. Kiểm tra xem giá trị $x = 5$ có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất sau hay không?

a) $6x - 29 > 0$. b) $11x - 52 > 0$. c) $x - 2 \leq 0$.

Lời giải.

a) Thay $x = 5$, ta có: $6 \cdot 5 - 29 > 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $6x - 29 > 0$.

b) Thay $x = 5$, ta có: $11 \cdot 5 - 52 > 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $11x - 52 > 0$.

c) Thay $x = 5$, ta có: $5 - 2 \leq 0$ là khẳng định không đúng. Vậy $x = 5$ không là nghiệm của bất phương trình $x - 2 \leq 0$.

Ví dụ 4. Trong hai giá trị $x = 1$ và $x = 2$, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình $3x - 4 \leq 0$?

Lời giải.

a) Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 1 - 4 \leq 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 2 - 4 \leq 0$ là khẳng định sai. Vậy $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 5. Tìm một số là nghiệm và một số không phải là nghiệm của bất phương trình $4x + 5 > 0$.

Lời giải.

thuvientoanhoc.com

a) Lấy $x = 0$ thay vào bất phương trình đã cho, ta thấy $4 \cdot 0 + 5 > 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Lấy $x = -2$ thay vào bất phương trình đã cho, ta được $4 \cdot (-2) + 5 > 0$ là khẳng định sai. Vậy $x = -2$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

□

Ví dụ 6. Nêu hai ví dụ về bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

Lời giải.
Hai bất phương trình bậc nhất một ẩn x là

a) $2x + 4 \leq 0$.

b) $-x - 3 > 0$.

□

Ví dụ 7. Trong các số -2; 0; 5, những số nào là nghiệm của bất phương trình $2x - 10 < 0$?

Lời giải.
Chỉ có -2 và 0 là nghiệm của bất phương trình đã cho. □

Ví dụ 8. Kiểm tra xem $x = -5$ có phải là nghiệm của bất phương trình $2x + 7 < 1 - 3x$ không?

Lời giải.
Thay $x = -5$ vào hai vế của bất phương trình đã cho, ta được

$$-2 \cdot (-5) + 7 < 1 - 3 \cdot (-5)$$

hay $-3 < 16$ (bất đẳng thức đúng).
Vậy $x = -5$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho. □

Dạng 2. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Ví dụ 9. Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x - 4 > 0$;

b) $2x + 1 > 0$;

c) $0{,}5x - 6 \leq 0$;

d) $-2x + 3 \leq 0$;

e) $5x - 3 < 0$;

f) $-6x - 2 \geq 0$.

Lời giải.

a) Ta có: $2x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} 2x &> -1 && \text{(cộng hai vế với } -1) \\ (2x) \cdot \frac{1}{2} &> (-1) \cdot \frac{1}{2} && \text{(nhân hai vế với } \frac{1}{2}) \\ x &> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $0{,}5x - 6 \leq 0$

$$\begin{aligned} 0{,}5x &\leq 6 && \text{(cộng hai vế với } 6) \\ (0{,}5x) \cdot 2 &\leq 6 \cdot 2 && \text{(nhân hai vế với } 2) \\ x &\leq 12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 12$.

c) Ta có: $-2x+3\le 0$

$-2x\le -3$ (cộng hai vế với -3)

$(-2x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\ge(-3)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (nhân hai vế với $-\dfrac{1}{2}$)

$x\ge\dfrac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\le 12$.

d) Ta có: $-2x-4>0$

$-2x>0+4$ (cộng hai vế của bất phương trình với 4)

$x<4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (nhân hai vế với số âm $-\dfrac{1}{2}$(và đổi chiều bất đẳng thức)

$x<-2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-2$.

e) Ta có: $5x-3<0$

$5x<3$ (cộng hai vế với 3)

$5x\cdot\dfrac{1}{5}<3\cdot\dfrac{1}{5}$ (nhân hai vế với $\dfrac{1}{5}$)

$x<\dfrac{3}{5}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<\dfrac{3}{5}$.

f) Ta có: $-6x-2\ge 0$

$-6x\ge 2$ (cộng hai vế với 2)

$(-6x)\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)\le 2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)$ (nhân hai vế với $-\dfrac{1}{6}$)

$x\le\dfrac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\le\dfrac{1}{3}$.

□

Ví dụ 10. Giải các bất phương trình:

a) $6x+5<0$; b) $-2x-7>0$; c) $2x+5<3x-4$; d) $-3x+5\ge -4x+3$;

e) $5x+7>8x-5$; f) $-4x+3\le 3x-1$; g) $-0{,}3x+12>0$. h) $\dfrac{3}{4}x-6\le 0$.

Lời giải.

a) Ta có $6x+5<0$

$6x<-5$

$x<-\dfrac{5}{6}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-\dfrac{5}{6}$.

b) Ta có $-2x-7>0$

$-2x>7$

$x<-\dfrac{7}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-\dfrac{7}{2}$.

c) Ta có $2x+5<3x-4$

$2x-3x<-4-5$

$-x<-9$

$x>9$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>9$.

d) Ta có $-3x+5\ge -4x+3$

$-3x+4x\ge 3-5$

$x\ge -2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge -2$.

thuvientoanhoc.com

e) Ta có $5x+7>8x-5$
$5x-8x>-5-7$
$-3x>-12$
$x<4.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<4$.

f) Ta có $-4x+3\le 3x-1$
$-4x-3x\le -1-3$
$-7x\le -4$
$x\ge \dfrac{4}{7}.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge \dfrac{4}{7}$.

g) Ta có $-0{,}3x+12>0$
$-0{,}3x>-12$
$x<\dfrac{-12}{-0{,}3}$
$x<40.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<40$.

h) Ta có $\dfrac{3}{4}x-6\le 0$
$\dfrac{3}{4}x\le 6$
$x\le 6\cdot\dfrac{4}{3}$
$x\le 8.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\le 8$.

Ví dụ 11. Giải các bất phương trình:

a) $-8x-27<0$;

b) $\dfrac{5}{4}x+20\ge 0$;

c) $2x-5\le 4x+3$;

d) $5+7x>4x-7$;

e) $3x-(6+2x)\le 3(x+4)$;

f) $2(x-0{,}5)-1{,}4\ge 1{,}5-(x+1{,}2)$.

Lời giải.

a) Ta có: $-8x-27<0$
$-8x<27$
$x>\dfrac{-27}{8}.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>\dfrac{-27}{8}$.

b) Ta có: $\dfrac{5}{4}x+20\ge 0$
$\dfrac{5}{4}x\ge -20$
$x\ge -20\cdot\dfrac{4}{5}$
$x\ge -16.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge -16$.

c) Ta có: $2x-5\le 4x+3$
$-5-3\le 4x-2x$
$-8\le 2x$
$-4\le x.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge -4$

d) Ta có: $5+7x>4x-7$
$7x-4x>-7-5$
$3x>-12$
$x>-4.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>-4$.

e) Ta có: $3x-(6+2x)\le 3(x+4)$
$3x-6-2x\le 3x+12$
$x-6\le 3x+12$
$-6-12\le 3x-x$
$-18\le 2x$
$x\ge -9.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge -9$.

f) Ta có: $2(x-0{,}5)-1{,}4\ge 1{,}5-(x+1{,}2)$
$2x-1-1{,}4\ge 1{,}5-x-1{,}2$
$2x-1{,}5\ge 0{,}3-x$
$2x+x\ge 0{,}3+1{,}5$
$3x\ge 1{,}8$
$x\ge 0{,}6.$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0.6$

Ví dụ 12. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{2x-5}{18} < \dfrac{4x+3}{10}$;

b) $\dfrac{4x-1}{9} < \dfrac{5-3x}{6}$.

Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{aligned}\frac{2x-5}{18} &< \frac{4x+3}{10}\\ \frac{5(2x-5)}{90} &< \frac{9(4x+3)}{90}\\ 10x-25 &< 36x+27\\ 10x-36x &< 27+25\\ -26x &< 52\\ x &> \frac{52}{-26}\\ x &> -2.\end{aligned}$$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -2$.

b) Ta có
$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{9} &< \frac{5-3x}{6}\\ \frac{2(4x-1)}{18} &< \frac{3(5-3x)}{18}\\ 8x-2 &< 15-9x\\ 8x+9x &< 15+2\\ 17x &< 17\\ x &< 1.\end{aligned}$$
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

Ví dụ 13. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{5x+2}{5} < \dfrac{4x-3}{4}$;

b) $\dfrac{3(2x+1)}{20} + 1 < \dfrac{3x+13}{10}$.

Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{aligned}\frac{5x+2}{5} &< \frac{4x-3}{4}\\ \frac{4(5x+2)}{20} &< \frac{5(4x-3)}{20}\\ 20x+8 &< 20x-15\\ 20x-20x &< -8-15\\ 0x &< -23.\end{aligned}$$
Bất phương trình này vô nghiệm.

b) Ta có
$$\begin{aligned}\frac{3(2x+1)}{20} + 1 &< \frac{3x+13}{10}\\ \frac{3(2x+1)}{20} + \frac{20}{20} &< \frac{2(3x+13)}{20}\\ 6x+3+20 &< 6x+26\\ 6x-6x &< 26-3-20\\ 0x &< 3.\end{aligned}$$
Bất phương trình này có nghiệm bất kì.

Ví dụ 14. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình:

$$\frac{3x+17}{10} > \frac{5x+22}{15}\ (1) \text{ và } \frac{x-4}{30} - 1 > \frac{2x-7}{24}\ (2)$$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}\frac{3x+17}{10} &> \frac{5x+22}{15}\\ \frac{3(3x+17)}{30} &> \frac{2(5x+22)}{30}\\ 9x+51 &> 10x+44\\ 9x-10x &> 44-51\\ -x &> -7\\ x &< 7.\ (*)\end{aligned}$$

Ta có
$$\begin{aligned}\frac{x-4}{30} - 1 &> \frac{2x-7}{24}\\ \frac{4(x-4)}{120} - \frac{120}{120} &> \frac{5(2x-7)}{120}\\ 4x-16-120 &> 10x-35\\ 4x-10x &> 16+120-35\\ -6x &> 101\\ x &< -\frac{101}{6}.\ (**)\end{aligned}$$
Từ (*) và (**) suy ra nghiệm chung của hai bất phương trình là $x < -\dfrac{101}{6}$.

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 15. Tìm nghiệm nguyên âm của bất phương trình

$$\frac{2x+4}{3}-\frac{4x-7}{18}>\frac{2x-5}{9}-\frac{2x-1}{15}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2x+4}{3}-\frac{4x-7}{18}&>\frac{2x-5}{9}-\frac{2x-1}{15}\\ \frac{30(2x+4)}{90}-\frac{5(4x-7)}{90}&>\frac{10(2x-5)}{90}-\frac{6(2x-1)}{90}\\ 60x+120-20x+35&>20x-50-12x+6\\ 60x-20x-20x+12x&>-120-35-50+6\\ 32x&>-199\\ x&>\frac{-199}{32}.\end{aligned}$$

Vì x là số nguyên âm nên $x\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$. □

Dạng 3. Giải bài toán bằng cách lập bất phương trình

Ví dụ 16. Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Lời giải.

Gọi x (quyển) là số vở mà Thanh có thể mua. Theo bài ra, ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned}7x+18&\le 100\\ 7x&\le 100-18\\ 7x&\le 82\\ x&\le\frac{82}{7}.\end{aligned}$$

Vì số vở là số tự nhiên nên Thanh có thể mua nhiều nhất 11 quyển vở. □

Ví dụ 17. Để hưởng ứng phong trào "Trồng cây gây rừng", lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 1 000 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 540 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?

Lời giải.

Gọi x là số cây xanh cần trồng thêm của lớp 9A.

Theo đề bài, để lớp 9A đạt được kế hoạch đề ra, ta phải có

$$\begin{aligned}x+540&\ge 1\,000\\ x&\ge 1\,000-540\\ x&\ge 460.\end{aligned}$$

Vậy để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A phải trồng thêm ít nhất 460 cây xanh nữa. □

Ví dụ 18. Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm số môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất phải bằng 8. Bạn Na đã đạt 9,1 điểm môn Toán và 6,9 điểm môn Ngữ văn. Hãy lập và giải bất phương trình để tìm điểm số Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Na phải đạt để trúng tuyển.

thuvientoanhoc.com

Lời giải.
Gọi x là điểm số môn Tiếng Anh của bạn Na.
Theo đề bài, để bạn Na trúng tuyển, ta phải có

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 9{,}1+2\cdot 6{,}9+x}{5} &\geq 8\\ 2\cdot 9{,}1+2\cdot 6{,}9+x &\geq 40\\ 18{,}2+13{,}8+x &\geq 40\\ x &\geq 8.\end{aligned}$$

Vậy để trúng tuyển, bạn Na phải đạt ít nhất 8 điểm môn Tiếng Anh. □

Ví dụ 19. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 7,4%/năm. Bà Mai dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hằng năm ít nhất là 60 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải.
Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm.
Ta có số tiền lại gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0{,}074\cdot x$ (triệu đồng).
Để có số tiền lãi ít nhất là 60 triệu đồng/năm thì ta phải có:

$$\begin{aligned}0{,}074x &\geq 60\\ x &\geq 60:0{,}074\\ x &\geq 810{,}81.\end{aligned}$$

Vậy bà Mai cần gửi ngân hàng ít nhất 811 triệu đồng. □

Ví dụ 20. Trong một cuộc thi tuyển dụng việc làm, ban tổ chức quy định mỗi người ứng tuyển phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn bốn đáp án, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Người ứng tuyển chọn đáp án đúng sẽ được cộng thêm 2 điểm, chọn đáp án sai bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 5 điểm và theo quy định người ứng tuyển phải trả lời hết 25 câu hỏi; người nào có số điểm từ 25 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được vào vòng tiếp theo?

Lời giải.
Gọi x, $25-x$ ($x\in\mathbb{N}$, $x\leq 25$) lần lượt là số câu trả lời đúng và sai của người ứng tuyển.
Số điểm của người ứng tuyển sau 25 câu hỏi là $5+2x-(25-x)=3x-20$ điểm.
Để vượt qua vòng sơ tuyển cần ít nhất 25 điểm nên ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned}3x-20 &\geq 25\\ 3x &\geq 45\\ x &\geq 15.\end{aligned}$$

Vậy người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất 15 câu hỏi. □

Ví dụ 21. Bác Ngọc gửi tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Bác Ngọc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 21440000 đồng. Hỏi bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

Lời giải.
Giả sử bác Ngọc gửi x (đồng) tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ($x>0$)). Khi đó, tổng số tiền bác Ngọc nhận được sau khi gửi 12 tháng là

$$x+7{,}2\%\cdot x=\left(1+\frac{7{,}2}{100}\right)x=\frac{1072}{1000}x=\frac{134}{125}x \text{ (đồng).}$$

thuvientoanhoc.com

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{134}{125}x \geq 21440000$.
Giải bất phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}\frac{134}{125}x &\geq 21440000\\ x &\geq 21440000 \cdot \frac{125}{134}\\ x &\geq 20000000\end{aligned}$$

Vậy bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là 20 triệu đồng để đạt được dự định. □

Ví dụ 22. Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 410 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 350 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm?

Lời giải.
Giả sử trung bình mỗi tháng doanh nghiệp bán được x chiếc áo sơ mi ($x \in \mathbb{N}^*$).
Lợi nhuận của doanh nghiệp sau 12 tháng là

$$12(350000x - 410000000) \text{ (đồng)}.$$

Do đó, để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng thì

$$12(350000x - 410000000) \geq 1380000000.$$

Giải bất phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}12(350000x - 410000000) &\geq 1380000000\\ 350000x - 410000000 &\geq 115000000\\ 350000x &\geq 115000000 + 410000000\\ 350000x &\geq 525000000\\ x &\geq \frac{525000000}{350000}\\ x &\geq 1500.\end{aligned}$$

Vậy trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất 1500 chiếc áo sơ mi để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm. □

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $2x - 5 > 0$; b) $3y + 1 \geq 0$; c) $0x - 3 < 0$; d) $x^2 > 0$.

Lời giải.

a) $2x - 5 > 0$ là bất phương trình bậc nhất ẩn x.

b) $3y + 1 \geq 0$ là bất phương trình bậc nhất ẩn y.

c) $0x - 3 < 0$, vì $a = 0$ nên không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

d) $x^2 > 0$, vì có chứa x^2 nên không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

□

thuvientoanhoc.com

Bài 2. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $3x-6>0$. b) $-13x+20<0$. c) $7y\geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình ở các câu a, b, c là bất phương trình bậc nhất một ẩn. □

Bài 3. Kiểm tra xem số nào là nghiệm của mỗi bất phương trình tương ứng sau đây.

a) $x^2-3x+2>0$ với $x=-3; x=1{,}5$. b) $2-2x<3x+1$ với $x=\dfrac{2}{5}; x=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

a) Thay $x=-3$, ta có $(-3)^2-3(-3)+2>0$ là khẳng định đúng.
Vậy $x=-3$ là nghiệm của bất phương trình.
Thay $x=-1{,}5$, ta có $(-1{,}5)^2-3(-1{,}5)+2>0$ là khẳng định không đúng.
Vậy $x=-1{,}5$ không là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x=\dfrac{2}{5}$, ta có $2-2\cdot\dfrac{2}{5}<3\cdot\dfrac{2}{5}+1$ là khẳng định đúng.
Vậy $x=\dfrac{2}{5}$ là nghiệm của bất phương trình.
Thay $x=\dfrac{1}{5}$, ta có $2-2\cdot\dfrac{1}{5}<3\cdot\dfrac{1}{5}+1$ là khẳng định không đúng.
Vậy $x=\dfrac{1}{5}$ không là nghiệm của bất phương trình.

□

Bài 4. Tìm x sao cho:

a) Giá trị của biểu thức $2x+1$ là số dương; b) Giá trị của biểu thức $3x-5$ là số âm.

Lời giải.

a) Giá trị của biểu thức $2x+1$ là số dương nên:

$$\begin{aligned} 2x+1&>0\\ 2x&>-1 \quad (\text{cộng } -1 \text{ vào cả hai vế})\\ x&>\frac{-1}{2} \quad \left(\text{nhân } \frac{1}{2} \text{ vào cả hai vế}\right)\end{aligned}$$

Vậy $x>\dfrac{-1}{2}$.

b) Giá trị của biểu thức $3x-5$ là số âm nên: $3x-5<0$

$$\begin{aligned} 3x&<5 \quad (\text{cộng } 5 \text{ vào cả hai vế})\\ x&<\frac{5}{3} \quad \left(\text{nhân } \frac{1}{3} \text{ vào cả hai vế}\right)\end{aligned}$$

Vậy $x<\dfrac{5}{3}$.

□

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $x-5\geq 0$; b) $x+5\leq 0$; c) $-2x-6>0$; d) $4x-12<0$.

Lời giải.

thuvientoanhoc.com

a) $x-5\geq 0$
$x\geq 5$.

b) $x+5\leq 0$
$x\leq -5$.

c) $-2x-6\geq 0$
$-2x>6$
$x<-3$.

d) $4x-12<0$
$4x<12$
$x<3$.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $6<x-3$; b) $\frac{1}{2}\cdot x>5$; c) $-8x+1\geq 5$; d) $7<2x+1$.

Lời giải.

a) Gải bất phương trình: $6<x-3$
$6+3<x$ (cộng 3 vào cả hai vế)
$9<x$.
Vậy nghiệm bất phương trình là $x>9$.

b) Gải bất phương trình: $\frac{1}{2}\cdot x>5$
$x>10$ (nhân 2 vào cả hai vế)
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>10$.

c) Gải bất phương trình: $-8x+1\geq 5$
$-8x\geq 4$ (cộng -1 vào cả hai vế)
$x\leq \frac{4}{-8}$ (nhân $\frac{-1}{8}$ vào cả hai vế)
$x\leq \frac{-1}{2}$ (nhân số âm nên đảo chiều
Vậy nghiệm bất phương trình là $x\leq \frac{-1}{2}$.

d) Gải bất phương trình: $7<2x+1$
$6<2x$ (cộng -1 vào cả hai vế)
$\frac{6}{2}<x$ (nhân $\frac{1}{2}$ vào cả hai vế)
$3<x$.
Vậy nghiệm bất phương trình là $x>3$.

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $x-7<2-x$; b) $x+2\leq 2+3x$; c) $4+x>5-3x$; d) $-x+7\geq x-3$.

Lời giải.

a) Giải các bất phương trình: $x-7<2-x$
$x<9-x$ (cộng 7 vào cả hai vế)
$2x<9$ (cộng x vào cả hai vế)
$x<\frac{9}{2}$ (nhân $\frac{1}{2}$ vào cả hai vế)
Nghiệm của bất phương trình là $x<\frac{9}{2}$.

thuvientoanhoc.com

b) Giải các bất phương trình: $x+2 \leq 2+3x$

$$\begin{aligned} x &\leq 3x && \text{(cộng } -2 \text{ vào cả hai vế)} \\ 0 &\leq 2x && \text{(cộng } -x \text{ vào cả hai vế)} \\ 0 &\leq x && \text{(nhân } \frac{1}{2} \text{ vào cả hai vế)} \end{aligned}$$

Nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0$.

c) Giải các bất phương trình: $4+x > 5-3x$

$$\begin{aligned} 4x &> 1 && \text{(cộng } 3x \text{ và } -4 \text{ từ cả hai bên)} \\ x &> \frac{1}{4} && \text{(nhân cho hai vế cho } \frac{1}{4}\text{)} \end{aligned}$$

Nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{4}$.

d) Giải các bất phương trình: $-x+7 \geq x-3$

$$\begin{aligned} 7 &\geq 2x-3 && \text{(cộng } x \text{ vào cả hai vế)} \\ 10 &\geq 2x && \text{(cộng 3 vào cả hai vế)} \\ 5 &\geq x && \text{(nhân cho } \frac{1}{2} \text{ vào cả hai vế)} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 5$.

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x+2 > 2x+3$; b) $5x+4 < -3x-2$; c) $\frac{2}{3}(2x+3) < 7-4x$; d) $\frac{1}{4}(x-3) \leq 3-2x$.

Lời giải.

a) Giải bất phương trình: $3x+2 > 2x+3$

$$\begin{aligned} 3x-2x &> 3-2 && \text{(cộng } -2x \text{ vào cả hai vế)} \\ x &> 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 1$.

b) Giải bất phương trình: $5x+4 < -3x-2$

$$\begin{aligned} 5x+3x &< -2-4 && \text{(cộng } 3x \text{ vào cả hai vế)} \\ 8x &< -6 \\ x &< -\frac{3}{4} && \text{(nhân } \frac{1}{8} \text{ vào cả hai vế).} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{3}{4}$.

c) Giải bất phương trình: $\frac{2}{3}(2x+3) < 7-4x$

$$\begin{aligned} 2x+3 &< \frac{21}{2}-6x && \text{(nhân } \frac{3}{2} \text{ vào cả hai vế)} \\ 8x+3 &< \frac{21}{2} && \text{(cộng } 6x \text{ vào cả hai vế)} \\ 8x &< \frac{21}{2}-3 && \text{(cộng } -3 \text{ vào cả hai vế)} \\ 8x &< \frac{15}{2} && \text{(cộng 3 vào cả hai vế)} \\ x &< \frac{15}{16} && \text{(nhân } \frac{1}{8} \text{ vào cả hai vế)} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{15}{16}$.

thuvientoanhoc.com

d) Giải bất phương trình: $\frac{1}{4}(x-3) \le 3-2x$

$$\begin{aligned}
(x-3) &\le 4(3-2x) && \text{(nhân 4 vào cả hai vế)}\\
x-3 &\le 12-8x && \text{(nhân phân phối 4 và mở ngoặc)}\\
9x-3 &\le 12 && \text{(cộng } 8x \text{ vào cả hai vế)}\\
9x &\le 15 && \text{(cộng 3 vào cả hai vế)}\\
x &\le \frac{5}{3} && \text{(nhân } \frac{1}{9} \text{ vào cả hai vế)}
\end{aligned}$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \le \frac{5}{3}$.

Bài 9. Giải các bất phương trình

a) $2x+6>1$; b) $0{,}6x+2>6x+9$; c) $1{,}7x+4 \ge 2+1{,}5x$;

d) $\frac{8-3x}{2}-x<5$; e) $3-2x-\frac{6+4x}{3}>0$; f) $0{,}7x+\frac{2x-4}{3}-\frac{x}{6}>1$.

Lời giải.

a) $2x+6 \ge 1$

$2x \ge 1-6$

$2x \ge -5$

$x \ge -\frac{5}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge -\frac{5}{2}$.

b) $0{,}6x+2>6x+9$

$0{,}6x-6x>9-2$

$-5{,}4x>7$

$x<7:(-5{,}4)$

$x<-\frac{35}{27}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-\frac{35}{27}$.

c) $1{,}7x+4 \ge 2+1{,}5x$

$1{,}7x-1{,}5x \ge 2-4$

$0{,}2x \ge -2$

$x \ge -2:0{,}2$

$x \ge -10$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge -10$.

d) $\frac{8-3x}{2}-x<5$

$8-3x-2x<10$

$-5x<10-8$

$x>2:(-5)$

$x>-0{,}4$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>-0{,}4$.

e) $3-2x-\frac{6+4x}{3}>0$

$9-6x-(6+4x)>0$

$9-6x-6-4x>0$

$-10x>-3$

$x<(-3):(-10)$

$x<-0{,}3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-0{,}3$.

f) $0{,}7x+\frac{2x-4}{3}-\frac{x}{6}>1$

$4{,}2x+2(2x-4)-x>6$

$4{,}2x+4x-8-x>6$

$4{,}2x+4x-x>6+8$

$7{,}2x>14$

$x>14:7{,}2$

$x>\frac{35}{18}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>\frac{35}{18}$.

Bài 10. Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn mỗi bất phương trình sau

a) $9-5x>1{,}5$; b) $\frac{3x-17}{20}>\frac{5x+1}{15}$.

thuvientoanhoc.com

Lời giải.

a) Ta có $9-5x>1{,}5$
$$-5x>-7{,}5$$
$$x<\frac{7{,}5}{5}$$
Do đó nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên là $x=1$.

b) Ta có $\dfrac{3x-17}{20}>\dfrac{5x+1}{15}$
$$\frac{15(3x-17)}{300}>\frac{20(5x+1)}{300}$$
$$45x-255>100x+20$$
$$-55x>275$$
$$x<-\frac{275}{55}$$
$$x<-5.$$
Do đó nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên là $x=-6$.

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên chung của hai bất phương trình

a) $15x-4>8$ và $7-6x>-20$;

b) $\dfrac{2}{3}x+5>9$ và $\dfrac{x-18}{7}>1$.

Lời giải.

a) Ta có $15x-4>8$ hay $15x>12$, suy ra $x>\dfrac{12}{15}$
Ta có $7-6x>-20$ hay $-6x>-27$, suy ra $x<\dfrac{27}{6}$.
Vậy nguyên chung của hai bất phương trình trên là $x\in\{1;2;3;4\}$.

b) Ta có $\dfrac{2}{3}x+5>9$ hay $\dfrac{2}{3}x>4$, suy ra $x>6$;
Ta có $\dfrac{x-18}{7}>1$ hay $x-18>7$, suy ra $x>25$.
Vậy nguyên chung của hai bất phương trình trên là $x>25$.

Bài 12. Tìm tập hợp các giá trị của x để biểu thức $\dfrac{3-2x}{5}$ lớn hơn giá trị của biểu thức $\dfrac{x-14}{10}$.

Lời giải.

Giải bất phương trình $\dfrac{3-2x}{5}>\dfrac{x-14}{10}$
$$\frac{2(3-2x)}{10}>\frac{x-14}{10}$$
$$6-4x>x-14$$
$$20>5x$$
$$x<\frac{20}{5}$$
$$x<4.$$
Vậy $x<4$ là giá trị cần tìm.

Bài 13. Cho phương trình $5x-4=3m+2$ (1) trong đó x là ẩn số, m là một số cho trước. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm dương.

thuvientoanhoc.com

Lời giải.

Giải phương trình (1) theo m, ta được $x = \dfrac{3m+6}{5}$. Ta có $x > 0$ khi $\dfrac{3m+6}{5} > 0$, hay $3m > -6$, suy ra $m > -2$.

Vậy $m > -2$ là giá trị cần tìm. □

Bài 14. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{3(2x+1)}{20} + 1 > \dfrac{3x+52}{10}$;

b) $\dfrac{4x-1}{2} + \dfrac{6x-19}{6} \le \dfrac{9x-11}{3}$.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{3(2x+1)}{20} + 1 > \dfrac{3x+52}{10}$

$$\frac{3(2x+1)}{20} + \frac{20}{20} > \frac{2(3x+52)}{20}$$
$$6x + 3 + 20 > 6x + 104$$
$$0x > 81.$$

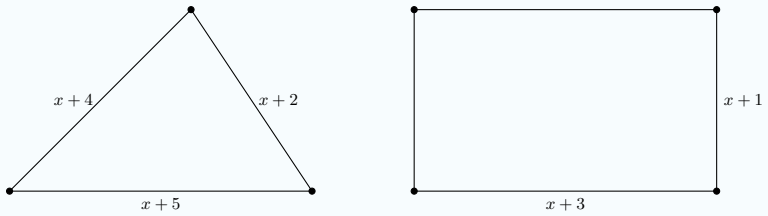
Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có $\dfrac{4x-1}{2} + \dfrac{6x-19}{6} \le \dfrac{9x-11}{3}$

$$\frac{3(4x-1)}{6} + \frac{6x-19}{6} \le \frac{2(9x-11)}{6}$$
$$12x - 3 + 6x - 19 \le 18x - 22$$
$$0x \le 0.$$

Bất phương trình có nghiệm bất kì. □

Bài 15. Tìm $x > 0$ sao cho ở hình vẽ bên dưới chu vi của hình tam giác luôn lớn hơn chu vi của hình chữ nhật



Lời giải.

Chu vi tam giác là $x + 2 + x + 4 + x + 5 = 3x + 11$.

Chu vi hình chữ nhật là $2(x + 3 + x + 1) = 4x + 8$.

Theo bài ra ta có

$$3x + 11 > 4x + 8$$
$$3x - 4x > 8 - 11$$
$$-x > -3$$
$$x < 3$$

Vậy $0 < x < 3$. □

Bài 16. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hằng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền cần gửi. Theo đề bài ta có bất phương trình:

$$0{,}4\%x \ge 3$$
$$\frac{0{,}4}{100} \cdot x \ge 3$$
$$x \ge \frac{3 \cdot 1000}{4}$$
$$x \ge 750.$$

Vậy để có lãi ít nhất 3 triệu/tháng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là 750 triệu. □

Bài 17. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải.
Gọi x km ($x > 0$) là số km mà hành khách có thể đi, ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned} 15 + 12x - 12 &\leq 200 \\ 12x &\leq 200 - 3 \\ x &\leq \frac{197}{12} = 16{,}416\ldots \end{aligned}$$

Vậy số km tối đa khách hàng có thể đi là 16 km. □

Bài 18. Người ta dùng một loại xe tải để chở bia cho một nhà máy. Mỗi thùng bia 24 lon nặng trung bình 6,7 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng bia, biết bác lái xe nặng 65 kg?

Lời giải.
Gọi x thùng ($x \in \mathbb{N}^*$) là số thùng bia mà xe có thể chở, ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned} 65 + 6{,}7x &\leq 5{,}25 \cdot 1000 \\ 6{,}7x &\leq 5185 \\ x &\leq \frac{5185}{6{,}7} = 773{,}880\ldots \end{aligned}$$

Vậy số thùng bia tối đa mà xe có thể chở là 773 thùng. □

Bài 19. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn sau x ngày xuất hàng.

Lời giải.
Sau x ngày khối lượng xi măng được xuất đi là $20x$.
Khối lượng xi măng còn lại trong kho sau x ngày là $100 - 20x$.
Theo bài ra ta có $100 - 20x \geq x$.

$$\begin{aligned} 100 - 20x &\geq x \\ -20x - x &\geq -100 \\ -21x &\geq -100 \\ x &\leq (-100) : (-21) \\ x &\leq \frac{100}{21} \end{aligned}$$

Vậy $0x \in \{1; 2; 3; 4\}$. □

Bài 20. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc và viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ nảng này. Bạn Hà đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6, 5; 6, 5; 5, 5. Hỏi bạn Hà cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để kết quả đạt được của bài thi ít nhất là 6, 25?

Lời giải.

Để tính điểm số trung bình cần đạt, chúng ta có thể sử dụng công thức sau:

$$\text{Điểm trung bình} = \frac{\text{Tổng điểm các kĩ năng}}{\text{Số lượng kĩ năng}}$$

thuvientoanhoc.com

Trong trường hợp này, chúng ta muốn biết điểm số cần đạt trong kĩ năng "nói" để đạt được điểm trung bình ít nhất là 6,25. Điểm số trung bình mong muốn là trung bình của $6{,}5; 6{,}5; 5{,}5$ và một số x (điểm số trong kĩ năng "nói"). Ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{6{,}5+6{,}5+5{,}5+x}{4} &\geq 6{,}25 \\ 18{,}5+x &\geq 25 \\ x &\geq 25-18{,}5 \\ x &\geq 6{,}5. \end{aligned}$$

Vậy, để đạt được điểm trung bình ít nhất là 6,25, bạn Hà cần đạt ít nhất 6,5 điểm trong kĩ năng "nói".

□

thuvientoanhoc.com

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm x sao cho:

a) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $3x-5$;

b) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $3x-5$.

Lời giải.

a) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $3x-5$, nên ta có

$$2x+1 \geq 3x-5 \Rightarrow x \leq 6.$$

b) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $3x-5$, nên ta có

$$2x+1 \leq 3x-5 \Rightarrow x \geq 6.$$

□

Bài 2. Cho bất đẳng thức $a > b$. Kết luận nào sau đây là **không** đúng?

a) $2a > 2b$. b) $-a < -b$. c) $a-3 < b-3$. d) $a-b > 0$.

Lời giải.

Kết luận không đúng là c. Vì $a > b$ thì $a-3 > b-3$. □

Bài 3. Cho $a < b$, hãy so sánh

a) $a+b+5$ với $2b+5$.

b) $-2a-3$ với $-(a+b)-3$.

Lời giải.

a) Ta có $a < b$

$a+b+5 < b+b+5$

$a+b+5 < 2b+5$.

Vậy $a+b+5 < 2b+5$.

b) Ta có $a < b$

$-a > -b$

$-a-a > -b-a$

$-2a-3 > -(a+b)-3$.

Vậy $-2a-3 > -(a+b)-3$.

□

Bài 4. Cho $a > b$, chứng minh:

a) $a-2 > b-2$; b) $-5a < -5b$; c) $2a+3 > 2b+3$; d) $10-4a < 10-4b$.

Lời giải.

a) Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -2, ta được

$$a+(-2) > b+(-2) \text{ hay } a-2 > b-2.$$

b) Ta có $a > b$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $-5 < 0$, ta được

$$a \cdot (-5) < b \cdot (-5) \text{ hay } -5a < -5b.$$

thuvientoanhoc.com

c) Ta có $a > b$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $2 > 0$, ta được

$$a \cdot 2 > b \cdot 2 \text{ hay } 2a > 2b.$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức $2a > 2b$ với 3, ta được

$$2a + 3 > 2b + 3.$$

d) Ta có $a > b$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $-4 < 0$, ta được

$$a \cdot (-4) < b \cdot (-4) \text{ hay } -4a < -4b.$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức $-4a < -4b$ với 10, ta được

$$-4a + 10 < -4b + 10 \text{ hay } 10 - 4a < 10 - 4b.$$

□

Bài 5. Chứng minh:

a) Nếu $a > 5$ thì $\dfrac{a-1}{2} - 2 > 0$;

b) Nếu $b > 7$ thì $4 - \dfrac{b+3}{5} < 2$;

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{2} - 2 &> 0 \\ \frac{a-1-4}{2} &> 0 \\ \frac{a-5}{2} &> 0 \end{aligned}$$

Vì $a > 5$ nên $a - 5 > 0$ và $2 > 0$, suy ra $\dfrac{a-5}{2} > 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned} 4 - \frac{b+3}{5} &< 2 \\ 2 - \frac{b+3}{5} &< 0 \\ \frac{10-b-3}{5} &< 0 \\ \frac{7-b}{5} &< 0. \end{aligned}$$

Vì $b > 7$ nên $7 - b < 0$ và $5 > 0$, suy ra $\dfrac{7-b}{5} < 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 6. Cho $4{,}2 < a < 4{,}3$. Chứng minh $13{,}8 < 3a + 1{,}2 < 14{,}1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 4{,}2 &< a &&< 4{,}3 \\ 12{,}6 &< 3a &&< 12{,}9 \\ 13{,}8 &< 3a + 1{,}2 &&< 14{,}1. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

thuvientoanhoc.com

Bài 7. Cho $a \geq 2$. Chứng minh:

a) $a^2 \geq 2a$;

b) $(a+1)^2 \geq 4a+1$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} a^2 &\geq 2a \\ a^2 - 2a &\geq 0 \\ a(a-2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vì $a \geq 2$ nên $a > 0$ và $a - 2 \geq 0$, suy ra $a(a-2) \geq 0$ đúng.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned} (a+1)^2 &\geq 4a+1 \\ a^2 + 2a + 1 - 4a - 1 &\geq 0 \\ a^2 - 2a &\geq 0 \\ a(a-2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vì $a \geq 2$ nên $a > 0$ và $a - 2 \geq 0$, suy ra $a(a-2) \geq 0$ đúng.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 8. Chứng minh nửa chu vi của một tam giác lớn hơn độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

Lời giải.

Gọi độ dài 3 cạnh của một tam giác lần lượt là a, b, c (a, b, $c > 0$).
Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.
Nửa chu vi của tam giác: $p = \dfrac{a+b+c}{2} > \dfrac{a+a}{2} = a$.
Tương tự, ta có $p > b$, $p > c$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 9. Cho $a > b$, chứng minh rằng:

a) $4a + 4 > 4b + 3$;

b) $1 - 3a < 3 - 3b$.

Lời giải.

a) Từ $a > b$, ta có $4a > 4b$. Suy ra $4a + 4 < 4b + 4$. (1)
Vì $4 > 3$ nên $4b + 4 > 4b + 3$. (2)
Theo tính chất bắc cầu, từ (1) và (2) suy ra $4a + 4 > 4b + 3$.

b) Từ $a > b$, ta có $-3a < -3b$. Suy ra $-3a + 1 < -3b + 1$. (3)
Vì $1 < 3$ nên $-3b + 1 > -3b + 3$. (4)
Theo tính chất bắc cầu, từ (3) và (4) suy ra $1 - 3a < 3 - 3b$.

□

Bài 10. Cho $a < b$. Chứng minh rằng:

a) $2a + 1 < 2b + 2$;

b) $-2a - 5 > -2b - 7$.

Lời giải.

thuvientoanhoc.com

a) Từ $a < b$, ta có $2a < 2b$. Suy ra $2a + 1 < 2b + 1$. (1)
Vì $1 < 2$ nên $2b + 1 < 2b + 2$. (2)
Theo tính chất bắc cầu, từ (1) và (2) suy ra $2a + 1 < 2b + 2$.

b) Từ $a < b$, ta có $-2a > -2b$. Suy ra $-2a - 5 > -2b - 5$. (3)
Vì $-5 > -7$ nên $-2b - 5 > -2b - 7$. (4)
Theo tính chất bắc cầu, từ (3) và (4) suy ra $-2a - 5 > -2b - 7$.

□

Bài 11. Giải các bất phương trình:

a) $5 + 7x \le 11$; b) $2{,}5x - 6 > 9 + 4x$; c) $2x - \dfrac{x-7}{3} < 9$; d) $\dfrac{3x+5}{2} + \dfrac{x}{5} - 0{,}2x \ge 4$.

Lời giải.

a) $5 + 7x \le 11$
$7x \le 11 - 5$
$7x \le 6$
$x \le 6 : 7$
$x \le \dfrac{6}{7}$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \le \dfrac{6}{7}$.

b) $2{,}5x - 6 > 9 + 4x$
$\dfrac{5}{2}x - 4x > 9 + 6$
$\dfrac{-3}{2}x > 15$
$x < 15 : \dfrac{-3}{2}$
$x < -10$
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < -10$.

c) $2x - \dfrac{x-7}{3} < 9$
$6x - (x - 7) < 27$
$6x - x + 7 < 27$
$5x < 27 - 7$
$5x < 20$
$x < 20 : 5$
$x < 4$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 4$.

d) $\dfrac{3x+5}{2} + \dfrac{x}{5} - 0{,}2x \ge 4$
$\dfrac{3x+5}{2} + \dfrac{x}{5} - \dfrac{1}{5}x \ge 4$
$\dfrac{3x+5}{2} \ge 4$
$3x + 5 \ge 8$
$3x \ge 8 - 5$
$3x \ge 3$
$x \ge 3 : 3$
$x \ge 1$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge 1$.

□

Bài 12. Giải các bất phương trình sau:

a) $3 - 0{,}2x < 13$. b) $3 < \dfrac{2x-2}{8}$. c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} \ge \dfrac{1}{4}$. d) $\dfrac{2x-3}{3} \le \dfrac{3x-2}{4}$.

Lời giải.

a) $3 - 0{,}2x < 13$
$-0{,}2x < 10$
$x > -50$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > -50$.

b) $3 < \dfrac{2x-2}{8}$
$2x - 2 > 24$
$2x > 26$
$x > 13$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 13$

thuvientoanhoc.com

c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{-1}{4}$

$x\geq\dfrac{-3}{4}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\geq\dfrac{-3}{4}$.

d) $\dfrac{2x-3}{3}\leq\dfrac{3x-2}{4}$

$4(2x-3)\leq 3(3x-2)$

$8x-12\leq 9x-6$

$-x\leq 6$

$x\geq -6$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\geq -6$. □

Bài 13. Giải các bất phương trình

a) $2x+3(x+1)>5x-(2x-4)$.

b) $(x+1)(2x-1)<2x^2-4x+1$.

Lời giải.

a) Ta có $2x+3(x+1)>5x-(2x-4)$

$5x+3>3x+4$

$2x>1$

$x>\dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $(x+1)(2x-1)<2x^2-4x+1$

$2x^2-x<2x^2-4x+1$

$3x<1$

$x<\dfrac{1}{3}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x<\dfrac{1}{3}$. □

Bài 14. Thanh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Thanh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Thanh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải.

Gọi x (điểm) là số điểm của bài kiểm tra viết của Thanh ($0\leq x\leq 10$).

Vì điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Thanh là 6,7 nên tổng điểm ba bài kiểm tra này là $6{,}7\cdot 3=20{,}1$.

Điểm trung bình của bốn bài kiểm tra là $\dfrac{20{,}1+x}{4}$.

Để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên thì

$$\begin{aligned}\frac{20{,}1+x}{4}&>7{,}0\\ 20{,}1+x&>28\\ x&>7{,}9.\end{aligned}$$

Vậy bài kiểm tra viết của Thanh cần trên 7,9 điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên. □

Bài 15. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường, thầy thể dục đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

Lời giải.

Gọi x (quả) là số quả bóng được ném vào rổ ($0<x\leq 15$).

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}x\cdot 2+(15-x)\cdot(-1)&\geq 15\\ 3x-15&\geq 15\\ 3x&\geq 30\\ x&\geq 10\text{ (nhận)}.\end{aligned}$$

Vậy một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất 10 quả vào rổ. □

Bài 16. Trong cuộc thi "Đố vui để học", mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

Lời giải.

Gọi x là số câu trả lời đúng, $(12-x)$ là số câu trả lời sai $(0 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{N})$.
Để thí sinh được vào vòng tiếp theo thì ta có

$$\begin{aligned} 20+5x-2(12-x) &\geq 50 \\ 20+5x-24+2x &\geq 50 \\ 7x-4 &\geq 50 \\ x &\geq \frac{54}{7} \approx 7{,}714. \end{aligned}$$

Vậy thí sinh muốn vào vòng tiếp theo cần trả lời đúng 8 câu hỏi trở lên. □

Bài 17. Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau:

$$C = \frac{5}{9}(F-32).$$

a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là $95°F$. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C ?

b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là $36°C$. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F ?

Lời giải.

a) Ta có $C = \frac{5}{9}(F-32) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$.
Gọi x là nhiệt độ (theo độ C) ngoài trời khi đó, ta có bất phương trình

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}x+32 &\geq 95 \\ \frac{9}{5}x &\geq 95-32 \\ \frac{9}{5}x &\geq 63 \\ x &\geq 63 : \frac{9}{5} \\ x &\geq 35. \end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là 35 độ C.

b) Gọi y là nhiệt độ ngoài trời của ngày mùa hè (theo độ F), ta có bất phương trình.

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}(y-32) &\geq 36 \\ y-32 &\geq 36 : \frac{5}{9} \\ y-32 &\geq \frac{324}{5} \\ y &\geq \frac{324}{5}+32 \end{aligned}$$

thuvientoanhoc.com

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{484}{5} \\ y &\geq 96{,}8. \end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là 96,8 độ F.

□

Bài 18. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

Lời giải.

Gọi x là số ngày cần để nhà máy đó có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng ($x \in \mathbb{N}^*$).
Theo đề bài, ta có bất phương trình sau

$$\begin{aligned} 300 + 100x &\geq 15\ 300 \\ 100x &\geq 15\ 300 - 300 \\ 100x &\geq 15\ 000 \\ x &\geq 15\ 000 : 100 \\ x &\geq 150. \end{aligned}$$

Vậy nhà máy đó cần ít nhất 150 ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng. □

Bài 19. Đến ngày 31/12/2022, gia đình bác Hoa đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình bác Hoa đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình bác Hoa dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình bác Hoa có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

Lời giải.

Gọi x là số tháng để gia đình bác Hoa tiết kiệm đủ tiền mua chiếc ô tô tải.
Theo đề bài, ta có bất phương trình

$$\begin{aligned} 250 + 10x &\geq 370 \\ 10x &\geq 370 - 250 \\ 10x &\geq 120 \\ x &\geq 120 : 10 \\ x &\geq 12. \end{aligned}$$

Vậy sau ít nhất 12 tháng gia đình bác Hoa có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được. □

Bài 20. Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt BMI (tiếng Anh là Body Mass Index) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau

$$\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$$

trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.
Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương

Nam	Nữ
BMI $<$ 20: Gầy	BMI $<$ 18: Gầy
$20 \leq$ BMI $<$ 25: Bình thường	$18 \leq$ BMI $<$ 23: Bình thường
$25 \leq$ BMI $<$ 30: Béo phì độ I (nhẹ)	$23 \leq$ BMI $<$ 30: Béo phì độ I (nhẹ)
$30 \leq$ BMI $<$ 40: Béo phì độ II (trung bình)	$30 \leq$ BMI $<$ 40: Béo phì độ II (trung bình)
$40 \leq$ BMI: Béo phì độ III (nặng)	$40 \leq$ BMI: Béo phì độ III (nặng)

thuvientoanhoc.com

a) Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

b) Giả sử một người phụ nữ có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

Lời giải.

a) Ta có $\text{BMI} = \dfrac{m}{h^2} \Rightarrow m = \text{BMI} \cdot h^2$. Từ đó ta lập được bảng về thể trạng dựa trên chỉ số cân nặng của một người đàn ông cao 1,68 m như sau

Cân nặng (kg)	Thể trạng
$m < 56{,}448$	Gầy
$56{,}448 \le m < 70{,}56$	Bình thường
$70{,}56 \le m <$	Béo phì độ I (nhẹ)
$84{,}672 \le m < 112{,}896$	Béo phì độ II (trung bình)
$112{,}896 \le m$	Béo phì độ III (nặng)

b) Ta lập được bảng về thể trạng dựa trên chỉ số cân nặng của một người phụ nữ 1,6 m như sau

Cân nặng (kg)	Thể trạng
$m < 46{,}08$	Gầy
$46{,}08 \le m < 58{,}88$	Bình thường
$58{,}88 \le m < 76{,}8$	Béo phì độ I (nhẹ)
$76{,}8 \le m < 102{,}4$	Béo phì độ II (trung bình)
$102{,}4 \le m$	Béo phì độ III (nặng)

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của bất phương trình $-2x + 1 < 0$ là

(A) $x < \dfrac{1}{2}$. (B) $x > \dfrac{1}{2}$. (C) $x \le \dfrac{1}{2}$. (D) $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $-2x + 1 < 0$

$$-2x < -1$$

$$x > \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình $-2x + 1 < 0$ là $x > \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 2. Nghiệm của bất phương trình $1 - 2x \ge 2 - x$ là

(A) $x > \dfrac{1}{2}$. (B) $x < \dfrac{1}{2}$. (C) $x \le -1$. (D) $x \ge -1$.

Lời giải.

Ta có $1 - 2x \ge 2 - x$

$$x \le -1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình $1 - 2x \ge 2 - x$ là $x \le -1$.

Chọn đáp án (C)

thuvientoanhoc.com

Câu 3. Cho $a > b$. Khi đó, ta có
(A) $2a > 3b$. (B) $2x > 2b + 1$. (C) $5a + 1 > 5b + 1$. (D) $-3a < -3b - 3$.

Lời giải.
Ta có $a > b$
$5a > 5b$
$5a + 1 > 5b + 1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Bất đẳng thức $n \leq 3$ có thể được phát biểu là
(A) n lớn hơn 3. (B) n nhỏ hơn 3. (C) n không nhỏ hơn 3. (D) n không lớn hơn 3.

Lời giải.
Ta có "$n \leq 3$" nghĩa là "n nhỏ hơn hoặc bằng 3" hay "n không lớn hơn 3".
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho các số thực x, y, z biết $x < y$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
(A) $x + z < y + z$. (B) $xz < yz$ nếu z âm.
(C) $xz < yz$ nếu z dương. (D) $x - z < y - z$.

Lời giải.
Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm thì được một bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.
Do đó $x < y$ thì $xz > yz$ nếu z âm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Hệ thức nào sau đây là bất đẳng thức?
(A) $1 - \mathrm{x} = 0$. (B) $x^2 - 5x + 6 = 0$. (C) $y^2 \geq 0$. (D) $x = y$.

Lời giải.
Hệ thức $y^2 \geq 0$ là bất đẳng thức vì có chứa dấu "$\geq$".
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Bất phương trình $3x - 5 > 4x + 2$ có nghiệm là
(A) $x > -7$. (B) $x < -7$. (C) $x < 7$. (D) $x \leq -7$.

Lời giải.
Ta có $3x - 5 > 4x + 2$
$3x - 4x > 2 + 5$
$-x > 7$
$x < -7$.
Vậy nghiệm của bất phương trình $3x - 5 > 4x + 2$ là $x < -7$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Bất phương trình $2x - 1 \leq x + 4$ có nghiệm là
(A) $x \leq 5$. (B) $x \geq 5$. (C) $x \leq -5$. (D) $x < 5$.

Lời giải.
Ta có $2x - 1 \leq x + 4$
$2x - x \leq 4 + 1$
$x \leq 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $2x - 1 \leq x + 4$ là $x \leq 5$.
Chọn đáp án (A) □