TME EDUCATION

# TOÀN TẬP
# TỔ HỢP – XÁC SUẤT
# TẬP 02

## TỪ CƠ BẢN ĐẾN NÂNG CAO

---

**20 CHUYÊN ĐỀ**

304 VÍ DỤ MINH HỌA · 654 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**TNTHPTQG · ĐGNL · ĐGTD**

**TRƯƠNG VĂN QUANG THÁI – TME**

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

NĂM HỌC 2026 – 2027

thuvientoanhoc.com

thuvientoanhoc.com

# LỜI NÓI ĐẦU

Kính gửi quý thầy cô và các em học sinh,

Trong một bài toán Tổ hợp – Xác suất, bước khó nhất nhiều khi nằm ngay trước phép tính. Ta cần đếm đối tượng nào? Thứ tự có làm thay đổi kết quả không? Có thể chia bài toán thành những trường hợp nào để đếm đủ mà không đếm trùng? Từ những câu hỏi thường gặp ấy, tôi biên soạn Toàn tập Tổ hợp – Xác suất, Tập 02 để giúp các em hình thành cách suy nghĩ có thể vận dụng khi gặp một đề bài mới.

Một niềm vui từ Tập 01 là 3 trong 4 câu Tổ hợp – Xác suất trong đề thi tốt nghiệp THPT năm 2026 có dạng bài tương ứng với những nội dung đã được luyện tập trong sách. Kết quả ấy là động lực để tôi tiếp tục hoàn thiện Tập 02, chú trọng vào việc nhận diện cấu trúc bài toán khi bối cảnh, dữ kiện hoặc cách hỏi thay đổi.

Tập 02 gồm 20 chuyên đề với 304 ví dụ minh họa và 654 bài tập rèn luyện, được sắp xếp theo ba phần Nền tảng cơ bản, Nâng cao tổng hợp và Bài toán chuyên sâu và nâng cao. Từ các quy tắc đếm, phép toán xác suất và công thức Bayes, các em sẽ từng bước tiếp cận những kĩ năng như bó tập, tạo vách ngăn, đánh số thứ tự, truy hồi và gộp biến cố. Mỗi chuyên đề bắt đầu bằng lý thuyết và phương pháp giải, tiếp đến là các ví dụ để nhận diện cách làm, rồi đến bài tập để các em tự vận dụng.

Trong quá trình biên soạn, tôi sưu tầm và chọn lọc ý tưởng từ nhiều nguồn, đồng thời tự xây dựng thêm các bài toán. Các bài được sắp xếp theo phương pháp giải và mức độ để các em dễ đối chiếu. Hai đề có thể kể những câu chuyện rất khác nhau nhưng cùng dùng một cách đếm. Ngược lại, chỉ một thay đổi nhỏ trong điều kiện cũng có thể khiến cách giải quen thuộc cần được điều chỉnh. Đó là điều tôi mong các em nhận ra qua quá trình luyện tập với cuốn sách này.

Tôi trân trọng gửi cuốn sách đến quý thầy cô như một nguồn tư liệu tham khảo để tổ chức bài giảng, lựa chọn ví dụ và giao bài theo mức độ. Với các em học sinh, thầy mong sau mỗi bài, các em dành thêm một chút thời gian để tự giải thích vì sao mình chọn cách đếm đó và điều kiện nào giúp cách giải ấy đúng. Trả lời được hai câu hỏi này, các em sẽ có cơ sở để tự tin hơn trước những bài chưa từng gặp.

Chúc các em học tốt và vững vàng trong các kỳ thi sắp tới. Tôi mong nhận được góp ý của quý thầy cô và các em để tài liệu ngày càng chính xác, rõ ràng và sát với nhu cầu dạy học.

Mọi góp ý xin gửi qua Zalo 0865 818 455.

Trân trọng,

**Trương Văn Quang Thái**

Toán TME

# MỤC LỤC


**PHẦN I · NỀN TẢNG CƠ BẢN**

| | | |
|---|---|---|
| 01 | Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp | 3 |
| 02 | Biến cố và xác suất của biến cố | 12 |
| 03 | Các phép toán xác suất | 21 |
| 04 | Xác suất có điều kiện | 30 |
| 05 | Xác suất toàn phần và công thức Bayes | 41 |

**PHẦN II · NÂNG CAO TỔNG HỢP**

| | | |
|---|---|---|
| 06 | Hoán vị lặp, hoán vị vòng quanh và hoán vị sai chỗ | 53 |
| 07 | Kĩ năng bó tập và tạo vách ngăn | 65 |
| 08 | Đánh số thứ tự và định lý Kaplansky | 78 |
| 09 | Bài toán chia kẹo Euler | 90 |
| 10 | Nguyên lý bao hàm và loại trừ | 100 |
| 11 | Công thức xác suất Bernoulli | 111 |

**PHẦN III · BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU VÀ NÂNG CAO**

| | | |
|---|---|---|
| 12 | Phân tập đồng dư và lập số | 121 |
| 13 | Đếm tam giác và ứng dụng xác suất | 136 |
| 14 | Đếm tứ giác và ứng dụng xác suất | 154 |
| 15 | Đếm hình trên lưới và xác suất hình học | 170 |
| 16 | Định vị hình học nâng cao | 194 |
| 17 | Bài toán tô màu | 207 |
| 18 | Kĩ năng truy hồi trong bài toán đếm | 221 |
| 19 | Kĩ năng gộp biến cố | 234 |
| 20 | Bài toán bốc bi và chuyển vật | 245 |




thuvientoanhoc.com

Zalo: 0865 818 455

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN I. NỀN TẢNG CƠ BẢN

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-I-01

# BUỔI 01. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

### 1 Quy tắc cộng

Chia công việc thành các phương án loại trừ nhau và bao quát mọi cách thực hiện. Nếu số cách tương ứng là $n_1, \dots, n_k$, tổng số cách là $n_1 + \cdots + n_k$.

### 2 Quy tắc nhân

Chia công việc thành các bước liên tiếp. Nếu ở bước $i$, với mỗi kết quả hợp lệ của các bước trước, luôn có đúng $n_i$ cách tiếp tục thì tổng số cách là $n_1 \cdots n_k$.

### 3 Sơ đồ cây

Gốc là điểm bắt đầu. Mỗi nhánh biểu diễn một lựa chọn tại bước tương ứng. Mỗi đường đi từ gốc tới một nút lá hợp lệ biểu diễn một kết quả hoàn chỉnh.

### 4 Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

| Dạng | Cách nhận diện | Số cách |
|---|---|---|
| **Hoán vị** | Xếp thứ tự cả $n$ phần tử phân biệt | $P_n = n!$ |
| **Chỉnh hợp** | Chọn $k$ phần tử rồi xếp thứ tự | $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ |
| **Tổ hợp** | Chọn $k$ phần tử để lập một nhóm | $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ |

Với $n \geq 1$, dùng $1 \leq k \leq n$ cho chỉnh hợp và $0 \leq k \leq n$ cho tổ hợp. Quy ước $0! = 1$.

$$C_n^k = C_n^{n-k} \ (0 \leq k \leq n), \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \ (0 \leq k < n).$$

**Nhận diện nhanh.** Nếu đổi chỗ hai phần tử làm thay đổi kết quả, thứ tự có vai trò. Nếu chỉ đổi cách liệt kê các thành viên của cùng một nhóm, đó vẫn là một cách chọn.

**Kiểm tra trước khi tính.** Ghi rõ đối tượng cần đếm. Nếu chia trường hợp, kiểm tra các trường hợp rời nhau. Nếu chia bước, kiểm tra số lựa chọn ở mỗi bước. Sau đó mới quyết định dùng hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Một hành khách đi công tác bằng đường bộ từ tỉnh $A$ qua tỉnh $B$, tỉnh $C$ rồi mới tới tỉnh $D$. Biết rằng từ $A$ sang $B$ có 12 tuyến xe buýt, từ $B$ sang $C$ có 15 tuyến xe khách liên tỉnh, và từ $C$ sang $D$ có 8 chuyến xe trung chuyển địa phương. Hỏi hành khách đó có tất cả bao nhiêu hành trình khác nhau để đi từ tỉnh $A$ đến tỉnh $D$?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Một thư viện số của trường THPT lưu trữ 320 đầu sách môn Toán, 450 đầu sách môn Ngữ văn, 230 đầu sách môn Tiếng Anh và 280 đầu sách môn Lịch sử (các đầu sách hoàn toàn khác nhau). Một học sinh muốn chọn ngẫu nhiên đúng 1 đầu sách bất kỳ để đọc trong tuần. Hỏi học sinh có bao nhiêu cách chọn?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Một đoàn gồm 7 bạn tình nguyện viên được phân công ngồi vào một dãy ghế đại biểu gồm đúng 7 ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 7. Mỗi bạn ngồi vào đúng một ghế. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp vị trí ngồi cho 7 bạn tình nguyện viên đó?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, người ta lập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Một lớp học có 20 học sinh xuất sắc. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm gồm đúng 3 bạn đại diện cho lớp đi tham dự diễn đàn thanh niên của trường (các bạn trong nhóm có vai trò bình đẳng, không phân chia vị trí). Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhóm 3 học sinh trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Trong vòng chung kết một giải bóng đá học sinh gồm có 16 đội tuyển tham gia tranh tài. Ban tổ chức sẽ trao 3 bộ huy chương: Huy chương Vàng (cho đội vô địch), Huy chương Bạc (cho đội giải nhì) và Huy chương Đồng (cho đội giải ba). Biết rằng không có hai đội nào đồng hạng. Hỏi có bao nhiêu khả năng trao 3 bộ huy chương nói trên?

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Một đội thanh niên xung kích của trường gồm 10 bạn nam và 6 bạn nữ (tổng cộng 16 bạn). Đoàn trường cần cử ra một tổ công tác gồm 4 bạn đi hỗ trợ kỳ thi học sinh giỏi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn tổ công tác sao cho trong tổ có ít nhất một bạn nữ?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Có 7 bạn học sinh (trong đó có hai bạn An và Bình) được xếp ngồi vào một dãy gồm 7 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Bình luôn luôn ngồi cạnh nhau?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Một câu lạc bộ khoa học kỹ thuật có 8 bạn nam và 8 bạn nữ. Ban chủ nhiệm muốn chọn ra một nhóm dự án gồm 5 bạn, trong đó yêu cầu phải có đúng 3 bạn nam và 2 bạn nữ. Hỏi ban chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn nhóm dự án nói trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Cho tập hợp chữ số $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $S$?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Một thùng hàng linh kiện điện tử chứa 12 linh kiện loại $A$ và 8 linh kiện loại $B$ (tổng cộng 20 linh kiện). Một kỹ thuật viên lấy ngẫu nhiên 4 linh kiện để kiểm định. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho kỹ thuật viên lấy được ít nhất 2 linh kiện loại $A$?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Có 4 bạn nam và 4 bạn nữ xếp thành một hàng dọc gồm 8 người để vào viếng lăng Bác. Có bao nhiêu cách sắp xếp hàng sao cho các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ nhau từng người một?

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Từ tập hợp các chữ số $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta lập các số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên chẵn thỏa mãn yêu cầu đề bài?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Hội đồng sư phạm một trường THPT có 20 giáo viên cốt cán, trong đó có 11 giáo viên khối Khoa học Tự nhiên và 9 giáo viên khối Khoa học Xã hội. Ban Giám hiệu cần thành lập một đoàn thanh tra chuyên đề gồm đúng 5 giáo viên, yêu cầu trong đoàn bắt buộc phải có cả giáo viên Tự nhiên lẫn Xã hội, đồng thời số giáo viên Tự nhiên phải nhiều hơn số giáo viên Xã hội. Hỏi có bao nhiêu cách lập đoàn thanh tra?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Sở Giáo dục và Đào tạo điều động 6 chuyên gia (kí hiệu là $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$) về hỗ trợ chuyên môn cho 3 trường THPT khó khăn $X, Y, Z$, mỗi trường được tiếp nhận đúng 2 chuyên gia. Biết rằng vì lý do phối hợp công tác, hai chuyên gia $A$ và $B$ không được phân công về cùng một trường. Gọi $N$ là tổng số phương án phân công thỏa mãn yêu cầu. Hãy tính giá trị của biểu thức $K = 40N$.

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nền tảng

**Bài 1. TME** Một doanh nghiệp công nghệ có 4 bộ phận độc lập: Kỹ thuật phần mềm gồm 450 nhân sự, Kế toán tài chính 180 nhân sự, Hành chính nhân sự 120 nhân sự và Phát triển kinh doanh 350 nhân sự. Ban Giám đốc muốn chỉ định đúng 1 nhân viên bất kỳ làm đại diện công đoàn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhân viên đại diện đó?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một nhà hàng phục vụ tiệc cưới có thực đơn gồm 8 món khai vị, 12 món chính và 15 món tráng miệng. Một khách đặt bàn muốn lên thực đơn hoàn chỉnh gồm đúng 1 món khai vị, 1 món chính và 1 món tráng miệng. Hỏi khách hàng có bao nhiêu sự lựa chọn khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Có 7 bạn học sinh xếp thành một hàng dọc để chụp ảnh kỷ yếu. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp vị trí hàng dọc cho 7 bạn học sinh trên?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Từ tập hợp các chữ số $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một đội tình nguyện hiến máu nhân đạo gồm có 18 thành viên. Đoàn trường cần chọn ra một kíp trực lưu động gồm đúng 4 thành viên (không phân biệt thứ tự nhiệm vụ). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn kíp trực?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Trong kỳ thi Olympic cấp tỉnh, một trường THPT cử đoàn cán bộ gồm 21 giáo viên làm nhiệm vụ giám thị. Hội đồng thi cần chọn ra đúng 3 giáo viên để phân công phụ trách phòng thi dự phòng số 1. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn 3 giáo viên?

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Một hệ thống khóa vali bảo mật sử dụng mã số bảo mật gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ 10 chữ số $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Hỏi có thể thiết lập được bao nhiêu mã số bảo mật hợp lệ cho vali?

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Một lộ trình vận tải hàng hóa liên tỉnh đi qua 4 trạm trung chuyển $M \to N \to P \to Q$. Biết rằng từ trạm $M$ sang $N$ có 15 tuyến xe, từ $N$ sang $P$ có 14 tuyến xe, và từ $P$ sang $Q$ có 6 tuyến xe. Hỏi có bao nhiêu phương án vận chuyển hàng hóa từ $M$ đến $Q$?

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Hội đồng nhân dân thành phố có 13 đại biểu xuất sắc. Cần thành lập một ban thanh tra giám sát gồm 5 đại biểu (các đại biểu có quyền hạn ngang nhau). Hỏi có bao nhiêu cách thành lập ban thanh tra?

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Bài 10. TME** Một chi đoàn thanh niên có 11 bạn nam và 5 bạn nữ. Bí thư đoàn cần chọn ra 4 bạn đi hỗ trợ chương trình tiếp sức mùa thi sao cho trong 4 bạn được chọn phải có ít nhất 1 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Đội tuyển học sinh giỏi liên môn của một trường có 9 học sinh chuyên Tự nhiên và 7 học sinh chuyên Xã hội. Cần chọn một nhóm gồm 5 học sinh đi thi giao lưu sao cho có đúng 3 học sinh Tự nhiên và 2 học sinh Xã hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Xếp 7 học sinh (trong đó có hai bạn Nam và Việt) ngồi vào một hàng gồm 7 chiếc ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn Nam và bạn Việt không ngồi cạnh nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Từ các chữ số thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta lập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên như vậy?

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Một kiện hàng chứa 14 sản phẩm loại $I$ và 6 sản phẩm loại II. Người kiểm phẩm lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm để thử nghiệm. Hỏi có bao nhiêu cách lấy để thu được đúng 2 sản phẩm loại $I$ và 2 sản phẩm loại II?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Xếp 8 bạn học sinh (trong đó có hai bạn An và Bình) ngồi vào một hàng ngang gồm 8 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp vị trí sao cho bạn An ngồi ở ghế đầu tiên bên trái và bạn Bình ngồi ở ghế cuối cùng bên phải (hoặc ngược lại)?

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Cho một tập hợp $S$ gồm đúng 15 phần tử phân biệt. Hỏi tập hợp $S$ có tất cả bao nhiêu tập hợp con chứa đúng 4 phần tử?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một hộp chứa 10 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu đỏ có kích thước đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 4 viên bi từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách lấy sao cho số viên bi màu xanh lấy được không ít hơn 3 viên?

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Có 4 bạn nam và 5 bạn nữ xếp thành một hàng ngang gồm 9 người để tham gia đồng diễn thể dục. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Cho một đa giác đều $H$ có 16 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ giác lồi có 4 đỉnh đều là đỉnh của đa giác $H$?

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Một đoàn công tác gồm 20 đại biểu, trong đó có hai đại biểu $A$ và $B$. Cần chọn ra một tổ đại biểu gồm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 người được chọn không đồng thời xuất hiện cả hai đại biểu $A$ và $B$?

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 22. TME** Từ tập hợp các chữ số $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Từ tập hợp các chữ số $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta lập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5. Gọi $N$ là số lượng các số thỏa mãn. Hãy tính giá trị của biểu thức $2N$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Một đoàn thanh tra gồm 9 chuyên viên được điều động đi công tác tại 3 đơn vị cơ sở $X, Y, Z$. Cơ sở $X$ cần đúng 4 chuyên viên, cơ sở $Y$ cần đúng 3 chuyên viên và cơ sở $Z$ tiếp nhận 2 chuyên viên còn lại. Hỏi có bao nhiêu phương án phân công chuyên viên?

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Tổ bộ môn Toán - Văn của một trường có 8 giáo viên Toán và 6 giáo viên Văn. Nhà trường thành lập một đoàn giáo viên coi thi gồm 5 người có cả giáo viên Toán và Văn, trong đó số giáo viên Toán nhiều hơn số giáo viên Văn. Hỏi có bao nhiêu cách lập đoàn coi thi?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sao cho các chữ số của mỗi số đều được sắp xếp theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải? Gọi số lượng các số thỏa mãn là $M$, hãy tính giá trị của $20M-120$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một chiếc hộp chứa 7 viên bi đỏ, 6 viên bi xanh và 5 viên bi vàng (các viên bi phân biệt). Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 4 viên bi từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu?

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Xếp 4 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi vào một dãy gồm 7 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 12 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo thành bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy từ 22 điểm đã cho?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Từ tập hợp các chữ số $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho số lập được luôn lớn hơn 4000?

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN I. NỀN TẢNG CƠ BẢN

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Biến cố và xác suất của biến cố
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-I-02

# BUỔI 02. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

### 1 Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên có kết quả chưa biết trước khi thực hiện. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra gọi là **không gian mẫu**, ký hiệu $\Omega$. Nếu $\Omega$ hữu hạn, số phần tử của nó được ký hiệu là $n(\Omega)$.

Khi tung một đồng xu hai lần, quy ước $N$ là mặt ngửa và $S$ là mặt sấp. Ghi kết quả theo thứ tự hai lần tung, ta có $\Omega = \{NN, NS, SN, SS\}$ và $n(\Omega) = 4$.

### 2 Biến cố và kết quả thuận lợi

Một biến cố $A$ là một tập con của $\Omega$. Biến cố $A$ xảy ra khi kết quả quan sát được thuộc $A$. Các phần tử của $A$ gọi là các kết quả thuận lợi cho $A$. Biến cố chắc chắn là $\Omega$, còn biến cố không thể là $\emptyset$.

### 3 Biến cố đối

Biến cố đối $\overline{A}$ xảy ra khi $A$ không xảy ra. Với không gian mẫu hữu hạn, ta có

$$\overline{A} = \Omega \setminus A, \qquad n(\overline{A}) = n(\Omega) - n(A).$$

### 4 Xác suất theo định nghĩa cổ điển

Nếu $\Omega$ hữu hạn, khác rỗng và mọi kết quả sơ cấp đều đồng khả năng, thì

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Ta luôn có $0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ và $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

### 5 Cách lập mô hình đếm

Chọn cách ghi kết quả sao cho các phần tử của $\Omega$ đồng khả năng. Khi thứ tự có vai trò, ghi kết quả theo thứ tự. Khi lấy đồng thời nhiều vật và mỗi nhóm có cùng khả năng được chọn, có thể đếm bằng tổ hợp. Với yêu cầu "ít nhất một", hãy xét xem đếm biến cố đối có gọn hơn không.

**Kiểm tra trước khi tính.** Viết biến cố bằng lời trước khi đếm. Kiểm tra các kết quả sơ cấp có đồng khả năng. Nếu đếm biến cố đối dễ hơn, tính $1 - P(A)$.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Gieo đồng thời 4 con xúc xắc phân biệt, cân đối và đồng chất. Hãy xác định số phần tử của không gian mẫu của phép thử này.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Trong một chiếc hộp có chứa 100 tấm thẻ hoàn toàn giống nhau được đánh số thứ tự từ 1 đến 100. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên tấm thẻ được rút ra là một số chia hết cho 4. Tính $K = 4800P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Một chiếc hộp đựng 5 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 8 viên bi màu vàng có cùng kích thước. Lấy ngẫu nhiên ra đúng 1 viên bi từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để viên bi lấy ra có màu xanh. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một lớp học có 24 học sinh nam và 16 học sinh nữ (tổng cộng 40 học sinh). Giáo viên chủ nhiệm gọi ngẫu nhiên đúng 1 học sinh lên bảng kiểm tra bài cũ. Gọi $P$ là xác suất để học sinh được gọi lên bảng là học sinh nữ. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Trong một hòm phiếu bốc thăm trúng thưởng của hội chợ xuân có tất cả 50 lá thăm, trong đó có đúng 6 lá thăm trúng thưởng và 44 lá thăm không trúng. Một người tham gia rút ngẫu nhiên đúng 1 lá thăm. Gọi $P$ là xác suất để người tham gia đó không trúng thưởng. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. Gọi $P$ là xác suất để số tự nhiên được lập ra là một số chẵn. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Một hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh có kích thước giống nhau (tổng cộng 10 viên bi). Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để lấy được 3 viên bi có cùng màu sắc. Tính $K = 6500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Trong một hộp có 25 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên ra đúng 1 tấm thẻ. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên tấm thẻ được rút ra chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi $P$ là xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt trên của hai con xúc xắc bằng 7 hoặc bằng 8. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Có 5 bạn học sinh (trong đó có hai bạn An và Bình) được xếp ngẫu nhiên ngồi vào một dãy gồm 5 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Gọi $P$ là xác suất để hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Từ tập hợp các chữ số $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau. Gọi $P$ là xác suất để số tự nhiên được lập ra là một số chia hết cho 5. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Trong một hộp chứa 50 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên tấm thẻ là một số có hai chữ số mà tổng hai chữ số của nó bằng 7. Tính $K = 20000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp ngẫu nhiên ngồi vào một dãy gồm 6 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Gọi $P$ là xác suất để các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau. Tính $K = 15000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một đoàn đại biểu gồm 15 cán bộ, trong đó có 9 cán bộ nam và 6 cán bộ nữ. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên ra 4 cán bộ để thành lập đoàn công tác đối ngoại. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 cán bộ được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số cán bộ nam nhiều hơn số cán bộ nữ. Tính $K = 6500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Cho tập hợp gồm 30 số tự nhiên $M = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số phân biệt từ tập hợp $M$. Gọi $P$ là xác suất để tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3. Tính $K = 4060P$.

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nền tảng

**Bài 1. TME** Một người tung liên tiếp một đồng xu cân đối và đồng chất đúng 10 lần. Hỏi không gian mẫu của phép thử này có tất cả bao nhiêu phần tử?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Trong một hộp chứa 20 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên tấm thẻ được rút ra là một số nguyên tố. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Một hộp chứa 8 quả bóng màu đỏ, 7 quả bóng màu xanh và 10 quả bóng màu vàng có kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên ra đúng 1 quả bóng. Gọi $P$ là xác suất để quả bóng lấy ra có màu đỏ. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một chi đoàn có 25 đoàn viên, gồm 15 bạn nam và 10 bạn nữ. Đoàn trường chỉ định ngẫu nhiên 1 bạn đoàn viên làm tổ trưởng tổ tình nguyện. Gọi $P$ là xác suất để bạn được chọn là đoàn viên nam. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Trong một hộp kín đựng 50 chiếc thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên thẻ là số chia hết cho 5. Tính $K = 6000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Một vận động viên bắn súng bắn 1 viên đạn vào bia. Biết xác suất bắn trượt mục tiêu của vận động viên là 0,15. Gọi $P$ là xác suất để vận động viên đó bắn trúng mục tiêu. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Từ tập hợp các chữ số $\{1, 2, 3, 4\}$, người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số đôi một khác nhau. Gọi $P$ là xác suất để số lập được là một số chia hết cho 2. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Trong một đợt phát hành vé xổ số gồm 100 vé được đánh số thứ tự từ 1 đến 100. Người mua rút ngẫu nhiên 1 vé. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên vé là số có hai chữ số giống nhau. Tính $K = 20000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một hộp dụng cụ chứa 20 chiếc bút dạ, trong đó có 4 chiếc bút bị hỏng mực. Giáo viên lấy ngẫu nhiên 1 chiếc bút để ghi bảng. Gọi $P$ là xác suất để giáo viên lấy được chiếc bút sử dụng tốt. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Bài 10. TME** Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng hoàn toàn giống nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để lấy được 2 viên bi có cùng màu sắc. Tính $K = 4200P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một lô hàng gồm 10 sản phẩm điện tử, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Nhân viên kiểm định lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 sản phẩm để kiểm tra. Gọi $P$ là xác suất để trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất một phế phẩm. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Xếp ngẫu nhiên 5 bạn học sinh gồm $A, B, C, D, E$ ngồi vào một hàng ngang gồm 5 chiếc ghế. Gọi $P$ là xác suất để hai bạn $A$ và $B$ không ngồi cạnh nhau. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Trong một hộp có 25 quả cầu được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên đúng 1 quả cầu. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên quả cầu là số chính phương hoặc là số chia hết cho 7. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Từ các chữ số thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. Gọi $P$ là xác suất để số tự nhiên được lập ra là một số lẻ. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi $P$ là xác suất để tích số chấm xuất hiện trên mặt trên của hai con xúc xắc là một số chẵn. Tính $K = 2400P$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Có 5 bạn học sinh được xếp ngẫu nhiên ngồi vào một dãy gồm 5 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Gọi $P$ là xác suất để bạn An (một trong 5 bạn) được xếp ngồi ở vị trí ghế đầu tiên bên trái. Tính $K = 5500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Trong một hộp có chứa 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên thẻ chia hết cho cả 2 và 3. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một bình chứa 7 viên bi màu trắng và 18 viên bi màu đen có kích thước hoàn toàn giống nhau. Lấy ngẫu nhiên ra đúng 1 viên bi. Gọi $P$ là xác suất để viên bi lấy ra là viên bi màu trắng. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một tổ học tập gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh để tham gia thuyết trình. Gọi $P$ là xác suất để chọn được đúng 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Gọi $P$ là xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con xúc xắc là một số chia hết cho 5. Tính $K = 7200P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Một thùng linh kiện gồm 100 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm lỗi. Nhân viên kỹ thuật lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm để kiểm tra. Gọi $P$ là xác suất để nhân viên lấy phải sản phẩm bị lỗi. Tính $K = 30000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 22. TME** Một chiếc hộp chứa 4 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc 3 viên bi từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để 3 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu. Tính $K = 9100P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Xếp ngẫu nhiên 4 bạn nam và 4 bạn nữ ngồi vào một dãy gồm 8 chiếc ghế đặt thành hàng ngang. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi để các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Một đoàn công tác y tế gồm 10 cán bộ, trong đó có 6 bác sĩ và 4 dược sĩ. Ban chỉ đạo chọn ngẫu nhiên ra 4 cán bộ để tăng cường cho tuyến cơ sở. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 cán bộ được chọn có cả bác sĩ và dược sĩ, đồng thời số bác sĩ nhiều hơn số dược sĩ. Tính $K = 6300P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số tự nhiên phân biệt từ tập hợp các số $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Gọi $P$ là xác suất để tổng của 3 số được chọn là một số chẵn. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Từ tập hợp các chữ số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau. Gọi $P$ là xác suất để số tự nhiên được lập ra lớn hơn 5000. Tính $K = 4400P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Có 5 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp ngẫu nhiên ngồi vào một hàng ngang gồm 8 chiếc ghế. Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau. Tính $K = 2800P$.

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Cho một đa giác đều có 12 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đó. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông. Tính $K = 4400P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Trong một chiếc hộp có 9 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Gọi $P$ là xác suất để tích nhận được là một số chẵn. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số tự nhiên phân biệt từ tập hợp gồm 15 số $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$. Gọi $P$ là xác suất để tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3. Tính $K = 9100P$.

KẾT QUẢ

HẾT


thuvientoanhoc.com

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN I. NỀN TẢNG CƠ BẢN

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Các phép toán xác suất
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-I-03

# BUỔI 03. CÁC PHÉP TOÁN XÁC SUẤT

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

### 1 Biến cố hợp và biến cố giao

Cho hai biến cố $A$ và $B$ của cùng một phép thử. Biến cố hợp $A \cup B$ xảy ra khi ít nhất một trong hai biến cố xảy ra. Biến cố giao $A \cap B$ xảy ra khi cả hai biến cố cùng xảy ra.

### 2 Quy tắc cộng xác suất

Với hai biến cố bất kỳ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Nếu $A$ và $B$ xung khắc thì $A \cap B = \emptyset$, do đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

### 3 Biến cố độc lập và quy tắc nhân xác suất

Hai biến cố $A$ và $B$ độc lập khi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Khi đó các cặp $A$ và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $B$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

### 4 Biến cố đối của hợp và giao

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Với yêu cầu "ít nhất một", có thể tính $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

### 5 Phân biệt xung khắc và độc lập

| Tiêu chí | Xung khắc | Độc lập |
|---|---|---|
| **Điều kiện** | $A \cap B = \emptyset$ | $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ |
| **Ví dụ** | Rút một lá bài. Hai biến cố "rút được Át" và "rút được K". | Tung hai đồng xu độc lập. Xét biến cố xuất hiện mặt ngửa ở từng đồng xu. |

Nếu $P(A) > 0$ và $P(B) > 0$, hai biến cố xung khắc không thể độc lập.

**Kiểm tra trước khi tính.** Đổi "ít nhất một" thành phép hợp và "đồng thời" thành phép giao. Chỉ dùng tích $P(A)P(B)$ cho xác suất giao khi đã xác định hai biến cố độc lập.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Cho hai biến cố xung khắc $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = 0{,}4$ và xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}3$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ hoặc biến cố $B$ xảy ra. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Cho hai biến cố bất kỳ $A$ và $B$ cùng liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = 0{,}5$, xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}4$ và xác suất để cả hai biến cố cùng xảy ra là $P(AB) = 0{,}2$. Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Hai xạ thủ thi đấu bắn súng, mỗi người bắn độc lập một phát đạn vào cùng một tấm bia. Biết rằng xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất là 0,8 và xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ hai là 0,7. Gọi $P$ là xác suất để cả hai xạ thủ đều bắn trúng tấm bia. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Hai học sinh Hoàng và Minh độc lập tham dự kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia. Biết rằng xác suất đạt giải của bạn Hoàng là 0,6 và xác suất đạt giải của bạn Minh là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để cả hai bạn đều không đạt giải trong kỳ thi này. Tính $K = 20000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Cho hai biến cố độc lập $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = 0{,}6$ và xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}5$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ hoặc biến cố $B$ xảy ra. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Từ một bộ bài tú lơ khơ gồm đúng 52 quân bài tiêu chuẩn, một người rút ngẫu nhiên ra đúng 1 quân bài. Gọi $P$ là xác suất để quân bài được rút ra là một quân Át hoặc là một quân $K$. Tính $K = 7800P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Hai vận động viên bóng rổ thực hiện ném phạt độc lập vào rổ, mỗi người ném đúng một lần. Biết rằng xác suất ném trúng rổ của vận động viên thứ nhất là 0,8 và xác suất ném trúng rổ của vận động viên thứ hai là 0,6. Gọi $P$ là xác suất để có đúng một vận động viên ném trúng rổ. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Tại một nhà xưởng công nghiệp có lắp đặt hai hệ thống cảm biến báo cháy hoạt động hoàn toàn độc lập với nhau. Khi xảy ra hỏa hoạn, xác suất kích hoạt chuông báo động của hệ thống thứ nhất là 0,8 và của hệ thống thứ hai là 0,6. Giả sử có hỏa hoạn xảy ra, gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một hệ thống cảm biến kích hoạt chuông báo động. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Tại một trung tâm in ấn có hai máy photocopy tự động hoạt động độc lập với nhau. Trong một ngày làm việc, xác suất gặp sự cố kỹ thuật của máy thứ nhất là 0,1 và của máy thứ hai là 0,05. Gọi $P$ là xác suất để trong ngày làm việc đó cả hai máy photocopy đều hoạt động bình thường (không gặp sự cố). Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một mạch điện chiếu sáng gồm hai bóng đèn sợi đốt $Đ_1$ và $Đ_2$ được mắc nối tiếp với nhau. Để toàn mạch phát sáng thì bắt buộc cả hai bóng đèn đều phải hoạt động tốt. Biết rằng hai bóng đèn hoạt động độc lập và xác suất hoạt động tốt trong thời gian bảo hành của bóng $Đ_1$ là 0,9, của bóng $Đ_2$ là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để mạch điện phát sáng trong thời gian bảo hành. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Một trạm bơm nước khẩn cấp sử dụng hai máy bơm độc lập $M_1$ và $M_2$ được mắc song song. Trạm bơm hoạt động thành công khi có ít nhất một máy bơm chạy tốt. Biết rằng xác suất chạy tốt của máy bơm $M_1$ là 0,8 và của máy bơm $M_2$ là 0,7. Gọi $P$ là xác suất để trạm bơm hoạt động thành công khi có lệnh vận hành. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Cho hai biến cố bất kỳ $A$ và $B$ cùng liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của các biến cố thỏa mãn $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$ và xác suất để có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra là $P(A \cup B) = 0{,}8$. Gọi $P$ là xác suất để cả hai biến cố $A$ và $B$ đồng thời cùng xảy ra. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Trong trận chung kết giải bóng đá học sinh, đội bóng cử ba cầu thủ Tuấn, Huy và Nam thực hiện ba quả sút luân lưu 11 mét hoàn toàn độc lập với nhau. Biết rằng xác suất sút vào lưới đối phương của bạn Tuấn là 0,7, của bạn Huy là 0,8 và của bạn Nam là 0,9. Gọi $P$ là xác suất để đội bóng có đúng 2 quả sút thành bàn thắng. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một hệ thống máy chủ ngân hàng bị một mã độc xâm nhập. Ban quản trị mạng phân công ba chuyên gia an ninh mạng độc lập tiến hành rà soát mã độc. Biết rằng xác suất phát hiện ra mã độc của chuyên gia thứ nhất là 0,7, của chuyên gia thứ hai là 0,8 và của chuyên gia thứ ba là 0,9. Gọi $P$ là xác suất để mã độc bị phát hiện bởi ít nhất một chuyên gia. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một nhà máy sản xuất linh kiện bán dẫn có ba dây chuyền tự động hoạt động độc lập nhau. Trong một ca sản xuất, xác suất gặp sự cố của dây chuyền 1 là 0,1, của dây chuyền 2 là 0,15 và của dây chuyền 3 là 0,2. Gọi $P$ là xác suất để trong ca sản xuất đó có đúng một dây chuyền gặp sự cố. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nền tảng

**Bài 1. TME** Cho hai biến cố xung khắc $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của các biến cố lần lượt là $P(A) = 0{,}35$ và $P(B) = 0{,}45$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ hoặc biến cố $B$ xảy ra. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Cho hai biến cố bất kỳ $A$ và $B$ liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$ và xác suất để cả hai biến cố đồng thời xảy ra là $P(AB) = 0{,}4$. Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Hai trạm phát sóng viễn thông $T_1$ và $T_2$ hoạt động hoàn toàn độc lập nhau. Trong một ngày mưa bão, xác suất duy trì phát sóng ổn định của trạm $T_1$ là 0,75 và của trạm $T_2$ là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để cả hai trạm phát sóng đều duy trì hoạt động ổn định. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Hai chuyên gia kinh tế độc lập đưa ra dự báo về thị trường chứng khoán. Xác suất dự báo chính xác của chuyên gia thứ nhất là 0,4 và của chuyên gia thứ hai là 0,5. Gọi $P$ là xác suất để cả hai chuyên gia đều đưa ra dự báo không chính xác. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Tiến hành gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi $P$ là xác suất để cả hai con xúc xắc đều xuất hiện mặt có số chấm bằng 6. Tính $K = 36000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Từ một bộ bài tú lơ khơ gồm đúng 52 lá bài tiêu chuẩn, rút ngẫu nhiên ra đúng 1 lá bài. Gọi $P$ là xác suất để lá bài rút ra mang chất bích hoặc mang chất rô. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Hai vận động viên thi đấu bắn cung độc lập, mỗi người bắn đúng 1 mũi tên vào tấm bia. Biết rằng xác suất bắn trúng hồng tâm của vận động viên thứ nhất là 0,6 và của vận động viên thứ hai là 0,7. Gọi $P$ là xác suất để vận động viên thứ nhất bắn trúng hồng tâm và vận động viên thứ hai bắn trượt hồng tâm. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Cho hai biến cố độc lập $A$ và $B$ cùng liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của các biến cố lần lượt là $P(A) = 0{,}5$ và $P(B) = 0{,}4$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ hoặc biến cố $B$ xảy ra. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một đoạn mạch điện gồm hai công tắc tự động $K_1$ và $K_2$ được mắc nối tiếp với nhau. Hai công tắc đóng mở độc lập, xác suất thông điện của công tắc $K_1$ là 0,8 và của công tắc $K_2$ là 0,9. Đoạn mạch sẽ thông điện khi cả hai công tắc cùng đóng. Gọi $P$ là xác suất để đoạn mạch thông điện. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Bài 10. TME** Hai xạ thủ thuộc đội bắn đĩa bay thực hiện phát bắn độc lập vào một mục tiêu di động. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của xạ thủ thứ nhất là 0,7 và của xạ thủ thứ hai là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một ngôi nhà được bảo vệ bởi hai hệ thống cảm biến chống trộm độc lập. Khi có đột nhập xảy ra, xác suất phát hiện của cảm biến cửa là 0,7 và của cảm biến chuyển động là 0,8. Giả sử có kẻ đột nhập, gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một cảm biến phát hiện được kẻ đột nhập. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Hai sinh viên Lan và Mai độc lập tham gia buổi thi vấn đáp học phần Triết học. Xác suất thi đỗ của bạn Lan là 0,85 và xác suất thi đỗ của bạn Mai là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để trong buổi thi đó chỉ có đúng bạn Lan thi đỗ còn bạn Mai thi trượt. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Hai máy bay quân sự độc lập thả bom vào một mục tiêu quân sự, mỗi máy bay thả đúng 1 quả bom. Xác suất ném trúng mục tiêu của máy bay thứ nhất là 0,6 và của máy bay thứ hai là 0,7. Mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn nếu trúng ít nhất một quả bom. Gọi $P$ là xác suất để mục tiêu bị phá hủy. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một hệ thống bồn chứa khí công nghiệp sử dụng hai van xả áp an toàn mắc song song. Hệ thống được bảo vệ an toàn nếu có ít nhất một van xả mở khi áp suất vượt ngưỡng. Xác suất hoạt động tốt khi gặp sự cố của van thứ nhất là 0,95 và của van thứ hai là 0,9. Biết hai van hoạt động độc lập, gọi $P$ là xác suất để hệ thống được bảo vệ an toàn. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Khảo sát thị trường về hai sản phẩm mới $X$ và $Y$. Chọn ngẫu nhiên một người tiêu dùng, xác suất người đó mua sản phẩm $X$ là 0,4, xác suất mua sản phẩm $Y$ là 0,6 và xác suất mua ít nhất một trong hai sản phẩm là 0,7. Gọi $P$ là xác suất để người tiêu dùng đó mua cả hai sản phẩm $X$ và $Y$. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ có xác suất thỏa mãn $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$ và xác suất giao $P(AB) = 0{,}35$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ không xảy ra nhưng biến cố $B$ xảy ra. Tính $K = 8000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Hai thợ câu cá ngồi câu độc lập bên hồ nước. Xác suất câu được cá trong buổi sáng của người thứ nhất là 0,6 và của người thứ hai là 0,5. Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một người câu được cá trong buổi sáng đó. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Hệ thống cung cấp điện cho phòng mổ bệnh viện gồm ba rơ-le an toàn $R_1, R_2, R_3$ mắc nối tiếp nhau. Hệ thống dẫn điện tốt khi cả ba rơ-le cùng đóng. Biết các rơ-le đóng độc lập nhau với xác suất lần lượt là 0,8; 0,9 và 0,85. Gọi $P$ là xác suất để hệ thống dẫn điện tốt. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Hai hạt giống lúa thuần chủng được gieo trồng trong điều kiện phòng thí nghiệm hoàn toàn độc lập nhau. Xác suất nảy mầm của hạt thứ nhất là 0,9 và của hạt thứ hai là 0,8. Gọi $P$ là xác suất để trong hai hạt được gieo chỉ có đúng một hạt nảy mầm. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Hai bác sĩ chuyên khoa chẩn đoán độc lập cho cùng một bệnh nhân mắc một căn bệnh đặc biệt. Xác suất chẩn đoán đúng bệnh của bác sĩ thứ nhất là 0,85 và của bác sĩ thứ hai là 0,9. Gọi $P$ là xác suất để cả hai bác sĩ đều đưa ra kết luận chẩn đoán sai. Tính $K = 100000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Cho hai biến cố độc lập $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của các biến cố lần lượt là $P(A) = 0{,}6$ và $P(B) = 0{,}4$. Gọi $P$ là xác suất để biến cố $A$ xảy ra hoặc biến cố $B$ không xảy ra. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 22. TME** Ba xạ thủ thuộc lực lượng đặc nhiệm bắn độc lập mỗi người một viên đạn vào cùng một mục tiêu di động. Xác suất bắn trúng mục tiêu của ba xạ thủ lần lượt là 0,8; 0,7 và 0,6. Gọi $P$ là xác suất để có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Ba vận động viên ném lao thi đấu vượt qua mốc chuẩn 80 mét hoàn toàn độc lập nhau. Xác suất ném vượt qua mốc chuẩn của vận động viên $A$ là 0,8, của vận động viên $B$ là 0,7 và của vận động viên $C$ là 0,6. Gọi $P$ là xác suất để có đúng hai vận động viên ném vượt qua mốc chuẩn. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Ba trạm quan trắc địa chấn tự động đặt tại ba khu vực khác nhau hoạt động độc lập nhằm ghi nhận sóng địa chấn từ một trận động đất. Xác suất ghi nhận tín hiệu chính xác của ba trạm lần lượt là 0,8; 0,7 và 0,6. Gọi $P$ là xác suất để cả ba trạm quan trắc đều không ghi nhận được tín hiệu chính xác. Tính $K = 50000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Ba ứng viên độc lập tham gia vòng phỏng vấn tuyển dụng trực tiếp vào một công ty phần mềm. Xác suất trúng tuyển của ứng viên 1 là 0,7, của ứng viên 2 là 0,6 và của ứng viên 3 là 0,5. Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất hai ứng viên trúng tuyển vào công ty. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Một xưởng cơ khí chính xác có ba dây chuyền tự động gia công chi tiết máy độc lập nhau. Xác suất sản xuất ra một chi tiết bị lỗi của dây chuyền 1 là 0,1, của dây chuyền 2 là 0,1 và của dây chuyền 3 là 0,2. Lấy ngẫu nhiên mỗi dây chuyền đúng một chi tiết máy. Gọi $P$ là xác suất để trong ba chi tiết máy lấy ra có ít nhất một chi tiết bị lỗi. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một mạch điện thắp sáng gồm ba bóng đèn, trong đó cụm gồm bóng $Đ_1$ mắc song song với bóng $Đ_2$, rồi toàn bộ cụm đó mắc nối tiếp với bóng $Đ_3$. Các bóng đèn hoạt động độc lập và xác suất phát sáng tốt của bóng $Đ_1$ là 0,8, của bóng $Đ_2$ là 0,8 và của bóng $Đ_3$ là 0,9. Đoạn mạch sẽ phát sáng khi cụm ($Đ_1$ song song $Đ_2$) phát sáng đồng thời bóng $Đ_3$ phát sáng. Gọi $P$ là xác suất để mạch điện phát sáng. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Hệ thống đường ống dẫn dầu công nghiệp gồm ba van an toàn tự động, trong đó nhánh gồm van $V_1$ mắc nối tiếp với van $V_2$, rồi nhánh đó được mắc song song với nhánh chứa van $V_3$. Dầu sẽ chảy qua hệ thống nếu ít nhất một trong hai nhánh thông suốt. Biết các van mở độc lập với xác suất mở của van $V_1$ là 0,8, của van $V_2$ là 0,8 và của van $V_3$ là 0,7. Gọi $P$ là xác suất để dầu chảy qua được hệ thống. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Bốn trạm radar phòng không độc lập quét sóng bảo vệ một vùng trời. Xác suất phát hiện một mục tiêu bay xâm nhập của mỗi trạm radar đều bằng 0,8. Giả sử có một mục tiêu bay xâm nhập, gọi $P$ là xác suất để có đúng ba trạm radar phát hiện được mục tiêu đó. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Trong loạt sút luân lưu 11 mét, ba cầu thủ bóng đá độc lập thực hiện ba lượt sút vào khung thành đối phương. Biết rằng xác suất sút bóng vào lưới của cầu thủ thứ nhất là 0,7, của cầu thủ thứ hai là 0,8 và của cầu thủ thứ ba là 0,9. Gọi $P$ là xác suất để đội bóng ghi được đúng một bàn thắng trong loạt sút đó. Tính $K = 20000P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN I. NỀN TẢNG CƠ BẢN

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Xác suất có điều kiện
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-I-04

# BUỔI 04. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

### 1 Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố $A$ và $B$ thuộc cùng một phép thử, với $P(B) > 0$. Xác suất của $A$ khi biết $B$ đã xảy ra được ký hiệu là $P(A \mid B)$ và được tính bằng

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Trong $P(A \mid B)$, biến cố đứng sau dấu | là điều kiện. Khi đảo thứ tự, mẫu số đổi thành $P(A)$ và cần có $P(A) > 0$.

### 2 Không gian mẫu thu hẹp

Khi biết $B$ đã xảy ra, chỉ xét các kết quả thuộc $B$. Nếu không gian mẫu hữu hạn và các kết quả sơ cấp đồng khả năng, ta có

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

### 3 Đọc bảng hai chiều

Trong bảng sau, mỗi ô ghi số kết quả thuộc đồng thời nhóm ở hàng và nhóm ở cột.

| Phân loại | $B$ | $\overline{B}$ | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| $A$ | $n(A \cap B)$ | $n(A \cap \overline{B})$ | $n(A)$ |
| $\overline{A}$ | $n(\overline{A} \cap B)$ | $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $n(\overline{A})$ |
| **Tổng cộng** | $n(B)$ | $n(\overline{B})$ | $n(\Omega)$ |

Để tính $P(A \mid B)$, chia ô giao cho tổng cột $B$. Để tính $P(B \mid A)$, chia cùng ô giao đó cho tổng hàng $A$. Cách đọc này áp dụng khi chọn đều từ các đối tượng trong bảng và nhóm điều kiện có số lượng dương.

### 4 Quy tắc nhân xác suất

Nếu $P(A) > 0$, thì $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$. Nếu $P(A \cap B) > 0$, có thể mở rộng thành

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B).$$

### 5 Sơ đồ cây

Ghi xác suất của kết quả bước đầu trên nhánh đầu tiên. Ở các bước tiếp theo, ghi xác suất có điều kiện theo các kết quả đã đi qua. Nhân xác suất dọc một đường đi. Nếu biến cố gồm nhiều đường đi loại trừ nhau, cộng xác suất của các đường đi đó.

## 6 Bảng số liệu chứa ẩn

Dùng tổng hàng và tổng cột để biểu diễn các ô còn thiếu theo $x$. Nếu đề cho $P(A \mid B) = p_0$, lập phương trình $n(A \cap B) = p_0 n(B)$ với $n(B) > 0$. Kiểm tra các số lượng thu được là số nguyên không âm và phù hợp với các tổng trong bảng.

**Kiểm tra trước khi tính.** Gạch chân dữ kiện sau chữ "biết". Dùng biến cố tương ứng làm điều kiện, rồi xác định phần giao với biến cố cần tính. Kiểm tra mẫu số dương trước khi chia.

# B VÍ DỤ MINH HỌA

## Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ cùng liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}5$ và xác suất để cả hai biến cố cùng xảy ra là $P(A \cap B) = 0{,}2$. Gọi $P$ là xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Khảo sát thị lực của 100 học sinh tại một trường THPT được ghi lại trong bảng số liệu sau, trong đó số học sinh nam bị cận thị là một số nguyên dương $x$ chưa được ghi nhận cụ thể:

| Giới tính | Bị cận thị | Không bị cận thị | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Nam** | $x$ | 20 | $x + 20$ |
| **Nữ** | 24 | 36 | 60 |
| **Tổng cộng** | $x + 24$ | 56 | 100 |

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số những học sinh bị cận thị của trường. Gọi $P$ là xác suất để học sinh được chọn đó là học sinh nam. Tính $K = 4400P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất một lần. Quan sát thấy số chấm xuất hiện trên mặt trên là một số chẵn. Gọi $P$ là xác suất để số chấm xuất hiện đó là một số chia hết cho 3. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một chiếc hộp kín đựng 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh có kích thước giống nhau (tổng cộng 10 quả cầu). Một người lấy lần lượt từng quả cầu ra khỏi hộp mà không hoàn lại. Giả sử quả cầu thứ nhất lấy ra có màu đỏ. Gọi $P$ là xác suất để quả cầu thứ hai lấy ra có màu xanh. Tính $K = 2700P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}6$ và xác suất có điều kiện của biến cố $A$ khi biết $B$ đã xảy ra là $P(A \mid B) = 0{,}7$. Gọi $P$ là xác suất để cả hai biến cố $A$ và $B$ đồng thời xảy ra. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

**Ví dụ 6. TME** Tại một trường THPT, khảo sát ngẫu nhiên toàn thể học sinh cho thấy có 60% học sinh đăng ký học thêm môn Tiếng Anh và 40% học sinh đăng ký học cả hai môn Tiếng Anh và Tin học ứng dụng. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số các học sinh có đăng ký học môn Tiếng Anh. Gọi $P$ là xác suất để học sinh đó cũng đăng ký học môn Tin học ứng dụng. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Một chiếc hộp đựng 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh (tổng cộng 12 quả cầu). Một người lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả cầu từ hộp theo phương thức không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để cả hai quả cầu lấy ra đều có màu đỏ. Tính $K = 4400P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Bảng số liệu sau đây thống kê trình độ ngoại ngữ và tin học của một nhóm nhân viên tại một công ty công nghệ, trong đó số nhân viên biết tiếng Anh nhưng không thành thạo tin học là một số nguyên dương $x$ chưa biết:

| Ngoại ngữ | Thành thạo tin học | Không thành thạo tin học | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Biết tiếng Anh** | 90 | $x$ | $90 + x$ |
| **Không biết tiếng Anh** | 30 | 50 | 80 |
| **Tổng cộng** | 120 | $x + 50$ | $x + 170$ |

Biết rằng khi chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong số những người biết tiếng Anh, xác suất để người đó thành thạo tin học bằng 0,6. Từ nhóm nhân viên trên, chọn ngẫu nhiên một nhân viên thành thạo tin học. Gọi $P$ là xác suất để nhân viên được chọn có biết tiếng Anh. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Sau khi gieo, người quan sát thông báo tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt bằng 8. Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 4 chấm. Tính $K = 6000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một kiện hàng linh kiện máy tính gồm 8 sản phẩm loại $I$ và 4 sản phẩm loại II có hình thức giống hệt nhau. Nhân viên kiểm tra chất lượng lấy lần lượt từng sản phẩm ra khỏi kiện hàng mà không hoàn lại. Giả sử sản phẩm thứ nhất lấy ra là sản phẩm loại II. Gọi $P$ là xác suất để sản phẩm thứ hai lấy ra cũng là sản phẩm loại II. Tính $K = 4400P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Khảo sát ngẫu nhiên một gia đình có đúng hai người con. Giả thiết rằng xác suất sinh con trai và sinh con gái là bằng nhau (đều bằng 0,5) và giới tính của các lần sinh là độc lập. Người điều tra biết được gia đình này có ít nhất một người con gái. Gọi $P$ là xác suất để cả hai người con của gia đình đó đều là con gái. Tính $K = 4200P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Cho hai biến cố bất kỳ $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của các biến cố thỏa mãn $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$ và xác suất của biến cố hợp là $P(A \cup B) = 0{,}8$. Gọi $P$ là xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Một chiếc hộp chứa 5 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đen có kích thước giống nhau (tổng cộng 12 viên bi). Một người rút ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ hộp mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai có màu đen. Tính $K = 2400P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Khảo sát 150 người tại một phòng khám chuyên khoa, trong đó có 30 người thực sự mắc bệnh $X$ và 120 người không mắc bệnh $X$. Tiến hành xét nghiệm nhanh: Trong số 30 người có bệnh có 27 người cho kết quả dương tính; trong số 120 người không có bệnh có 12 người bị dương tính giả. Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người có kết quả xét nghiệm dương tính. Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự mắc bệnh $X$. Tính $K = 2600P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Trong một hộp có 10 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 10. Một người rút ngẫu nhiên lần lượt 3 tấm thẻ liên tiếp mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để cả 3 tấm thẻ rút ra đều mang số chẵn. Tính $K = 18000P$.

KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nền tảng

**Bài 1. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ cùng liên quan đến một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}8$ và xác suất để cả hai biến cố cùng xảy ra là $P(A \cap B) = 0{,}32$. Gọi $P$ là xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Khảo sát 80 học sinh tại một câu lạc bộ thể thao về việc yêu thích môn bóng đá được ghi nhận ở bảng số liệu sau, trong đó số bạn nữ yêu thích bóng đá là một số nguyên dương $x$ chưa biết:

| Giới tính | Thích bóng đá | Không thích bóng đá | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Nam** | 35 | 15 | 50 |
| **Nữ** | $x$ | 18 | 30 |
| **Tổng cộng** | $x + 35$ | 33 | 80 |

Chọn ngẫu nhiên một bạn trong số các bạn nữ của câu lạc bộ. Gọi $P$ là xác suất để bạn nữ được chọn yêu thích môn bóng đá. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất một lần. Biết rằng số chấm xuất hiện trên mặt trên là một số lớn hơn 3. Gọi $P$ là xác suất để số chấm xuất hiện đó là một số lẻ. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một chiếc hộp chứa 8 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh có kích thước giống nhau. Lấy lần lượt 2 viên bi ra khỏi hộp mà không hoàn lại. Giả sử viên bi thứ nhất lấy ra có màu đỏ. Gọi $P$ là xác suất để viên bi thứ hai lấy ra cũng có màu đỏ. Tính $K = 2200P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = 0{,}5$ và xác suất có điều kiện của $B$ khi biết $A$ đã xảy ra là $P(B \mid A) = 0{,}6$. Gọi $P$ là xác suất để cả hai biến cố $A$ và $B$ đồng thời xảy ra. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Tại một công ty viễn thông có 70% nhân viên biết lái xe ô tô và 35% nhân viên vừa biết lái xe ô tô vừa có chứng chỉ ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong số các nhân viên biết lái xe ô tô. Gọi $P$ là xác suất để nhân viên đó có chứng chỉ ngoại ngữ. Tính $K = 2400P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Tung đồng thời hai đồng xu cân đối và đồng chất một lần. Người quan sát thông báo có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt ngửa. Gọi $P$ là xác suất để cả hai đồng xu đều xuất hiện mặt ngửa. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Trong một hộp có 15 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên đúng 1 tấm thẻ và biết rằng số ghi trên thẻ là một số lẻ. Gọi $P$ là xác suất để số ghi trên tấm thẻ đó là một số nguyên tố. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Cho hai biến cố độc lập $A$ và $B$ liên quan đến cùng một phép thử ngẫu nhiên. Biết rằng xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = 0{,}4$ và xác suất của biến cố $B$ là $P(B) = 0{,}5$. Gọi $P$ là xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Bài 10. TME** Một hộp đựng 6 quả cầu đỏ và 4 quả cầu xanh có kích thước giống nhau. Người ta lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả cầu từ hộp theo phương thức không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để cả hai quả cầu lấy ra đều có màu đỏ. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

**Bài 11. TME** Bảng số liệu sau đây thống kê tình hình học thêm hai môn Toán và Tiếng Anh của 160 học sinh khối 12, trong đó số học sinh học thêm cả hai môn là một số nguyên dương $x$:

| Môn học thêm | Có học tiếng Anh | Không học tiếng Anh | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Có học Toán** | $x$ | 30 | 100 |
| **Không học Toán** | 30 | 30 | 60 |
| **Tổng cộng** | $x+30$ | 60 | 160 |

Biết rằng khi chọn ngẫu nhiên một bạn trong số các bạn có học thêm môn Toán, xác suất bạn đó học thêm cả Tiếng Anh bằng 0,7. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong số các bạn có học thêm môn Tiếng Anh. Gọi $P$ là xác suất để bạn học sinh đó cũng học thêm môn Toán. Tính $K=2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt bằng 7. Gọi $P$ là xác suất để con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn. Tính $K=2600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Một chiếc túi chứa 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen có kích thước hoàn toàn giống nhau. Người ta rút lần lượt 2 viên bi ra khỏi túi mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để rút được đúng 1 viên bi màu trắng và 1 viên bi màu đen. Tính $K=2700P$.

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Khảo sát một gia đình có đúng 2 người con. Biết rằng người con đầu lòng của gia đình đó là con trai. Giả thiết xác suất sinh con trai và con gái là như nhau và các lần sinh độc lập. Gọi $P$ là xác suất để người con thứ hai của gia đình là con gái. Tính $K=3400P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Cho hai biến cố bất kỳ $A$ và $B$ có xác suất thỏa mãn $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$ và xác suất hợp $P(A\cup B)=0{,}88$. Gọi $P$ là xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K=2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Một kiện hàng gồm 20 sản phẩm cơ khí, trong đó có 15 chính phẩm và 5 phế phẩm. Nhân viên kiểm tra lần lượt từng sản phẩm mà không hoàn lại. Biết rằng sản phẩm thứ nhất kiểm tra là chính phẩm. Gọi $P$ là xác suất để sản phẩm thứ hai kiểm tra là phế phẩm. Tính $K = 7600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Khảo sát 120 khách hàng mua sắm tại một cửa hàng thời trang được tổng hợp ở bảng số liệu sau, trong đó số khách hàng mua cả áo sơ mi và quần âu là một số nguyên dương $x$:

| Mặt hàng | Có mua quần âu | Không mua quần âu | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Có mua áo sơ mi** | $x$ | 50 | 80 |
| **Không mua áo sơ mi** | 20 | 20 | 40 |
| **Tổng cộng** | $x + 20$ | 70 | 120 |

Chọn ngẫu nhiên một khách hàng trong số những người đã mua áo sơ mi. Gọi $P$ là xác suất để khách hàng đó cũng mua quần âu. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Biết rằng có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm. Gọi $P$ là xác suất để cả hai con xúc xắc đều xuất hiện mặt 6 chấm. Tính $K = 22000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Trong một bình đựng 8 viên bi màu vàng và 6 viên bi màu xanh. Người ta lấy lần lượt 2 viên bi không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để cả hai viên bi lấy ra đều có màu xanh. Tính $K = 9100P$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ thỏa mãn $P(B) = 0{,}5$, xác suất có điều kiện $P(A \mid B) = 0{,}8$ và $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}4$. Gọi $P$ là xác suất không điều kiện của biến cố $A$. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Một chiếc bình chứa 4 quả bóng màu đỏ và 6 quả bóng màu trắng. Một người rút lần lượt từng quả bóng mà không hoàn lại cho đến khi rút được quả bóng màu đỏ đầu tiên thì dừng lại. Gọi $P$ là xác suất để quá trình rút bóng dừng lại ở đúng lần thứ hai. Tính $K = 4500P$.

KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

## Vận dụng

**Bài 22. TME** Một chiếc hộp chứa 4 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh có kích thước giống nhau. Người ta rút ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ hộp mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai có màu đỏ. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Tiến hành xét nghiệm y tế sàng lọc một căn bệnh cho 200 người, trong đó có 40 người thực sự mắc bệnh và 160 người không mắc bệnh. Kết quả xét nghiệm cho thấy: Trong số 40 người có bệnh có 36 người cho kết quả dương tính; trong số 160 người không mắc bệnh có 16 người bị dương tính giả. Chọn ngẫu nhiên một người có kết quả xét nghiệm dương tính. Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự mắc bệnh. Tính $K = 2600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Trong một chiếc hộp có chứa 12 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 12. Người ta rút lần lượt 3 tấm thẻ liên tiếp mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để cả 3 tấm thẻ rút ra đều mang số chia hết cho 3. Tính $K = 88000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Một hộp chứa 7 quả cầu màu trắng và 3 quả cầu màu đen. Người ta lấy lần lượt 3 quả cầu ra khỏi hộp mà không hoàn lại. Gọi $P$ là xác suất để quả cầu thứ nhất và quả cầu thứ ba có màu trắng, còn quả cầu thứ hai có màu đen. Tính $K = 10000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Bảng số liệu sau đây thống kê phương thức thanh toán của 300 khách hàng tại một siêu thị, trong đó số khách hàng thanh toán không dùng tiền mặt bằng thẻ tín dụng là một số nguyên dương $x$:

| Thanh toán | Thẻ tín dụng | Cách khác | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Không dùng tiền mặt** | $x$ | 72 | 180 |
| **Có dùng tiền mặt** | 0 | 120 | 120 |
| **Tổng cộng** | $x$ | 192 | 300 |

Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai khách hàng trong số 300 người được khảo sát. Biết rằng ít nhất một trong hai người thanh toán bằng thẻ tín dụng. Tính xác suất để cả hai người đều không dùng tiền mặt. Viết kết quả dưới dạng phần trăm, làm tròn đến một chữ số thập phân và điền phần số (bỏ ký hiệu %).

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ có xác suất thỏa mãn $P(A) = 0{,}4$, $P(B \mid A) = 0{,}5$ và $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}2$. Gọi $P$ là xác suất có điều kiện của biến cố $A$ khi biết biến cố $B$ đã xảy ra. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Có hai chiếc hộp kín đựng bi: Hộp I chứa 3 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh; Hộp II chứa 4 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh. Người ta gieo một đồng xu cân đối: Nếu đồng xu xuất hiện mặt ngửa thì chọn Hộp I, nếu xuất hiện mặt sấp thì chọn Hộp II. Sau đó, từ hộp đã chọn rút ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Gọi $P$ là xác suất để viên bi rút ra có màu đỏ. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một bài thi trắc nghiệm gồm một câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có đúng 1 phương án chính xác. Một thí sinh hoặc là nắm vững kiến thức để chọn đúng phương án (với xác suất 0,6), hoặc là đoán ngẫu nhiên một phương án (với xác suất 0,4). Biết rằng nếu đoán ngẫu nhiên thì xác suất trúng phương án đúng là 0,25. Gọi $P$ là xác suất để thí sinh đó trả lời đúng câu hỏi. Tính $K = 3000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Rút ngẫu nhiên đồng thời ba lá từ bộ bài 52 lá tiêu chuẩn. Biết rằng ba lá rút được thuộc đúng hai chất trong bốn chất cơ, rô, chuồn, bích. Tính xác suất để trong ba lá có ít nhất một lá Át. Viết kết quả dưới dạng phần trăm, làm tròn đến một chữ số thập phân và điền phần số (bỏ ký hiệu %).

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN I. NỀN TẢNG CƠ BẢN

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Xác suất toàn phần và công thức Bayes
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-I-05

# BUỔI 05. XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

### 1 Hệ đầy đủ các biến cố

Các biến cố $A_1, \dots, A_n$ tạo thành một hệ đầy đủ nếu chúng đôi một xung khắc và hợp của chúng bằng $\Omega$. Khi đó mỗi kết quả của phép thử thuộc đúng một biến cố trong hệ.

### 2 Công thức xác suất toàn phần

Nếu $A_1, \dots, A_n$ là một hệ đầy đủ với $P(A_i) > 0$ cho mọi $i$, thì

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Mỗi số hạng là xác suất để $B$ xảy ra đồng thời với trường hợp $A_i$.

### 3 Công thức Bayes

Khi $P(B) > 0$, xác suất của trường hợp $A_k$ sau khi biết $B$ đã xảy ra là

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Tử số là xác suất của nhánh $A_k$ dẫn đến $B$. Mẫu số là tổng xác suất của mọi nhánh dẫn đến $B$.

### 4 Đọc sơ đồ cây

Tầng đầu ghi các trường hợp $A_i$. Từ mỗi trường hợp, vẽ hai nhánh $B$ và $\overline{B}$ với xác suất có điều kiện tương ứng. Nhân xác suất dọc một đường đi và cộng xác suất các đường đi phù hợp.

### 5 Bài toán tìm tham số

Biểu diễn xác suất chưa biết theo ẩn. Dùng tổng xác suất các trường hợp bằng 1 để giảm số ẩn, rồi lập phương trình bằng công thức toàn phần hoặc Bayes theo dữ kiện. Sau khi giải, kiểm tra mọi xác suất thuộc $[0;1]$ và mẫu số trong công thức Bayes dương.

**Kiểm tra trước khi tính.** Tách các nguồn thành những trường hợp đôi một xung khắc. Nếu biết nguồn và hỏi kết quả, đọc theo nhánh. Nếu biết kết quả và hỏi nguồn, dùng Bayes và cộng mọi nhánh dẫn tới kết quả đó ở mẫu số.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Một nhà máy sản xuất bóng đèn có hai phân xưởng $X_1$ và $X_2$. Phân xưởng $X_1$ sản xuất 60% tổng sản lượng bóng đèn của nhà máy, phân xưởng $X_2$ sản xuất 40% sản lượng còn lại. Tỷ lệ phế phẩm của phân xưởng $X_1$ là 0,05 và của phân xưởng $X_2$ là 0,03. Chọn ngẫu nhiên một bóng đèn từ kho thành phẩm chung của nhà máy. Gọi $P$ là xác suất để bóng đèn được chọn là một phế phẩm. Tính $K = 50000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Tại một xưởng may công nghiệp, hai dây chuyền may $A$ và $B$ cùng gia công một đơn hàng áo sơ mi. Dây chuyền $B$ sản xuất đúng 300 chiếc áo, còn dây chuyền $A$ sản xuất $x$ chiếc áo ($x$ là số nguyên dương chưa biết). Tỷ lệ áo bị lỗi đường chỉ của dây chuyền $A$ là 0,02 và của dây chuyền $B$ là 0,04. Người kiểm tra chất lượng lấy ngẫu nhiên một chiếc áo trong toàn bộ đơn hàng thì thấy chiếc áo đó bị lỗi đường chỉ. Biết rằng xác suất để chiếc áo lỗi này do dây chuyền $B$ sản xuất bằng $\frac{6}{13}$. Gọi $P$ là xác suất để chiếc áo bị lỗi này do dây chuyền $A$ sản xuất. Tính $K = 2600P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Một trung tâm thiết bị công nghệ nhập linh kiện điện tử từ ba nhà cung ứng $N_1, N_2, N_3$ với tỷ lệ số lượng lần lượt là 50%, 30% và 20%. Tỷ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn chất lượng loại $A$ của ba nhà cung ứng tương ứng là 0,9; 0,8 và 0,7. Lấy ngẫu nhiên một linh kiện trong kho của trung tâm. Gọi $P$ là xác suất để linh kiện lấy ra đạt tiêu chuẩn chất lượng loại $A$. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Khảo sát bệnh nhân tại một phòng khám chuyên khoa tim mạch được ghi lại trong bảng số liệu sau, trong đó số bệnh nhân mắc bệnh tim mạch có triệu chứng đau ngực là một số nguyên dương $x$ chưa được ghi nhận cụ thể:

| Tình trạng bệnh | Có đau ngực | Không đau ngực | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Mắc bệnh tim mạch** | $x$ | 20 | $x+20$ |
| **Không mắc bệnh tim mạch** | 80 | 720 | 800 |
| **Tổng cộng** | $x+80$ | 740 | $x+820$ |

Biết rằng khi chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong nhóm những người mắc bệnh tim mạch, xác suất để bệnh nhân đó có triệu chứng đau ngực bằng 0,9. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân bất kỳ trong toàn bộ nhóm được khảo sát. Gọi $P$ là xác suất để bệnh nhân đó có triệu chứng đau ngực. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Khảo sát bệnh nhân tại một trung tâm hô hấp cho thấy tỷ lệ người thực sự bị viêm phế quản là 25% và tỷ lệ người không bị là 75%. Trong số những người bị viêm phế quản, có 80% người xuất hiện triệu chứng ho kéo dài; trong số những người không bị viêm phế quản, có 20% người cũng xuất hiện triệu chứng ho kéo dài. Một bệnh nhân đến khám và ghi nhận có triệu chứng ho kéo dài. Gọi $P$ là xác suất để bệnh nhân này thực sự bị viêm phế quản. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Có hai chiếc hộp kín đựng bi có hình thức bên ngoài giống hệt nhau: Hộp I chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh; Hộp II chứa 3 viên bi đỏ và 7 viên bi xanh. Người ta chọn ngẫu nhiên một chiếc hộp (với xác suất chọn mỗi hộp đều bằng 0,5), sau đó từ hộp đã chọn rút ngẫu nhiên ra đúng 1 viên bi. Gọi $P$ là xác suất để viên bi rút ra có màu đỏ. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Có hai chiếc hộp kín: Hộp $A$ chứa 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen; Hộp $B$ chứa 2 viên bi màu trắng và 8 viên bi màu đen. Gieo một đồng xu cân đối: Nếu đồng xu xuất hiện mặt ngửa thì chọn Hộp $A$, nếu xuất hiện mặt sấp thì chọn Hộp $B$. Sau đó từ hộp đã chọn lấy ngẫu nhiên 1 viên bi thì thấy viên bi lấy ra có màu trắng. Gọi $P$ là xác suất để viên bi màu trắng này đã được lấy ra từ Hộp $A$. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Một xí nghiệp cơ khí có ba phân xưởng $X_1, X_2, X_3$ cùng sản xuất một loại trục quay với tỷ trọng sản lượng lần lượt là 40%, 35% và 25%. Tỷ lệ trục quay bị lỗi kỹ thuật của ba phân xưởng tương ứng là 0,01; 0,02 và 0,03. Kiểm tra ngẫu nhiên một trục quay từ kho thành phẩm chung của xí nghiệp thì phát hiện nó bị lỗi kỹ thuật. Gọi $P$ là xác suất để trục quay bị lỗi này do phân xưởng $X_2$ sản xuất. Tính $K = 3700P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Một xạ thủ luyện tập bắn bia có hai khẩu súng loại $I$ và loại II. Do thói quen, xác suất xạ thủ chọn khẩu súng loại $I$ là 0,6 và chọn khẩu súng loại II là 0,4. Khi bắn một phát đạn, xác suất bắn trúng bia bằng súng loại $I$ là 0,8, còn bằng súng loại II là 0,7. Xạ thủ chọn ngẫu nhiên một khẩu súng và bắn một phát thì thấy đạn trúng bia. Gọi $P$ là xác suất để xạ thủ đó đã sử dụng khẩu súng loại $I$. Tính $K = 3800P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Trong một đợt khám sức khỏe cộng đồng nhằm tầm soát một bệnh lý truyền nhiễm, tỷ lệ người thực sự nhiễm mầm bệnh là 5% (0,05). Một bộ xét nghiệm sinh học được sử dụng có đặc tính: Nếu người được xét nghiệm thực sự nhiễm bệnh, bộ kít cho kết quả dương tính với xác suất 90% (0,90); nếu người được xét nghiệm không nhiễm bệnh, bộ kít vẫn cho kết quả dương tính giả với xác suất 5% (0,05). Lấy ngẫu nhiên một người trong cộng đồng để làm xét nghiệm. Gọi $P$ là xác suất để người này nhận được kết quả xét nghiệm dương tính. Tính $K = 20000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Tại một địa phương, tỷ lệ người nhiễm một loại virus hiếm trong cộng đồng là 10% (0,1). Xét nghiệm y tế đối với người nhiễm virus cho kết quả dương tính với xác suất 95% (0,95), còn đối với người không nhiễm virus thì tỷ lệ dương tính giả là 5% (0,05). Một người ngẫu nhiên đi làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự bị nhiễm virus. Tính $K = 2800P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Một kênh truyền thông tin nhị phân phát đi các ký hiệu 0 và 1. Tỷ lệ phát ký hiệu 0 là 60% (0,6) và phát ký hiệu 1 là 40% (0,4). Do có nhiễu đường truyền, khi phát ký hiệu 0 thì trạm thu nhận đúng ký hiệu 0 với xác suất 0,95 (nhận nhầm thành 1 với xác suất 0,05); khi phát ký hiệu 1 thì trạm thu nhận đúng ký hiệu 1 với xác suất 0,90 (nhận nhầm thành 0 với xác suất 0,10). Gọi $P$ là xác suất để trạm thu nhận được tín hiệu 1. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Một hệ thống truyền tin số phát các bit 0 và 1 với xác suất lần lượt là 0,7 và 0,3. Do nhiễu ngẫu nhiên trên đường truyền viễn thông: Khi phát bit 0 thì xác suất trạm thu nhận nhầm thành bit 1 là 0,04; khi phát bit 1 thì xác suất trạm thu nhận đúng bit 1 là 0,98. Tại trạm thu, nhân viên kỹ thuật ghi nhận được một bit 1. Gọi $P$ là xác suất để trạm phát thực tế đã phát đi bit 1 đó. Tính $K = 2300P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một công ty bảo hiểm nhân thọ phân loại khách hàng thành hai nhóm: Nhóm có nguy cơ rủi ro cao chiếm 20% tổng số khách hàng (với xác suất xảy ra tai nạn bồi thường trong năm là 0,10) và nhóm có nguy cơ rủi ro thấp chiếm 80% số khách hàng (với xác suất xảy ra tai nạn bồi thường trong năm là 0,02). Trong năm qua, một khách hàng bất kỳ của công ty đã nộp hồ sơ yêu cầu bồi thường do gặp tai nạn. Gọi $P$ là xác suất để khách hàng này thuộc nhóm có nguy cơ rủi ro cao. Tính $K = 2700P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Có ba chiếc hộp kín có số lượng bi khác nhau: Hộp I chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi trắng; Hộp II chứa 7 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng; Hộp III chứa 8 viên bi đỏ và 2 viên bi trắng. Xác suất một người chọn Hộp I là $\frac{1}{2}$, chọn Hộp II là $\frac{1}{3}$ và chọn Hộp III là $\frac{1}{6}$. Sau khi chọn hộp, người đó rút ngẫu nhiên ra đúng 1 viên bi thì thấy viên bi rút ra có màu đỏ. Gọi $P$ là xác suất để viên bi màu đỏ này được rút ra từ Hộp II. Tính $K = 3700P$.

KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nền tảng

**Bài 1. TME** Một nhà máy có hai phân xưởng may gia công áo sơ mi: Phân xưởng $A$ sản xuất 55% tổng sản lượng và Phân xưởng $B$ sản xuất 45% sản lượng còn lại. Tỷ lệ áo bị phế phẩm của Phân xưởng $A$ là 0,02 và của Phân xưởng $B$ là 0,04. Lấy ngẫu nhiên một chiếc áo từ kho thành phẩm. Gọi $P$ là xác suất để chiếc áo lấy ra là phế phẩm. Tính $K = 50000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Tại một xưởng sản xuất ốc vít, Phân xưởng 1 sản xuất $x$ con ốc vít với tỷ lệ lỗi là 0,03, Phân xưởng 2 sản xuất 4000 con ốc vít với tỷ lệ lỗi là 0,02 ($x$ là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên một con ốc vít bị lỗi, biết xác suất để con ốc vít lỗi này do Phân xưởng 2 sản xuất bằng $\frac{4}{13}$. Gọi $P$ là xác suất để con ốc vít bị lỗi này do Phân xưởng 1 sản xuất. Tính $K = 2600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Có hai thùng đựng bóng bàn: Thùng thứ nhất chứa 4 quả bóng đỏ và 6 quả bóng xanh; Thùng thứ hai chứa 7 quả bóng đỏ và 3 quả bóng xanh. Chọn ngẫu nhiên một thùng (với xác suất mỗi thùng bằng 0,5) rồi lấy ra đúng 1 quả bóng bàn. Gọi $P$ là xác suất để quả bóng bàn lấy ra có màu đỏ. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Cơ cấu số lượng bóng trong hai chiếc túi vải được cho ở bảng số liệu sau, trong đó số bóng đỏ trong Túi 2 là một số nguyên dương $x$ chưa biết:

| Chiếc túi | Số bóng đỏ | Số bóng xanh | Tổng số bóng | Xác suất chọn túi |
|---|---|---|---|---|
| **Túi 1** | 5 | 5 | 10 | 0,5 |
| **Túi 2** | $x$ | 2 | $x+2$ | 0,5 |

Biết rằng Túi 2 có tổng cộng đúng 10 quả bóng. Người ta chọn ngẫu nhiên một chiếc túi rồi lấy ra đúng 1 quả bóng thì thấy quả bóng lấy ra có màu đỏ. Gọi $P$ là xác suất để quả bóng màu đỏ này thuộc về Túi 2. Tính $K = 2600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một cơ sở đóng chai nước tinh khiết có ba máy tự động hoạt động với công suất lần lượt chiếm 30%, 30% và 40% sản lượng. Tỷ lệ chai nước đạt tiêu chuẩn đóng nắp kín của ba máy tương ứng là 0,95; 0,90 và 0,85. Chọn ngẫu nhiên một chai nước từ kho. Gọi $P$ là xác suất để chai nước được chọn đạt tiêu chuẩn đóng nắp kín. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Theo số liệu dịch tễ học mùa đông, tỷ lệ người dân mắc bệnh cúm mùa là 15% (0,15). Trong số những người mắc cúm mùa, có 90% người bị sốt; còn trong số những người không mắc cúm mùa, chỉ có 10% người có triệu chứng sốt. Chọn ngẫu nhiên một người dân trong khu vực. Gọi $P$ là xác suất để người này có triệu chứng sốt. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Bảng số liệu sau đây ghi nhận kết quả khảo sát dịch tễ học tại một trung tâm y tế, trong đó số bệnh nhân mắc viêm đường hô hấp có biểu hiện ho sốt là một số nguyên dương $x$:

| Tình trạng bệnh lý | Có ho sốt | Không có ho sốt | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Mắc viêm đường hô hấp** | $x$ | 30 | 200 |
| **Không mắc bệnh** | 120 | 680 | 800 |
| **Tổng cộng** | $x + 120$ | 710 | 1000 |

Biết rằng khi chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm người mắc bệnh, xác suất người đó có biểu hiện ho sốt là 0,85. Một bệnh nhân đến khám tại trung tâm có biểu hiện ho sốt. Gọi $P$ là xác suất để bệnh nhân này thực sự mắc bệnh viêm đường hô hấp. Tính $K = 2900P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Trong một đợt kiểm tra bắn súng của đơn vị, có hai xạ thủ $A$ và $B$. Huấn luyện viên tung đồng xu để chọn xạ thủ thực hiện phát bắn: nếu ngửa chọn $A$ (xác suất 0,5), nếu sấp chọn $B$ (xác suất 0,5). Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ $A$ là 0,85, của xạ thủ $B$ là 0,75. Gọi $P$ là xác suất để tấm bia bị bắn trúng. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một câu lạc bộ bắn súng chọn một trong hai vận động viên $A$ và $B$ đi thi đấu với xác suất chọn lần lượt là 0,6 và 0,4. Xác suất bắn trúng bia của vận động viên $A$ là 0,8 và của vận động viên $B$ là 0,6. Kết quả phát bắn thi đấu cho thấy tấm bia đã bị bắn trúng. Gọi $P$ là xác suất để vận động viên $A$ là người đã thực hiện phát bắn đó. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Bài 10. TME** Một công ty sản xuất gạch men có ba dây chuyền $P_1, P_2, P_3$ cung cấp lần lượt 40%, 40% và 20% tổng số sản phẩm. Tỷ lệ gạch men đạt tiêu chuẩn loại $I$ của ba dây chuyền tương ứng là 0,90; 0,85 và 0,80. Lấy ngẫu nhiên một viên gạch men trong kho. Gọi $P$ là xác suất để viên gạch men lấy ra đạt tiêu chuẩn loại $I$. Tính $K = 2500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một nhà máy lắp ráp linh kiện điện tử nhận nguồn chip từ ba phân xưởng với tỷ lệ 50%, 30% và 20%. Tỷ lệ chip bị phế phẩm của ba phân xưởng lần lượt là 0,02; 0,03 và 0,05. Lấy ngẫu nhiên một con chip kiểm tra thì thấy nó bị lỗi phế phẩm. Gọi $P$ là xác suất để con chip lỗi này do phân xưởng thứ hai sản xuất. Tính $K = 5800P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một chương trình tầm soát ung thư sớm trong cộng đồng có tỷ lệ người mắc bệnh là 2% (0,02). Phương pháp xét nghiệm máu có độ nhạy (người có bệnh cho kết quả dương tính) là 95% (0,95), và tỷ lệ dương tính giả (người không bệnh cho kết quả dương tính) là 3% (0,03). Lấy ngẫu nhiên một người đi làm xét nghiệm. Gọi $P$ là xác suất để người này có kết quả xét nghiệm dương tính. Tính $K = 50000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Trong một đợt tầm soát bệnh hiếm với tỷ lệ mắc bệnh trong dân cư là 1% (0,01). Một xét nghiệm y học cho kết quả dương tính đối với người có bệnh là 99% (0,99), và cho kết quả dương tính giả đối với người không bệnh là 2% (0,02). Một người dân nhận được kết quả xét nghiệm dương tính. Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự mắc bệnh hiếm đó. Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Có ba chiếc hộp chứa các thẻ màu: Hộp $A$ có 6 thẻ đỏ và 4 thẻ xanh; Hộp $B$ có 5 thẻ đỏ và 5 thẻ xanh; Hộp $C$ có 3 thẻ đỏ và 7 thẻ xanh. Một người chọn ngẫu nhiên một chiếc hộp (với xác suất chọn mỗi hộp đều bằng $\frac{1}{3}$) rồi rút ngẫu nhiên ra đúng 1 tấm thẻ thì thấy thẻ rút ra có màu đỏ. Gọi $P$ là xác suất để tấm thẻ màu đỏ này được rút ra từ Hộp $A$. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

**Bài 15. TME** Hệ thống thông tin liên lạc truyền các ký hiệu nhị phân 0 và 1 với tỷ lệ phát lần lượt là 70% và 30%. Do tạp âm đường truyền, khi phát ký hiệu 0 thì trạm thu nhận đúng 0 với xác suất 0,98 (nhận nhầm thành 1 với xác suất 0,02); khi phát ký hiệu 1 thì trạm thu nhận đúng 1 với xác suất 0,95 (nhận nhầm thành 0 với xác suất 0,05). Gọi $P$ là xác suất để trạm thu nhận được ký hiệu 0. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Một đường truyền số phát các bit 0 và 1 với xác suất lần lượt là 0,6 và 0,4. Khi phát bit 0 thì xác suất trạm thu nhận đúng bit 0 là 0,96; khi phát bit 1 thì xác suất trạm thu nhận nhầm thành bit 0 là 0,10. Trạm thu ghi nhận được một bit 0. Gọi $P$ là xác suất để trạm phát thực tế đã phát đi bit 0 đó. Tính $K = 7700P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Một ngân hàng thương mại phân loại hồ sơ vay vốn thành ba mức độ: Nhóm rủi ro thấp chiếm 70% (với tỷ lệ nợ xấu là 0,01), nhóm rủi ro trung bình chiếm 20% (với tỷ lệ nợ xấu là 0,05) và nhóm rủi ro cao chiếm 10% (với tỷ lệ nợ xấu là 0,20). Chọn ngẫu nhiên một hồ sơ vay vốn của ngân hàng. Gọi $P$ là xác suất để khoản vay đó rơi vào tình trạng nợ xấu. Tính $K = 50000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Bảng số liệu sau đây thống kê tình trạng dư nợ của 1000 hồ sơ vay vốn tại một quỹ tài chính, trong đó số hồ sơ nợ xấu của nhóm đầu tư mạo hiểm là một số nguyên dương $x$:

| Nhóm khách hàng | Rơi vào nợ xấu | Không bị nợ xấu | Tổng số hồ sơ |
|---|---|---|---|
| **Khách hàng phổ thông** | 16 | 784 | 800 |
| **Đầu tư mạo hiểm** | $x$ | 176 | 200 |
| **Tổng cộng** | $x + 16$ | 960 | 1000 |

Một khoản vay bất kỳ của quỹ được ghi nhận rơi vào tình trạng nợ xấu. Gọi $P$ là xác suất để khoản vay nợ xấu này thuộc về nhóm khách hàng đầu tư mạo hiểm. Tính $K = 3500P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một nhà máy sản xuất xe máy nhập động cơ từ hai xưởng cung cấp: Xưởng 1 cung cấp 65% động cơ và Xưởng 2 cung cấp 35% động cơ. Tỷ lệ động cơ đạt chuẩn khí thải của Xưởng 1 là 0,98 và của Xưởng 2 là 0,92. Lấy ngẫu nhiên một động cơ từ kho để kiểm tra. Gọi $P$ là xác suất để động cơ đó đạt chuẩn khí thải. Tính $K = 2000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Một xí nghiệp cơ khí có hai phân xưởng cùng tiện các trục thép: Phân xưởng 1 sản xuất 40% sản lượng với tỷ lệ phế phẩm là 0,05, Phân xưởng 2 sản xuất 60% sản lượng với tỷ lệ phế phẩm là 0,02. Người quản lý kho kiểm tra ngẫu nhiên một trục thép thì phát hiện nó là phế phẩm. Gọi $P$ là xác suất để phế phẩm này do Phân xưởng 1 sản xuất. Tính $K = 4000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Trong một kỳ thi trắc nghiệm gồm câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, một học sinh hoặc là thuộc bài (với xác suất 0,7) và sẽ trả lời chính xác, hoặc là không thuộc bài (với xác suất 0,3) và sẽ đoán ngẫu nhiên một phương án (xác suất đoán đúng là 0,25). Giám khảo chấm bài và thấy học sinh đã trả lời đúng câu hỏi đó. Gọi $P$ là xác suất để học sinh thực sự thuộc bài chứ không phải đoán mò. Tính $K = 3100P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 22. TME** Một loại bệnh truyền nhiễm có tỷ lệ mắc bệnh trong dân số là 10% (0,1). Một xét nghiệm y tế độc lập có độ nhạy là 0,90 (người bệnh cho kết quả dương tính) và tỷ lệ dương tính giả là 0,05 (người không bệnh cho kết quả dương tính). Để tăng độ chính xác, một người được tiến hành xét nghiệm hai lần hoàn toàn độc lập và cả hai lần đều cho kết quả dương tính. Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự mắc bệnh. Tính $K = 3700P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Một tập đoàn công nghệ có ba nhà máy $M_1, M_2, M_3$ sản xuất pin điện thoại với tỷ lệ lần lượt là 40%, 35% và 25%. Tỷ lệ pin bị lỗi không đạt chuẩn an toàn của ba nhà máy tương ứng là 0,02; 0,04 và 0,08. Kiểm tra một lô hàng xuất khẩu phát hiện một viên pin bị lỗi không đạt chuẩn. Gọi $P$ là xác suất để viên pin lỗi này do nhà máy $M_3$ sản xuất. Tính $K = 4200P$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Một trang trại có hai chuồng nuôi gà: Chuồng I có 7 con gà trống và 13 con gà mái; Chuồng II có 12 con gà trống và 8 con gà mái. Người ta bắt ngẫu nhiên 1 con gà từ Chuồng I thả vào Chuồng II, sau đó từ Chuồng II bắt ngẫu nhiên ra đúng 1 con gà. Gọi $P$ là xác suất để con gà bắt ra từ Chuồng II là một con gà trống. Tính $K = 4200P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Một người chăn nuôi có hai chuồng thỏ: Chuồng $A$ có 8 thỏ trắng và 12 thỏ xám; Chuồng $B$ có 15 thỏ trắng và 5 thỏ xám. Người đó bắt ngẫu nhiên 1 con thỏ từ Chuồng $A$ thả sang Chuồng $B$, rồi sau đó từ Chuồng $B$ bắt ngẫu nhiên ra đúng 1 con thỏ thì thấy con thỏ bắt ra là thỏ trắng. Gọi $P$ là xác suất để con thỏ ban đầu được chuyển từ Chuồng $A$ sang Chuồng $B$ cũng là thỏ trắng. Tính $K = 3850P$.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Kết quả thử nghiệm một phần mềm trí tuệ nhân tạo (AI) trong việc sàng lọc 1000 hồ sơ xin việc được tổng hợp ở bảng số liệu sau, trong đó số hồ sơ ứng viên xuất sắc được AI: Đạt tiêu chuẩn là một số nguyên dương $x$:

| Chất lượng ứng viên | AI: Đạt tiêu chuẩn | AI: Không đạt | Tổng cộng |
|---|---|---|---|
| **Thực sự xuất sắc** | $x$ | 30 | 300 |
| **Mức độ bình thường** | 140 | 560 | 700 |
| **Tổng cộng** | $x + 140$ | 590 | 1000 |

Một hồ sơ ứng viên được AI: Đạt tiêu chuẩn. Gọi $P$ là xác suất để hồ sơ này thực sự là của một ứng viên xuất sắc. Tính $K = 4100P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một hệ thống camera an ninh thông minh giám sát kho hàng. Tỷ lệ thời gian có kẻ gian đột nhập kho hàng là 0,005. Khi có đột nhập, camera kích hoạt chuông báo động với xác suất 0,98. Khi không có đột nhập, do tác động của động vật hoặc thời tiết, camera vẫn kích hoạt báo động giả với xác suất 0,01. Chuông báo động an ninh bất ngờ vang lên. Gọi $P$ là xác suất để kho hàng thực sự có kẻ gian đột nhập. Tính $K = 29700P$.

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Một máy phát hiện nói dối được thử nghiệm trên một nhóm đối tượng: Tỷ lệ người nói dối thực sự chiếm 20%. Khi đối tượng nói dối, máy kết luận "Nói dối" với xác suất 0,85. Khi đối tượng nói thật, máy kết luận nhầm là "Nói dối" với xác suất 0,10. Một người bị thẩm vấn và máy đưa ra kết luận là "Nói dối". Gọi $P$ là xác suất để người này thực sự đã nói dối. Tính $K = 5000P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một chiếc hộp kín có 3 đồng xu đặc biệt: Đồng xu thứ nhất có cả hai mặt đều là mặt ngửa (xác suất xuất hiện mặt ngửa bằng 1); Đồng xu thứ hai có cả hai mặt đều là mặt sấp (xác suất xuất hiện mặt ngửa bằng 0); Đồng xu thứ ba là đồng xu cân đối bình thường (xác suất xuất hiện mặt ngửa bằng 0,5). Một người chọn ngẫu nhiên một đồng xu (xác suất mỗi đồng bằng $\frac{1}{3}$) rồi tung lên thì thấy xuất hiện mặt ngửa. Gọi $P$ là xác suất để đồng xu được chọn là đồng xu thứ nhất (có hai mặt ngửa). Tính $K = 3600P$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Ba nhà cung cấp nông sản $A$, $B$, $C$ cung cấp cam cho một chuỗi siêu thị với tỷ lệ thị phần lần lượt là 50%, 30% và 20%. Tỷ lệ cam đạt tiêu chuẩn VietGAP của ba nhà cung cấp tương ứng là 0,9; 0,8 và 0,7. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên một quả cam từ quầy hàng của siêu thị thì thấy quả cam đạt tiêu chuẩn VietGAP. Gọi $P$ là xác suất để quả cam này do nhà cung cấp $A$ phân phối. Tính $K = 8300P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Ba dạng hoán vị
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-06

# BUỔI 06.
# HOÁN VỊ LẶP – HOÁN VỊ VÒNG QUANH – HOÁN VỊ SAI CHỖ

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Chọn phương pháp.** Nếu đổi chỗ hai phần tử cùng loại mà cách xếp vẫn như cũ, dùng hoán vị lặp. Nếu các cách xếp trùng nhau qua phép quay, cố định một phần tử làm mốc. Nếu đề so sánh vị trí mới với vị trí ban đầu, đếm theo số vị trí giữ nguyên.

### 1 Hoán vị lặp

Xếp $n$ phần tử thành một hàng, trong đó có $k$ loại với số lượng lần lượt là $n_1, \dots, n_k$ và các phần tử cùng loại giống hệt nhau. Nếu $n_1 + \cdots + n_k = n$, số cách xếp phân biệt là

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

**Dạng 1. Xếp theo khối.** Nếu các phần tử cùng loại phải đứng liền nhau, gộp chúng thành một khối rồi đếm cách xếp các khối và các phần tử còn lại.

**Dạng 2. Xếp vào khe.** Xếp các phần tử không thuộc loại đang xét trước. Nếu cần tạo đúng hai khối từ $r \geq 2$ phần tử giống nhau, chọn hai khe khác nhau rồi chia $r$ thành hai số nguyên dương theo thứ tự từ trái sang phải. Nếu mọi phần tử cùng loại phải tách rời, đặt nhiều nhất một phần tử vào mỗi khe. Sau khi xếp $m$ phần tử còn lại, có $m + 1$ khe, kể cả hai đầu.

**Dạng 3. Lập số.** Chữ số đầu tiên phải khác 0. Có thể chọn chữ số đầu trước hoặc trừ các cách xếp bắt đầu bằng 0.

**Dạng 4. Đường đi trên lưới và thứ tự theo cột.**

Đường đi gồm $a$ bước sang phải và $b$ bước lên trên tương ứng với một cách xếp hai loại bước. Số đường đi là $C_{a+b}^{a}$. Nếu bắt buộc qua một điểm, nhân số cách đi trên hai đoạn. Nếu phải tránh điểm đó, lấy tổng số đường đi trừ số đường qua điểm.

Khi mỗi cột có một thứ tự xử lý cố định, một lịch xử lý được xác định bởi dãy các cột được chọn. Nếu cột $i$ có $n_i$ mục tiêu, áp dụng công thức hoán vị lặp cho dãy này.

### 2 Hoán vị vòng quanh

**Nhận dạng.** Xếp $n \geq 2$ phần tử phân biệt quanh một vòng tròn, hai cách xếp trùng nhau nếu có thể quay cách này thành cách kia. Cố định một phần tử làm mốc rồi xếp $n - 1$ phần tử còn lại theo chiều kim đồng hồ. Số cách là $(n-1)!$.

- **Ghế phân biệt.** Nếu các ghế được đánh số hoặc có một ghế sát cửa làm mốc, có $n!$ cách xếp tự do.
- **Hai người kề nhau hoặc đối diện.** Cố định người thứ nhất. Người thứ hai có hai ghế kề để chọn khi $n \geq 3$, hoặc một ghế đối diện khi $n$ chẵn. Sau đó xếp những người còn lại.
- **Vòng được lật.** Với $n \geq 3$ hạt phân biệt, mỗi cách xếp theo phép quay ghép với đúng một cách đảo chiều. Nếu đề coi hai cách đó như nhau, số vòng là $\dfrac{(n-1)!}{2}$.

## 3 Hoán vị sai chỗ

Gọi $D_n$ là số hoán vị của $n$ phần tử mà không phần tử nào ở đúng vị trí ban đầu. Để đếm, bắt đầu với mọi hoán vị. Trừ các hoán vị giữ nguyên một vị trí, cộng lại các hoán vị giữ nguyên hai vị trí đã bị trừ hai lần, rồi tiếp tục xen kẽ dấu. Với $n \geq 1$, ta được

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

**Dạng 1. Sai chỗ toàn phần.** Áp dụng công thức trên hoặc tính lần lượt bằng $D_0 = 1, D_1 = 0$ và $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ với $n \geq 2$.

**Dạng 2. Đúng $r$ vị trí cố định.** Chọn $r$ vị trí giữ nguyên rồi hoán vị sai chỗ các phần tử còn lại. Số cách là $C_n^r D_{n-r}$.

**Dạng 3. Xác suất.** Khi mọi hoán vị đồng khả năng, chia số hoán vị thuận lợi cho $n!$. Chẳng hạn xác suất có ít nhất một vị trí cố định là $1 - \dfrac{D_n}{n!}$.

**Dạng 4. Bàn cờ và ghép cặp.** Khi mỗi hàng có đúng một quân xe và mỗi cột có đúng một quân xe, vị trí các quân xe tương ứng với một hoán vị các cột. Quân xe trên đường chéo chính tương ứng với một vị trí cố định. Tương tự, trong bài ghép cặp, đánh số hai nhóm sao cho các cặp ban đầu có cùng số thứ tự.

**Kiểm tra trước khi tính.** Xác định đối tượng nào giống nhau, ghế có phân biệt hay không và vị trí nào bị cấm. Ba dữ kiện này quyết định dùng hoán vị lặp, vòng quanh hay sai chỗ.

# B VÍ DỤ MINH HỌA

## Nền tảng

**Ví dụ 1. TME** Một huấn luyện viên thể thao có 9 quả bóng tập gồm 4 quả bóng màu đỏ, 3 quả bóng màu xanh và 2 quả bóng màu vàng (các quả bóng cùng màu hoàn toàn giống nhau về kích thước và khối lượng). Huấn luyện viên xếp tất cả 9 quả bóng này thành một hàng ngang trên sàn tập. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Xếp 8 học sinh phân biệt quanh một bàn tròn có 8 ghế không đánh số. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua một phép quay quanh tâm bàn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Bảy vị đại biểu tham dự một hội nghị quốc tế, mỗi người đều mặc một chiếc áo khoác riêng biệt. Khi vào phòng họp, các đại biểu treo áo lên giá treo đồ. Kết thúc hội nghị, nhân viên lễ tân lấy ngẫu nhiên và phát lại cho mỗi đại biểu đúng một chiếc áo khoác. Hỏi có bao nhiêu cách phát áo khoác để không có bất kỳ đại biểu nào nhận đúng chiếc áo của mình?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một nhân viên văn phòng có 4 lá thư riêng biệt cần gửi cho 4 đối tác khác nhau. Do sơ suất, nhân viên bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 phong bì đã ghi sẵn địa chỉ của 4 đối tác đó (mỗi phong bì đúng một lá thư). Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một lá thư được gửi đến đúng địa chỉ đối tác của nó. Tính $K = 3200P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Từ tập hợp các chữ số gồm đúng 2 chữ số 1, 2 chữ số 2, 2 chữ số 3 và 2 chữ số 4, người ta lập các số tự nhiên gồm 8 chữ số. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 khách vào 8 ghế quanh một bàn tròn, trong đó có An và Bình. Các ghế cách đều nhau và các cách gán khách vào ghế đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để An và Bình ngồi đối diện nhau qua tâm bàn. Tính $K = 14000P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng thấp

**Ví dụ 7. TME** Có 4 chữ cái $A$, 3 chữ cái $B$ và 2 chữ cái $C$ (tổng cộng 9 chữ cái). Người ta sắp xếp tất cả 9 chữ cái này thành một hàng ngang sao cho cả 4 chữ cái $A$ luôn đứng liền nhau thành một khối liên tục. Gọi $N$ là số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu. Tính $K = 40N$.

KẾT QUẢ

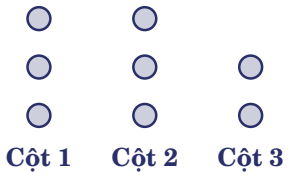
**Ví dụ 8. TME** Có 4 chữ cái $A$, 3 chữ cái $B$ và 2 chữ cái $C$. Người ta sắp xếp tất cả 9 chữ cái này thành một hàng ngang sao cho không có bất kỳ hai chữ cái $A$ nào đứng cạnh nhau. Gọi $N$ là số cách sắp xếp thỏa mãn. Tính $K = 12N + 200$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Có 6 bạn học sinh đến thư viện và gửi 6 chiếc mũ vào ngăn để đồ. Khi ra về, thủ thư phát ngẫu nhiên cho mỗi bạn đúng một chiếc mũ. Gọi $N$ là số cách phát mũ sao cho có đúng 2 bạn nhận đúng mũ của mình (và 4 bạn còn lại nhận sai mũ). Tính $K = 10N + 150$.

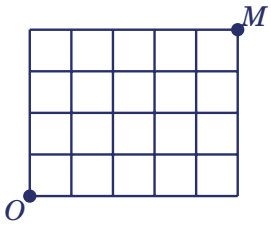
KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Trong một bài thi bắn súng ứng dụng, có 8 mục tiêu bia được treo thành ba cột thẳng đứng: Cột thứ nhất treo 3 mục tiêu, cột thứ hai treo 3 mục tiêu và cột thứ ba treo 2 mục tiêu. Một xạ thủ phải bắn hạ toàn bộ 8 mục tiêu theo quy tắc: Trước mỗi phát bắn, xạ thủ chọn một cột và bắt buộc phải bắn hạ mục tiêu ở vị trí thấp nhất hiện tại của cột đó. Gọi $H$ là số thứ tự khác nhau để xạ thủ bắn hạ hết cả 8 mục tiêu. Tính $K = 5H - 300$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một robot di chuyển từ điểm gốc tọa độ $O(0,0)$ đến điểm đích $M(5,4)$. Biết rằng trong mỗi bước di chuyển, robot chỉ có thể đi sang phải 1 đơn vị hoặc đi lên trên 1 đơn vị. Gọi $N$ là tổng số đường đi ngắn nhất khác nhau để robot đi từ $O$ đến $M$. Tính $K = 15N + 110$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Xâu 8 viên ngọc có màu đôi một khác nhau thành một vòng tay. Hai cách xâu được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua phép quay hoặc phép lật vòng. Hỏi có bao nhiêu vòng tay khác nhau?

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 13. TME** Trong một buổi dạ hội giao lưu khiêu vũ có 6 cặp vợ chồng tham gia. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên để ghép 6 người chồng với 6 người vợ thành 6 cặp khiêu vũ (mỗi cặp gồm đúng một nam và một nữ). Gọi $N$ là số phương án ghép cặp khiêu vũ sao cho không có bất kỳ cặp vợ chồng nào được ghép khiêu vũ cùng nhau. Tính $K = 10N - 150$.

KẾT QUẢ

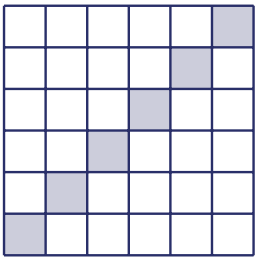
**Ví dụ 14. TME** Có 8 chữ cái $A$, 4 chữ cái $B$ và 3 chữ cái $C$ (tổng cộng 15 chữ cái). Người ta sắp xếp tất cả 15 chữ cái này thành một hàng ngang sao cho tất cả các chữ cái $A$ được gom thành đúng 2 nhóm liên tiếp (hai khối $A$ riêng biệt, giữa hai khối có ít nhất một chữ cái khác ngăn cách), còn các chữ cái $B$ và $C$ đứng tự do. Gọi $H$ là số cách sắp xếp thỏa mãn. Tính $K = H - 4360$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Trên một bàn cờ hình vuông kích thước $6 \times 6$ gồm 36 ô vuông, người ta đặt 6 quân xe sao cho thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- Không có hai quân xe nào nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột (không ăn nhau);
- Không có bất kỳ quân xe nào nằm trên đường chéo chính của bàn cờ (các ô tô nhạt).

Gọi $N$ là tổng số cách đặt 6 quân xe thỏa mãn các điều kiện trên. Tính $K = 8N + 180$.



KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận biết

**Bài 1. TME** Dùng hai thẻ số 1, ba thẻ số 2 và bốn thẻ số 3 để lập số tự nhiên có 9 chữ số, mỗi thẻ dùng đúng một lần. Hỏi có bao nhiêu số khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một phòng hội thảo có một chiếc bàn tròn gồm đúng 7 ghế ngồi, trong đó có đúng một ghế được đặt sát ngay cửa ra vào của phòng hội thảo. Xếp ngẫu nhiên 7 chuyên gia (trong đó có Giáo sư An) vào 7 ghế của bàn tròn đó.

Gọi $P$ là xác suất để Giáo sư An được ngồi đúng vào chiếc ghế sát cửa ra vào đó.

Tính $T = 14000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Một nhóm gồm 8 học sinh xuất sắc ngồi thảo luận quanh một bàn tròn có đúng 8 ghế ngồi được đặt cách đều nhau (các ghế không đánh số thứ tự).

Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu cách xếp này có thể nhận được từ cách xếp kia qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $N$ là tổng số cách xếp chỗ đôi một khác nhau cho 8 học sinh. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một bạn học sinh viết ngẫu nhiên các chữ cái của từ "TOANHOC" lên một dải băng giấy gồm 7 ô vuông kề nhau (mỗi ô vuông chứa đúng một chữ cái). Biết rằng từ "TOANHOC" gồm 7 chữ cái: hai chữ $O$, một chữ T, một chữ $A$, một chữ $N$, một chữ $H$ và một chữ $C$.

Gọi $P$ là xác suất để hai chữ cái $O$ luôn đứng ở hai ô vuông cạnh nhau.

Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một nhân viên bưu điện chuẩn bị 7 lá thư khác nhau gửi cho 7 người nhận cụ thể và 7 phong bì đã ghi sẵn chính xác địa chỉ của 7 người nhận đó. Do sơ suất, nhân viên bỏ ngẫu nhiên mỗi lá thư vào đúng một phong bì sao cho không có bất kỳ lá thư nào được bỏ đúng vào phong bì mang tên người nhận của nó.

Hai cách bỏ thư được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một lá thư nằm ở phong bì khác nhau.

Gọi $D$ là tổng số cách bỏ thư sai hoàn toàn thỏa mãn tình huống trên. Giá trị của $D$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Có 6 lá thư riêng biệt cần gửi cho 6 người khác nhau cùng 6 chiếc phong bì ghi sẵn địa chỉ của 6 người đó. Một trợ lý văn phòng bỏ ngẫu nhiên mỗi lá thư vào đúng một chiếc phong bì.

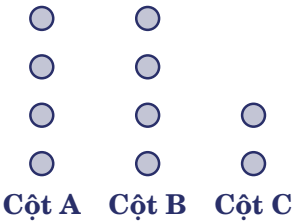
Gọi $P$ là xác suất để toàn bộ 6 lá thư đều bị bỏ sai phong bì (không có lá thư nào được gửi đúng người nhận của nó).

Tính $T = 7200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Thông hiểu

**Bài 7. TME** Có 10 bia trên ba cột $A$, $B$ và $C$, lần lượt gồm 4, 4 và 2 bia. Mỗi lượt, xạ thủ chọn một cột còn bia rồi hạ bia thấp nhất còn lại của cột đó. Hai phương án khác nhau nếu có ít nhất một lượt chọn cột khác nhau. Hỏi có bao nhiêu phương án bắn hạ hết 10 bia?




KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Có 12 bia trên ba cột $A$, $B$ và $C$, lần lượt gồm 5, 4 và 3 bia. Mỗi lượt, xạ thủ chọn một cột còn bia rồi hạ bia thấp nhất của cột đó. Chọn đồng khả năng một trong các dãy chọn cột hợp lệ để hạ hết 12 bia. Gọi $P$ là xác suất để hai lượt cuối đều chọn cột $C$.

Tính $T = 4400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một thợ thủ công có 8 hạt cườm có màu sắc đôi một khác nhau xâu thành một chuỗi vòng tay khép kín.

Biết rằng vòng tay có thể lật ngược trong không gian 3 chiều. Hai chuỗi vòng tay được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua phép quay mặt phẳng hoặc phép lật ngược trong không gian.

Gọi $Q$ là số chuỗi vòng tay đôi một khác nhau có thể tạo thành. Giá trị của $Q$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh (trong đó có bạn An và bạn Bình) vào 8 ghế bố trí quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

Gọi $P$ là xác suất để bạn An và bạn Bình ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một giải thi đấu thể thao có 8 đội tuyển mang các mã số bốc thăm từ 1 đến 8 ở mùa giải trước. Ở mùa giải năm nay, ban tổ chức tiến hành bốc thăm lại ngẫu nhiên các mã số từ 1 đến 8 cho 8 đội tuyển.

Có bao nhiêu trường hợp bốc thăm khác nhau để có đúng hai đội tuyển bốc trúng mã số của mùa giải trước, còn sáu đội tuyển còn lại đều nhận mã số khác với mùa giải trước?

Gọi kết quả cần tìm là $N$. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Bảy vị khách vào một nhà hàng sang trọng và gửi lại bảy chiếc nón khác nhau tại quầy giữ đồ. Khi ra về, nhân viên phục vụ trao ngẫu nhiên cho mỗi vị khách đúng một chiếc nón.

Gọi $P$ là xác suất để có đúng ba vị khách nhận được đúng chiếc nón ban đầu của mình.

Tính $T = 32000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Cho bộ thẻ gồm 9 chữ số: ba chữ số 1, ba chữ số 2, hai chữ số 3 và một chữ số 4. Một học sinh dùng tất cả 9 chữ số này để lập thành các số tự nhiên có 9 chữ số.

Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số được tạo thành từ tập trên sao cho số đó là một số chẵn?

Gọi kết quả cần tìm là $N$. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Lấy ngẫu nhiên một hoán vị của 9 chữ số trong bộ thẻ gồm ba chữ số 1, ba chữ số 2, hai chữ số 3 và một chữ số 4 để tạo thành một số tự nhiên có 9 chữ số (các hoán vị có cùng khả năng được chọn như nhau).

Gọi $P$ là xác suất để số tự nhiên nhận được là một số tự nhiên chẵn.

Tính $T = 9000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Xếp 10 đại biểu phân biệt, trong đó có $A$ và $B$, vào 10 ghế cách đều quanh bàn tròn. Hai cách xếp trùng nhau qua phép quay được tính là một. Gọi $K$ là số cách xếp sao cho $A$ và $B$ ngồi đối diện nhau. Tính $\dfrac{K}{20}$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Xếp ngẫu nhiên 10 người (trong đó có bạn $A$ và bạn $B$) vào 10 ghế bố trí quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

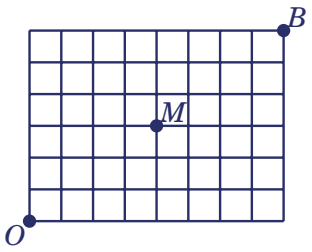
Gọi $P$ là xác suất để bạn $A$ và bạn $B$ ngồi ở hai vị trí ghế đối diện nhau qua tâm bàn tròn.

Tính $T = 18000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 17. TME** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một robot cần di chuyển từ điểm xuất phát $O(0,0)$ đến điểm đích $B(8,6)$. Tại mỗi bước, robot chỉ được phép đi sang phải 1 đơn vị hoặc đi lên trên 1 đơn vị.



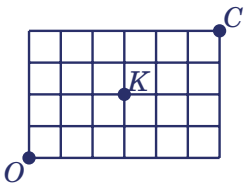

Trên đường đi, robot bắt buộc phải ghé qua trạm nạp năng lượng đặt tại điểm $M(4,3)$.

Hai đường đi được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một đoạn di chuyển khác nhau giữa hai đường đi.

Gọi $S$ là tổng số đường đi hợp lệ đưa robot từ $O$ đến $B$ qua trạm $M$. Giá trị của $S$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một hạt vi mô chuyển động ngẫu nhiên trên lưới tọa độ $Oxy$ từ điểm $O(0,0)$ đến điểm $C(6,4)$. Mỗi bước chuyển động, hạt chỉ có thể di chuyển sang phải 1 đơn vị hoặc lên trên 1 đơn vị, các lộ trình ngắn nhất đều có cùng khả năng xuất hiện như nhau.




Gọi $P$ là xác suất để hạt chuyển động đi qua điểm quan trắc $K(3,2)$ trên đường đi của nó.

Tính $T = 4200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một phòng hội thảo có một chiếc bàn tròn gồm đúng 7 ghế ngồi, trong đó có đúng một GHẾ được đặt sát ngay cửa ra vào của phòng hội thảo (các ghế còn lại không đánh số).

Xếp 7 chuyên gia vào 7 ghế của bàn tròn đó.

Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu có ít nhất một chuyên gia ngồi ở vị trí ghế khác nhau đối với cửa ra vào.

Gọi $N$ là tổng số cách xếp chỗ phân biệt. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Xếp ngẫu nhiên 7 chuyên gia, trong đó có An và Bình, vào 7 ghế cách đều quanh một bàn tròn có đúng một ghế sát cửa. Gọi $P$ là xác suất để An ngồi ghế sát cửa và Bình ngồi ở một trong hai ghế kề An.

Tính $T = 42000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Một đội bóng đá mini gồm 7 cầu thủ mang các số áo thi đấu từ 1 đến 7 gửi áo đi giặt sau trận đấu. Khi nhận lại áo, người quản lý trao ngẫu nhiên cho mỗi cầu thủ đúng một chiếc áo sao cho có đúng một cầu thủ nhận được đúng chiếc áo in số của mình, còn 6 cầu thủ còn lại đều nhận sai áo của mình.

Hai cách trao áo được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một cầu thủ nhận chiếc áo có số khác nhau.

Gọi $M$ là số cách trao áo thỏa mãn yêu cầu trên. Giá trị của $M$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Bảy người tham gia một trò chơi vòng tròn, mỗi người đặt điện thoại của mình vào một chiếc hộp chung. Quản trò lấy ngẫu nhiên và trao lại cho mỗi người đúng một chiếc điện thoại.

Gọi $P$ là xác suất để có đúng một người nhận được chiếc điện thoại của chính mình.

Tính $T = 7200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn có 10 ghế không đánh số thứ tự.

Người quản lý yêu cầu xếp chỗ sao cho các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau quanh bàn tròn (tức không có hai bạn cùng giới tính nào ngồi cạnh nhau).

Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $M$ là tổng số cách xếp chỗ hợp lệ. Giá trị của $M$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 10 ghế quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

Gọi $P$ là xác suất để các bạn nam và các bạn nữ ngồi xen kẽ nhau quanh bàn tròn.

Tính $T = 252000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Một nhà máy có ba dây chuyền với số công đoạn lần lượt là 4, 3 và 3. Trên mỗi dây chuyền, các công đoạn phải thực hiện theo thứ tự đã định. Xét các lịch gồm 10 lượt, mỗi lượt thực hiện đúng một công đoạn. Hai lịch khác nhau nếu có ít nhất một lượt thực hiện công đoạn thuộc hai dây chuyền khác nhau. Hỏi có bao nhiêu lịch hợp lệ?

KẾT QUẢ

## Vận dụng cao

**Bài 26. TME** Sáu đồng nghiệp trong một công ty tổ chức buổi tiệc tất niên, mỗi người chuẩn bị đúng một phần quà có dán tên mình. Toàn bộ sáu phần quà sau đó được xáo trộn ngẫu nhiên và phát lại cho sáu người, mỗi người nhận đúng một phần quà.

Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất hai người nhận được đúng phần quà do chính mình chuẩn bị.

Tính $T = 7200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Tám học sinh $A_1, \ldots, A_8$ ban đầu ngồi ở các ghế số 1 đến 8, trong đó $A_k$ ngồi ghế số $k$. Sau khi đổi chỗ, không học sinh nào ngồi lại ghế ban đầu và $A_1$ ngồi ghế số 2. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ sau khi đổi?

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Xâu ngẫu nhiên 8 viên ngọc có màu sắc khác nhau (trong đó có một viên màu đỏ và một viên màu xanh) thành một chuỗi vòng tay khép kín lật ngược được trong không gian 3 chiều.

Gọi $P$ là xác suất để viên ngọc màu đỏ và viên ngọc màu xanh nằm ở hai vị trí kề nhau trên chuỗi vòng tay.

Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một phòng thực hành tin học có 9 máy tính được đánh số từ 1 đến 9. Chín học sinh có số thứ tự điểm danh từ 1 đến 9 vào phòng máy và ngồi ngẫu nhiên vào 9 máy tính đó (mỗi học sinh một máy).

Có bao nhiêu cách ngồi sao cho có đúng 4 học sinh ngồi đúng máy tính trùng với số thứ tự của mình, còn 5 học sinh còn lại đều ngồi sai máy tính có số thứ tự của mình?

Gọi kết quả cần tìm là $K$. Giá trị của $K$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Một tủ lưu trữ hồ sơ y tế có 5 ngăn kéo được đánh số từ 1 đến 5 để lưu 5 hồ sơ bệnh án tương ứng từ 1 đến 5. Một thực tập sinh cất ngẫu nhiên 5 hồ sơ bệnh án vào 5 ngăn kéo (mỗi ngăn kéo chứa đúng một hồ sơ bệnh án).

Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất 3 hồ sơ bệnh án được xếp đúng vào ngăn kéo mang số hiệu của nó. Tính $T = 24000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Kĩ năng bó tập và tạo vách ngăn
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-07

# BUỔI 07. KĨ NĂNG BÓ TẬP VÀ TẠO VÁCH NGĂN

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Đọc đề.** Gạch chân nhóm bị ràng buộc và xác định đề hỏi số cách hay xác suất. Với bài xếp hàng, dùng điều kiện của nhóm đó để chọn cách đếm.

– Cả nhóm phải đứng liền nhau ⇒ gom nhóm thành một khối rồi xếp.
– Không có hai người trong nhóm đứng cạnh nhau ⇒ xếp những người còn lại trước rồi chèn nhóm vào các khe.

### 1 Bó tập

**Bài mẫu.** Xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ phân biệt thành hàng sao cho cả 3 bạn nữ đứng liền nhau.

1. **Gom nhóm.** Coi 3 bạn nữ là một khối. Cần xếp 5 bạn nam và 1 khối nữ, tức 6 đơn vị.
2. **Xếp bên ngoài khối.** Có 6! cách xếp 6 đơn vị.
3. **Xếp bên trong khối.** Với mỗi cách trên, có 3! cách đổi chỗ 3 bạn nữ. Vậy có $6! \cdot 3!$ cách.

**Tổng quát.** Trong $n$ phần tử phân biệt, nếu $r$ phần tử được chỉ định phải đứng liền nhau trên hàng ngang thì có $(n-r+1)!r!$ cách. Nếu có nhiều khối rời nhau, xếp các khối và phần tử lẻ trước, rồi nhân với số cách xếp bên trong từng khối.

### 2 Tạo vách ngăn

**Bài mẫu.** Vẫn với 5 bạn nam và 3 bạn nữ, lần này xếp sao cho không có hai bạn nữ đứng cạnh nhau.

1. **Xếp nhóm tạo vách.** Xếp 5 bạn nam trước, có 5! cách.
2. **Đếm khe.** Có 4 khe giữa các bạn nam và 2 khe ở hai đầu, tổng cộng 6 khe.
3. **Chèn nhóm cần tách.** Mỗi khe đặt tối đa một bạn nữ. Chọn 3 trong 6 khe rồi xếp 3 bạn nữ vào đó. Vậy có $5! \cdot C_6^3 \cdot 3!$ cách.



Ô tô màu biểu diễn các khe

**Tổng quát.** Xếp $n \geq 1$ phần tử tạo vách trước để có $n+1$ khe. Muốn chèn $m$ phần tử đôi một không kề nhau thì cần $m \leq n+1$. Với mỗi cách xếp nhóm tạo vách, số cách chèn là $A_{n+1}^m$ nếu nhóm chèn phân biệt và $C_{n+1}^m$ nếu nhóm chèn giống hệt nhau.

### 3 Điều chỉnh theo yêu cầu của đề

– **Xếp quanh bàn tròn, các cách quay trùng nhau tính là một.** Sau khi bó, xếp $q \geq 2$ đơn vị phân biệt theo $(q-1)!$ cách. Khi tạo khe, xếp $n \geq 2$ phần tử tạo vách phân biệt theo $(n-1)!$ cách và dùng $n$ khe, kể cả khe nối phần tử cuối với phần tử đầu.
– **Chọn $k$ ngày không liên tiếp trong $n$ ngày.** Xếp $n-k$ ngày không chọn trước. Chọn $k$ trong $n-k+1$ khe để đặt các ngày được chọn. Có $C_{n-k+1}^k$ cách nếu đủ khe, ngược lại có 0 cách.
– **Chia vào $k$ ngăn có thứ tự, mỗi ngăn khác rỗng.** Nếu $n$ vật phân biệt và thứ tự trong ngăn có ý nghĩa, xếp $n$ vật rồi đặt $k-1$ vách vào các khe giữa hai vật liên tiếp. Có $n!C_{n-1}^{k-1}$ cách với $1 \leq k \leq n$.

– **Tính xác suất.** Dùng bó tập hoặc tạo khe để đếm số cách thuận lợi. Với các kết quả đồng khả năng, chia số cách thuận lợi cho tổng số cách trong cùng một không gian mẫu.

**Kiểm tra trước khi tính.** Với bài chèn vào khe, đếm số khe sau khi đã xếp nhóm tạo vách. Nếu nhóm cần tách đông hơn số khe thì có 0 cách.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Một nhóm văn nghệ cổ động của trường THPT gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ được chọn để biểu diễn một tiết mục đồng ca. Ban tổ chức bố trí sẵn một hàng ngang gồm đúng 8 vị trí ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 8 trên sân khấu.

Đạo diễn yêu cầu xếp cả 8 học sinh vào 8 ghế nói trên sao cho tất cả 3 học sinh nữ luôn đứng cạnh nhau thành một khối liên tục.

Gọi $N$ là tổng số cách sắp xếp chỗ ngồi hợp lệ thỏa mãn yêu cầu của đạo diễn. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Trên một giá sách nằm ngang, một thủ thư cần sắp xếp 4 quyển sách môn Toán khác nhau, 3 quyển sách môn Vật lý khác nhau và 2 quyển sách môn Hóa học khác nhau thành một hàng ngang gồm đúng 9 vị trí.

Thủ thư yêu cầu sắp xếp sao cho tất cả các quyển sách thuộc cùng một môn học phải luôn đứng cạnh nhau thành từng khối môn riêng biệt.

Gọi $M$ là tổng số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu của thủ thư. Giá trị của $M$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Ban quản lý một khu đô thị sinh thái cần quy hoạch một dải phân cách ven hồ gồm đúng 17 vị trí trồng cây và đặt đèn chiếu sáng thẳng hàng liên tiếp. Công trình sử dụng 12 cây bóng mát hoàn toàn giống nhau và 5 cột đèn năng lượng mặt trời hoàn toàn giống nhau.

Kỹ sư thiết kế yêu cầu bố trí sao cho không có bất kỳ hai cột đèn nào được đặt ở hai vị trí cạnh nhau (để đảm bảo độ phủ sáng phân tán đều).

Hai phương án bố trí được coi là khác nhau nếu có ít nhất một vị trí đặt đối tượng khác nhau giữa hai phương án.

Gọi $K$ là tổng số phương án bố trí hợp lệ. Giá trị của $K$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một hàng ghế gồm đúng 8 chỗ ngồi liên tiếp được dành cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ (mỗi học sinh là một cá thể phân biệt).

Người quản lý muốn xếp 8 học sinh này vào 8 ghế sao cho không có bất kỳ hai học sinh nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp chỗ ngồi thỏa mãn yêu cầu của người quản lý. Giá trị của biểu thức $\dfrac{S}{10}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Một nhóm tình nguyện viên gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ (mỗi học sinh là một cá thể phân biệt) xếp hàng ngẫu nhiên thành một hàng ngang gồm 8 vị trí để đón khách mời tại hội thảo.

Gọi $P$ là xác suất để cả 3 bạn học sinh nữ luôn đứng cạnh nhau thành một khối liên tiếp trong hàng.

Tính $T = 28000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 6. TME** Một học sinh xếp ngẫu nhiên 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý và 2 quyển sách Hóa học (đôi một khác nhau) thành một hàng ngang trên giá sách gồm 9 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để các quyển sách thuộc cùng một môn học đều đứng cạnh nhau thành từng khối môn riêng biệt.

Tính $T = 420000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Có 8 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh (các viên bi cùng màu được coi là không phân biệt về hình thức). Một người xếp ngẫu nhiên cả 12 viên bi này thành một hàng ngang gồm 12 vị trí liên tiếp.

Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai viên bi màu xanh nào nằm ở hai vị trí cạnh nhau.

Tính $T = 5500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Một nhóm gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang gồm 8 ghế.

Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai học sinh nữ nào ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau.

Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Tại một hội nghị song phương, có 9 đại biểu gồm 5 đại biểu Việt Nam và 4 đại biểu Nhật Bản ngồi quanh một bàn tròn có đúng 9 ghế (các ghế không đánh số thứ tự).

Ban lễ tân yêu cầu xếp chỗ sao cho tất cả 5 đại biểu Việt Nam luôn ngồi cạnh nhau thành một khối liên tục quanh bàn tròn.

– Quy ước. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu cách xếp này có thể nhận được từ cách xếp kia qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $K$ là tổng số cách xếp chỗ đôi một khác nhau của 9 đại biểu. Giá trị của $K$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một bàn tiệc tròn gồm 9 ghế không đánh số thứ tự được bố trí cho 6 nam và 3 nữ.

Người quản lý nhà hàng yêu cầu sắp xếp sao cho không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

– Quy ước. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $H$ là tổng số cách xếp chỗ hợp lệ. Giá trị của biểu thức $\dfrac{H}{10}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 11. TME** Xếp ngẫu nhiên 4 đại biểu Việt Nam và 6 đại biểu Nhật Bản vào 10 ghế bố trí quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

Gọi $P$ là xác suất để tất cả 4 đại biểu Việt Nam luôn ngồi cạnh nhau thành một khối liên tục quanh bàn tròn.

Tính $T = 25200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Xếp ngẫu nhiên 7 bạn nam và 3 bạn nữ vào 10 ghế bố trí quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

Tính $T = 7200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Một tổ học tập gồm 8 học sinh, trong đó có hai bạn thân là An và Bình cùng 6 học sinh khác. Người quản lý xếp 8 học sinh này vào một hàng ngang gồm đúng 8 vị trí ghế được đánh số từ 1 đến 8 sao cho thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

– Bạn An và bạn Bình luôn ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau;

– Cả bạn An và bạn Bình đều không được ngồi ở hai vị trí ghế đầu mút của hàng (tức không ngồi ghế số 1 và ghế số 8).

Gọi $V$ là tổng số cách xếp chỗ ngồi thỏa mãn các yêu cầu trên. Giá trị của $V$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh gồm bạn An, bạn Bình và 6 học sinh khác vào một hàng ngang gồm 8 ghế.

Gọi $P$ là xác suất để An và Bình ngồi cạnh nhau đồng thời không có bạn nào trong hai bạn ngồi ở hai ghế đầu mút (ghế số 1 và ghế số 8).

Tính $T = 28000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự 1, 2, 3, 4 và bảy quyển sách chuyên khảo đôi một khác nhau. Bạn Cường xếp hết bảy quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn.

Khi đã xếp xong bảy quyển sách, hai cách xếp của bạn Cường được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

– Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp;
– Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi $T$ là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn Cường. Giá trị của biểu thức $\dfrac{T}{20}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Một nhóm gồm 7 học sinh trong đó có bạn An, bạn Bình và 5 học sinh khác được xếp vào một hàng ngang gồm 7 ghế được đánh số từ 1 đến 7.

Thầy giáo yêu cầu xếp chỗ sao cho bạn An và bạn Bình luôn ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau.

Gọi $N$ là tổng số cách xếp chỗ ngồi thỏa mãn yêu cầu của thầy giáo. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một nhóm gồm 6 bạn nam và 3 bạn nữ xếp thành một hàng ngang gồm 9 vị trí.

Người phụ trách yêu cầu xếp chỗ sao cho tất cả 3 bạn nữ luôn đứng cạnh nhau thành một khối liên tục.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp hàng hợp lệ. Giá trị của biểu thức $\dfrac{S}{10}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Trên một giá sách có 3 quyển sách môn Toán khác nhau, 3 quyển sách môn Ngữ văn khác nhau và 3 quyển sách môn Tiếng Anh khác nhau.

Thủ thư xếp toàn bộ 9 quyển sách này thành một hàng ngang sao cho các quyển sách thuộc cùng một môn học luôn đứng cạnh nhau thành từng khối môn riêng biệt.

Gọi $M$ là tổng số cách xếp sách hợp lệ. Giá trị của $M$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một kỹ sư viễn thông cần tạo ra các mã truyền tin dạng chuỗi nhị phân có độ dài đúng 18 bit, trong đó chuỗi chứa đúng 12 bit 0 và 6 bit 1.

Để tránh hiện tượng nhiễu xung liên tiếp, hệ thống yêu cầu chuỗi mã không được có bất kỳ hai bit 1 nào đứng ở hai vị trí cạnh nhau.

Hai chuỗi mã được coi là khác nhau nếu có ít nhất một vị trí bit có giá trị khác nhau giữa hai chuỗi.

Gọi $N$ là tổng số chuỗi mã hợp lệ có thể tạo thành. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một bác sĩ tại bệnh viện đa khoa cần đăng ký 5 ca trực đêm trong khoảng thời gian 18 ngày đầu tiên của tháng.

Để đảm bảo sức khỏe hồi phục, bác sĩ yêu cầu không được trực vào hai ngày liên tiếp nhau (tức không có hai ca trực nào diễn ra ở hai ngày kề nhau).

Hai phương án chọn lịch trực được coi là khác nhau nếu có ít nhất một ngày trực khác nhau giữa hai phương án.

Gọi $S$ là tổng số phương án chọn lịch trực hợp lệ. Giá trị của $S$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Một tổ học sinh gồm 6 bạn nam và 3 bạn nữ xếp thành một hàng ngang gồm 9 vị trí ghế để tham dự lễ khai giảng.

Giáo viên chủ nhiệm yêu cầu sắp xếp sao cho không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp chỗ ngồi thỏa mãn yêu cầu. Giá trị của biểu thức $\dfrac{S}{100}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh gồm bạn An, bạn Bình và 5 học sinh khác vào một hàng ngang gồm 7 ghế.

Gọi $P$ là xác suất để bạn An và bạn Bình ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau.

Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Xếp ngẫu nhiên 6 bạn nam và 3 bạn nữ vào một hàng ngang gồm 9 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để cả 3 bạn nữ đều đứng cạnh nhau thành một khối liên tiếp.

Tính $T = 24000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Xếp ngẫu nhiên 3 quyển sách Toán, 3 quyển sách Ngữ văn và 3 quyển sách Tiếng Anh (đôi một khác nhau) thành một hàng ngang trên giá sách gồm 9 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để các quyển sách thuộc cùng một môn học đều đứng cạnh nhau thành từng khối môn riêng biệt.

Tính $T = 560000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một máy tính phát ngẫu nhiên một chuỗi nhị phân độ dài 12 bit gồm đúng 8 bit 0 và 4 bit 1 (tất cả các chuỗi nhị phân thỏa mãn đều đồng khả năng xuất hiện).

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi nhị phân nhận được không có bất kỳ hai bit 1 nào đứng cạnh nhau.

Tính $T = 5500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 11. TME** Một nhân viên trực ca chọn ngẫu nhiên 4 ngày trực trong khoảng thời gian 14 ngày làm việc liên tiếp (mỗi phương án chọn 4 ngày đều đồng khả năng).

Gọi $P$ là xác suất để trong 4 ngày được chọn, không có bất kỳ hai ngày nào là hai ngày liên tiếp nhau.

Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Xếp ngẫu nhiên 6 bạn nam và 3 bạn nữ vào một hàng ngang gồm 9 ghế.

Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau.

Tính $T = 4800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Xếp 8 học sinh gồm ba bạn $A, B, C$ và 5 học sinh khác vào một hàng ngang gồm 8 ghế.

Yêu cầu xếp chỗ sao cho ba bạn $A, B, C$ luôn đứng cạnh nhau thành một khối, đồng thời bạn $B$ luôn phải đứng ở vị trí chính giữa bạn $A$ và bạn $C$.

Gọi $H$ là tổng số cách xếp chỗ thỏa mãn các yêu cầu trên. Giá trị của $H$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một đội văn nghệ gồm 5 bạn nam và 4 bạn nữ được xếp thành một hàng ngang gồm 9 vị trí.

Đạo diễn yêu cầu xếp sao cho các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ nhau trên toàn bộ hàng ngang (tức không có hai bạn cùng giới tính nào đứng cạnh nhau).

Gọi $W$ là tổng số cách xếp hàng thỏa mãn yêu cầu của đạo diễn. Giá trị của $W$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Một hàng ghế gồm 8 chỗ ngồi liên tiếp dành cho 8 học sinh, trong đó có hai cặp bạn thân là $(A,B)$ và $(C,D)$ cùng 4 học sinh khác.

Xếp 8 học sinh vào 8 ghế sao cho bạn $A$ luôn ngồi cạnh bạn $B$, đồng thời bạn $C$ luôn ngồi cạnh bạn $D$.

Gọi $K$ là tổng số cách xếp chỗ hợp lệ. Giá trị của $K$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Một mật mã dạng từ có 8 chữ cái đôi một khác nhau gồm 5 chữ phụ âm và 3 chữ nguyên âm được chọn từ bảng chữ cái.

Chuyên gia an ninh yêu cầu sắp xếp 8 chữ cái này thành một hàng ngang sao cho không có bất kỳ hai chữ nguyên âm nào đứng ở hai vị trí cạnh nhau.

Hai từ được coi là khác nhau nếu có ít nhất một vị trí chữ cái khác nhau.

Gọi $W$ là tổng số từ mã hợp lệ có thể tạo thành. Giá trị của biểu thức $\dfrac{W}{10}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Có 8 người gồm 4 cặp vợ chồng ngồi quanh một bàn tròn có đúng 8 ghế không đánh số thứ tự.

Trong đó, có một cặp vợ chồng cụ thể (ông $A$ và bà $B$) bắt buộc phải luôn ngồi ở hai ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

– Quy ước. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $K$ là tổng số cách xếp chỗ đôi một khác nhau. Giá trị của $K$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 người (trong đó có bạn $A$ và bạn $B$) vào 8 ghế quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.

Gọi $P$ là xác suất để bạn $A$ và bạn $B$ ngồi ở hai ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh gồm ba bạn $A,B,C$ và 5 học sinh khác vào một hàng ngang gồm 8 vị trí ghế.

Gọi $P$ là xác suất để ba bạn $A,B,C$ đứng cạnh nhau và bạn $B$ đứng ở vị trí giữa bạn $A$ và bạn $C$.

Tính $T = 56000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 4 bạn nữ vào một hàng ngang gồm 9 ghế.
Gọi $P$ là xác suất để các bạn nam và các bạn nữ đứng xen kẽ nhau hoàn toàn trên hàng ghế.
Tính $T = 252000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh gồm hai cặp bạn thân $(A, B)$ và $(C, D)$ cùng 4 học sinh khác vào hàng ngang gồm 8 ghế.
Gọi $P$ là xác suất để bạn $A$ ngồi cạnh bạn $B$ đồng thời bạn $C$ ngồi cạnh bạn $D$.
Tính $T = 42000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Xếp ngẫu nhiên 5 chữ phụ âm khác nhau và 3 chữ nguyên âm khác nhau thành một từ có 8 chữ cái (mỗi cách xếp đều đồng khả năng xuất hiện).
Gọi $P$ là xác suất để trong từ nhận được, không có bất kỳ hai chữ nguyên âm nào đứng cạnh nhau.
Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 23. TME** Xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn có đúng 10 ghế (các ghế không đánh số thứ tự).
Ban tổ chức yêu cầu sắp xếp sao cho không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai vị trí ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.

– Quy ước. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể nhận được từ nhau qua một phép quay bàn tròn quanh tâm.

Gọi $V$ là tổng số cách xếp chỗ hợp lệ. Giá trị của biểu thức $\dfrac{V}{10}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Xếp ngẫu nhiên 6 bạn nam và 4 bạn nữ vào 10 ghế bố trí quanh một bàn tròn không đánh số thứ tự.
Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai bạn nữ nào ngồi ở hai ghế cạnh nhau quanh bàn tròn.
Tính $T = 42000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Từ tập các chữ số $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta lập ra các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau.

Có bao nhiêu số tự nhiên được lập từ tập $S$ sao cho ba chữ số 1, 2, 3 luôn đứng ở ba hàng chữ số liền kề nhau?

Gọi kết quả cần tìm là $N$. Giá trị của $N$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập chữ số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (mỗi số có cùng khả năng được chọn như nhau).

Gọi $P$ là xác suất để trong số tự nhiên được chọn, ba chữ số 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau.

Tính $T = 28000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Có ba ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự 1, 2, 3 và bảy quyển sách chuyên đề khác nhau. Bạn An xếp hết bảy quyển sách nói trên vào ba ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn.

Khi đã xếp xong bảy quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

– Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp;
– Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi $T$ là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của biểu thức $\dfrac{T}{20}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Có ba ngăn tủ sách được đánh số thứ tự 1, 2, 3 và bảy quyển sách văn học khác nhau. Một học sinh xếp hết bảy quyển sách vào ba ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách trong từng ngăn được xếp thành hàng ngang có thứ tự phân biệt từ trái sang phải.

Gọi $T$ là tổng số cách xếp sách đôi một khác nhau. Giá trị của biểu thức $\dfrac{T}{50}$ bằng bao nhiêu?

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Xếp 7 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn được đánh số 1, 2 và 3, sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách.

Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu có ít nhất một quyển sách nằm ở ngăn khác hoặc thứ tự sách từ trái sang phải trong một ngăn thay đổi.

Chọn ngẫu nhiên một cách xếp trong tất cả các cách xếp thỏa mãn điều kiện trên, mỗi cách có khả năng được chọn như nhau. Gọi $P$ là xác suất để ngăn số 1 có đúng hai quyển sách. Tính $T = 7500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Có 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh (các viên bi cùng màu không phân biệt về hình thức) được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang gồm 10 vị trí liên tiếp.

Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ hai viên bi màu xanh nào nằm ở hai vị trí cạnh nhau.

Tính $T = 12000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Đánh số thứ tự
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-08

# BUỔI 08. ĐÁNH SỐ THỨ TỰ VÀ ĐỊNH LÝ KAPLANSKY

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Đọc đề.** Xác định các vị trí nằm trên hàng thẳng hay trên vòng tròn. Nếu đề yêu cầu ít nhất $s$ vị trí ở giữa hai vị trí được chọn liên tiếp, hiệu hai chỉ số trên hàng thẳng phải ít nhất là $s+1$.

### 1 Đánh số khe để chèn

Xếp trước $n$ phần tử làm vách. Đánh số $n+1$ khe từ trái sang phải, kể cả hai đầu. Để $k$ phần tử chèn không kề nhau, chọn $k$ khe khác nhau. Nếu các phần tử chèn phân biệt, xếp chúng vào các khe đã chọn theo $k!$ cách. Cuối cùng nhân với số cách xếp nhóm làm vách.

Khe 1 $X_1$ Khe 2 $X_2$ Khe 3 $X_3$ Khe 4

**Chia sách vào ngăn.** Xếp $n$ sách phân biệt thành một hàng, rồi chọn $k-1$ trong $n-1$ khe giữa hai sách để chia thành $k$ ngăn có thứ tự và khác rỗng. Có $n!C_{n-1}^{k-1}$ cách, với $1 \le k \le n$.

### 2 Dời chỉ số trên hàng thẳng

1. Viết các vị trí được chọn theo thứ tự $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n$. Nếu cần ít nhất $s$ vị trí trống giữa hai vị trí được chọn liên tiếp, ta có $a_{i+1} - a_i \ge s+1$.
2. Đặt $b_i = a_i - (i-1)s$. Khi đó $1 \le b_1 < \cdots < b_k \le n-(k-1)s$. Cộng lại $(i-1)s$ vào $b_i$ để khôi phục vị trí ban đầu.
3. Chọn $k$ chỉ số mới theo $C_{n-(k-1)s}^{k}$ cách nếu $n-(k-1)s \ge k$. Nếu cần gán $k$ đối tượng phân biệt vào các vị trí đã chọn, nhân thêm $k!$.

**Ví dụ nhanh.** Chọn 3 vị trí trong 9 vị trí, giữa hai vị trí được chọn liên tiếp có ít nhất 2 ô trống. Bộ $(2,5,9)$ dời thành $(2,3,5)$. Các chỉ số mới nằm trong 5 vị trí đầu, nên có $C_5^3 = 10$ cách.

**Khoảng cách thay đổi.** Nếu hiệu tối thiểu giữa vị trí thứ $i$ và thứ $i+1$ là $d_i$, dời vị trí thứ $i$ đi $\sum_{j=1}^{i-1}(d_j-1)$ đơn vị. Chặn trên mới là $n - \sum_{j=1}^{k-1}(d_j-1)$.

### 3 Định lý Kaplansky trên vòng tròn

Đánh số $n$ vị trí phân biệt quanh vòng tròn. Vị trí 1 và $n$ kề nhau. Với $1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$, số cách chọn $k$ vị trí đôi một không kề nhau là

$$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}.$$

**Tách theo vị trí 1.** Nếu bỏ vị trí 1, chọn $k$ vị trí không kề nhau trên hàng $2,\dots,n$, được $C_{n-k}^{k}$ cách. Nếu chọn vị trí 1, bỏ hai vị trí kề nó rồi chọn $k-1$ vị trí trên hàng còn lại, được $C_{n-k-1}^{k-1}$ cách. Cộng hai kết quả thu được công thức trên.

**Mở rộng.** Nếu cần ít nhất $s$ vị trí không chọn trong mỗi khe theo chiều kim đồng hồ giữa hai vị trí được chọn liên tiếp, với $k \ge 2$ và $n \ge k(s+1)$, số cách là

$$\frac{n}{k}C_{n-sk-1}^{k-1} = \frac{n}{n-sk}C_{n-sk}^{k}.$$

Chọn một vị trí đã chọn làm mốc theo $n$ cách. Sau khi chừa $s$ vị trí ở mỗi khe, phân bố $n-k-sk$ vị trí còn lại vào $k$ khe có thứ tự. Mỗi tập vị trí được đếm $k$ lần, ứng với $k$ cách chọn mốc.


thuvientoanhoc.com

**Tính xác suất.** Nếu chọn đồng khả năng $k$ vị trí từ $n$ vị trí, chia số cách chọn thỏa điều kiện cho $C_n^k$. Với đường đi chỉ gồm bước sang phải và bước lên, đánh số các lượt rồi chọn vị trí của các bước lên.

**Kiểm tra trước khi tính.** Chuyển "có ít nhất $s$ vị trí ở giữa" thành khoảng cách chỉ số ít nhất $s+1$. Trên vòng tròn, kiểm tra cả khe đi qua chỗ nối giữa vị trí cuối và vị trí đầu.

# B VÍ DỤ MINH HỌA

## Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Trong khoa học máy tính và mã hóa dữ liệu, một chuỗi bit nhị phân hợp lệ có độ dài bằng 17 được cấu thành từ 12 bit 0 và 5 bit 1. Để tránh hiện tượng nhiễu xung đồng hồ trên đường truyền tín hiệu cao tốc, giao thức truyền dẫn bắt buộc không được phép có hai bit 1 nào đứng ở hai vị trí liên tiếp nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi bit nhị phân hợp lệ thỏa mãn tiêu chuẩn kỹ thuật trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Cho tập hợp số nguyên dương $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Một giáo viên toán cần chọn ra một tập con gồm 4 phần tử từ tập $S$ sao cho trong tập con được chọn không chứa bất kỳ hai số tự nhiên liên tiếp nào. Hỏi giáo viên đó có tất cả bao nhiêu cách chọn tập con thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Trong buổi lễ chào cờ đầu tuần của trường THPT Chuyên, một đội nghi thức gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc gồm 8 vị trí để chuẩn bị tiến vào lễ đài. Để đảm bảo tính trang nghiêm và đội hình cân đối, ban tổ chức yêu cầu không có hai học sinh nữ nào đứng ở hai vị trí kề nhau.

Gọi $S$ là tổng số cách sắp xếp đội hình thỏa mãn yêu cầu trên. Tính $T = \dfrac{S}{10}$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một nhóm học tập gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ cùng nhau chụp ảnh kỷ yếu. Nhiếp ảnh gia xếp ngẫu nhiên 8 học sinh này đứng thành một hàng ngang gồm 8 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để trong hàng không có hai học sinh nữ nào đứng cạnh nhau. Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Một hệ thống vi xử lý phát ngẫu nhiên một chuỗi ký hiệu nhị phân có độ dài gồm 12 bit, trong đó luôn chứa chính xác 8 bit 0 và 4 bit 1.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi nhị phân được phát ra không chứa bất kỳ hai bit 1 nào đứng kề nhau. Tính $T = 5500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Từ một hộp chứa 15 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 15, người ta rút ngẫu nhiên cùng một lúc 4 tấm thẻ.

Gọi $P$ là xác suất để trong 4 tấm thẻ được rút ra không có hai tấm thẻ nào mang hai số tự nhiên liên tiếp. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 7. TME** Cho tập hợp các số nguyên dương $S = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Một hội đồng khoa học cần chọn ra 4 số từ tập hợp $S$ để làm các mã số bảo mật sao cho khoảng cách giữa hai số bất kỳ trong 4 số được chọn luôn lớn hơn hoặc bằng 4. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn bộ 4 số bảo mật thỏa mãn điều kiện an toàn thông tin nói trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Từ tập hợp các số tự nhiên $S = \{1, 2, \ldots, 25\}$, người ta chọn ngẫu nhiên một tập con gồm 3 phần tử.

Gọi $P$ là xác suất để khoảng cách giữa hai phần tử bất kỳ trong tập con được chọn luôn không nhỏ hơn 5 (tức là khoảng cách giữa hai số bất kỳ luôn lớn hơn hoặc bằng 5). Tính $T = 11500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Một bãi đỗ xe thông minh của trung tâm thương mại có 16 vị trí đỗ xe thẳng hàng được đánh số thứ tự từ 1 đến 16. Có 4 chiếc xe ô tô thuộc 4 thương hiệu khác nhau cần đỗ vào bãi. Để tránh va chạm khi mở cửa và tạo luồng di chuyển an toàn, ban quản lý yêu cầu giữa hai chiếc xe bất kỳ luôn phải có ít nhất 2 vị trí đỗ còn trống. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp 4 chiếc xe vào bãi đỗ thỏa mãn tiêu chuẩn kỹ thuật trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một tủ sách chuyên dụng có 4 ngăn phân biệt được đánh số từ Ngăn 1 đến Ngăn 4. Một thủ thư cần xếp 7 cuốn sách chuyên khảo Toán học phân biệt vào 4 ngăn này sao cho mỗi ngăn đều có ít nhất một cuốn sách. Trong mỗi ngăn, các cuốn sách được xếp thẳng hàng từ trái sang phải và thứ tự sắp xếp của từng cuốn sách trong ngăn đều được tính là phân biệt.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp 7 cuốn sách vào 4 ngăn. Tính $T = \dfrac{S}{20}$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Xếp 7 cuốn sách phân biệt vào 4 ngăn đánh số từ 1 đến 4, mỗi ngăn có ít nhất một cuốn. Hai cách xếp khác nhau nếu có sách đổi ngăn hoặc thứ tự sách từ trái sang phải trong một ngăn thay đổi. Chọn đồng khả năng một cách xếp. Gọi $P$ là xác suất để ngăn 1 chứa đúng 3 cuốn sách. Tính $T = 20000P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Một lớp học có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng ngang gồm 10 chiếc ghế được đánh số từ 1 đến 10. Để đảm bảo giãn cách cự ly giữa các học sinh nữ, giáo viên yêu cầu giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất 2 học sinh nam ngồi xen giữa.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp 10 học sinh vào dãy ghế thỏa mãn yêu cầu trên. Tính $T = \dfrac{S}{200}$.

KẾT QUẢ

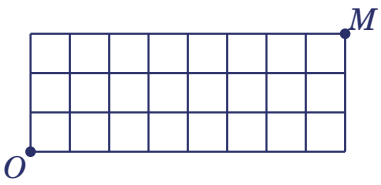
**Ví dụ 13. TME** Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ ngồi vào một dãy gồm 10 chiếc ghế xếp thành hàng ngang (mỗi bạn ngồi đúng một ghế).

Gọi $P$ là xác suất để giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất 2 học sinh nam ngồi xen giữa. Tính $T = 12000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

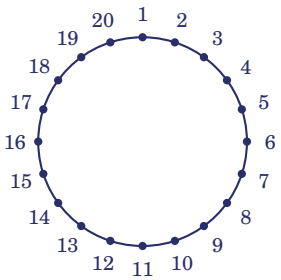
**Ví dụ 14. TME** Một hạt chuyển động trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xuất phát từ gốc tọa độ $O(0,0)$ và kết thúc tại điểm $M(8,3)$. Tại mỗi bước, hạt chỉ có thể di chuyển một bước sang phải theo vectơ $\vec{u} = (1,0)$ hoặc một bước lên trên theo vectơ $\vec{v} = (0,1)$. Các đường đi từ điểm đầu đến điểm cuối theo hai bước cho phép đều đồng khả năng. Để kiểm soát dòng xung năng lượng, một điều kiện kỹ thuật yêu cầu: giữa hai bước nhảy lên trên liên tiếp, hạt phải thực hiện ít nhất 2 bước nhảy sang phải.




Gọi $P$ là xác suất để quỹ đạo của hạt thỏa mãn điều kiện kỹ thuật trên. Tính $T = 9900 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Trên một bờ tường bao khép kín hình tròn của một khu bảo tồn quân sự, người ta lắp đặt 20 camera giám sát cách đều nhau, được đánh số theo chiều kim đồng hồ từ 1 đến 20. Để bảo trì định kỳ, ban chỉ huy cần tạm dừng hoạt động 5 camera sao cho không có bất kỳ hai camera nào bị dừng hoạt động ở hai vị trí cạnh nhau trên vòng tròn. Hỏi ban chỉ huy có tất cả bao nhiêu cách lựa chọn 5 camera cần bảo trì thỏa mãn phương án an ninh?




**KẾT QUẢ**

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Một dây đèn led trang trí gồm 13 bóng đèn phát ánh sáng trắng và 4 bóng đèn phát ánh sáng đỏ (các bóng cùng màu là giống hệt nhau) được mắc nối tiếp thành một hàng thẳng. Để tạo hiệu ứng ánh sáng hài hòa, kỹ sư yêu cầu không được bố trí hai bóng đèn đỏ ở hai vị trí cạnh nhau. Hỏi kỹ sư có tất cả bao nhiêu cách sắp đặt thứ tự các bóng đèn trên dây led?



KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một xâu mã nhị phân có độ dài gồm 10 bit được sinh ngẫu nhiên trên máy tính, trong đó luôn chứa chính xác 7 bit mang giá trị 0 và 3 bit mang giá trị 1.

Gọi $P$ là xác suất để xâu mã nhị phân đó không chứa bất kỳ hai bit 1 nào đứng kề nhau. Tính $T = 4500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho tập hợp số nguyên dương $S = \{1, 2, \ldots, 22\}$. Có bao nhiêu cách chọn ra một tập hợp con gồm 4 phần tử từ tập $S$ sao cho không chứa bất kỳ hai số tự nhiên liên tiếp nào?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một hộp chứa 16 thẻ bài được đánh số thứ tự từ 1 đến 16. Rút ngẫu nhiên đồng thời 4 thẻ bài từ hộp.

Gọi $P$ là xác suất để trong 4 thẻ bài rút ra không có hai thẻ bài nào mang hai số tự nhiên liên tiếp. Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Trên một giá trưng bày tài liệu, người quản thư cần xếp 6 cuốn sách tham khảo môn Toán phân biệt làm vách ngăn và 3 cuốn sách tham khảo môn Ngữ văn phân biệt sao cho không có hai cuốn sách Ngữ văn nào xếp cạnh nhau.

Gọi $S$ là tổng số cách sắp xếp 9 cuốn sách thành một hàng ngang. Tính $T = \dfrac{S}{50}$.

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Sắp xếp ngẫu nhiên 6 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang gồm 8 vị trí để đồng diễn thể dục.

Gọi $P$ là xác suất để hai học sinh nữ không đứng ở hai vị trí kề nhau. Tính $T = 4000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Trên một kệ sách có 15 vị trí đặt sách liên tiếp được đánh số từ 1 đến 15. Một học sinh cần đặt 3 cuốn sách giáo khoa khác nhau vào 3 vị trí trên kệ sao cho không có hai cuốn sách nào đặt ở hai vị trí kề nhau. Hỏi học sinh đó có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp?

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Từ tập hợp các số tự nhiên $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$, người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số.

Gọi $P$ là xác suất để trong 3 số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp. Tính $T = 3500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một đợt tập huấn chuyên đề diễn ra trong 14 ngày liên tiếp được đánh số từ ngày 1 đến ngày 14. Học viên Bình đăng ký tham dự ngẫu nhiên 3 buổi báo cáo chuyên đề vào 3 ngày khác nhau.

Gọi $P$ là xác suất để không có hai buổi báo cáo nào Bình tham dự diễn ra vào hai ngày liên tiếp nhau. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 10. TME** Từ tập hợp các số nguyên $S = \{1, 2, \ldots, 30\}$, người ta cần chọn ra một tập con gồm 3 phần tử phân biệt sao cho khoảng cách giữa hai số bất kỳ trong tập con luôn lớn hơn hoặc bằng 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn tập con thỏa mãn?

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, 22\}$.

Gọi $P$ là xác suất để khoảng cách giữa hai số bất kỳ trong 3 số được chọn luôn lớn hơn hoặc bằng 3. Tính $T = 7700 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một đoàn tàu hỏa gồm 20 toa chở khách thẳng hàng được đánh số thứ tự từ 1 đến 20. Đội kiểm định y tế cần chọn ra 5 toa tàu để phun thuốc khử khuẩn định kỳ sao cho không có hai toa tàu nào được chọn ở cạnh nhau, đồng thời không chọn toa số 1 và toa số 20 (do hai toa đầu cuối đã được xử lý kỹ thuật riêng biệt). Hỏi đội kiểm định có tất cả bao nhiêu cách chọn 5 toa tàu?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Một phòng hội nghị có một dãy bàn dài gồm 18 chiếc ghế thẳng hàng được đánh số từ 1 đến 18. Có 4 đại biểu khách mời đến tham dự và được xếp ngồi vào dãy ghế, mỗi người ngồi một ghế sao cho giữa hai đại biểu bất kỳ luôn có ít nhất một ghế để trống.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp chỗ ngồi cho 4 đại biểu. Tính $T = \dfrac{S}{10}$.

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Xếp ngẫu nhiên 4 học sinh vào một dãy gồm 12 chiếc ghế thẳng hàng (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế).

Gọi $P$ là xác suất để giữa hai học sinh bất kỳ luôn có ít nhất một chiếc ghế còn trống. Tính $T = 5500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Cho tập hợp số tự nhiên $S = \{1, 2, \ldots, 29\}$. Có bao nhiêu cách chọn ra một tập hợp con gồm 4 phần tử từ tập $S$ sao cho hiệu giữa hai phần tử bất kỳ trong tập con luôn lớn hơn hoặc bằng 4?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Từ tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, 30\}$, người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 phần tử.

Gọi $P$ là xác suất để hiệu giữa hai phần tử bất kỳ trong 3 phần tử được chọn luôn lớn hơn hoặc bằng 6. Tính $T = 20300 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Một bãi đỗ xe thông minh có 20 ô đỗ xe thẳng hàng được đánh số từ 1 đến 20. Có 4 chiếc xe ô tô phân biệt cần đỗ vào bãi sao cho giữa hai chiếc xe bất kỳ luôn có ít nhất 2 ô đỗ xe còn trống để đảm bảo khoảng cách an toàn.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp 4 xe vào bãi đỗ. Tính $T = \dfrac{S}{6}$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một bãi đỗ xe có 15 ô đỗ thẳng hàng. Có 3 chiếc xe ô tô cùng một hãng taxi giống hệt nhau vào đỗ ngẫu nhiên (mỗi xe đỗ trọn một ô).

Gọi $P$ là xác suất để giữa hai chiếc xe bất kỳ luôn có ít nhất 2 ô đỗ còn trống. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một đội văn nghệ xung kích gồm 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng ngang gồm 11 vị trí. Để tạo bố cục chụp ảnh cân đối, ban tổ chức yêu cầu hai đầu hàng bắt buộc phải là học sinh nam và giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất một học sinh nam.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp hàng. Tính $T = \dfrac{S}{2800}$.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng ngang gồm 11 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để hai đầu hàng đều là học sinh nam và giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất một học sinh nam đứng xen kẽ. Tính $T = 9900 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Xếp 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng dọc gồm 12 vị trí sao cho giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất 3 học sinh nam đứng xen kẽ.

Gọi $S$ là tổng số cách xếp hàng. Tính $T = \dfrac{S}{18144}$.

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Xếp ngẫu nhiên 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng dọc gồm 12 vị trí.

Gọi $P$ là xác suất để giữa hai học sinh nữ bất kỳ luôn có ít nhất 3 học sinh nam đứng xen kẽ. Tính $T = 22000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 23. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, 25\}$. Cần chọn ra 4 số nguyên $a, b, c, d$ từ tập $S$ thỏa mãn điều kiện thứ tự và khoảng cách bất đối xứng: $a < b < c < d$, $b - a \geq 2$, $c - b \geq 3$ và $d - c \geq 4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn bộ 4 số thỏa mãn các điều kiện trên?

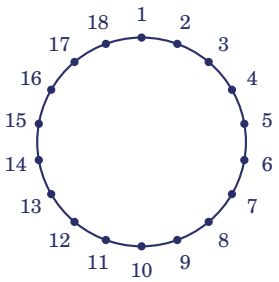
KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Từ tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, 18\}$, chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 phần tử phân biệt.

Gọi $P$ là xác suất để khi sắp thứ tự 4 phần tử được chọn là $a < b < c < d$, chúng thỏa mãn đồng thời: $b - a \geq 2$, $c - b \geq 3$ và $d - c \geq 4$. Tính $T = 6800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

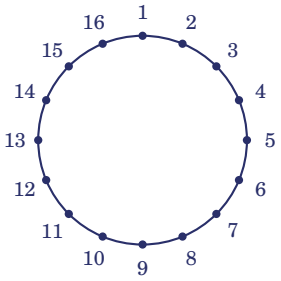
**Bài 25. TME** Trên một đường tròn khép kín, người ta đánh dấu 18 điểm phân biệt cách đều nhau được đánh số từ 1 đến 18 theo chiều kim đồng hồ. Cần chọn ra một tập hợp gồm 4 điểm sao cho trong đó không có hai điểm nào nằm kề nhau trên đường tròn. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn 4 điểm thỏa mãn?




KẾT QUẢ

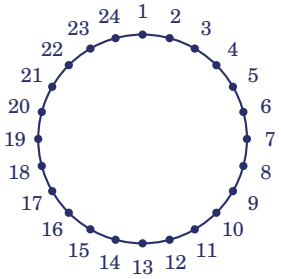
**Bài 26. TME** Trên một đường tròn có 16 điểm phân biệt cách đều nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 điểm từ 16 điểm này.

Gọi $P$ là xác suất để trong 4 điểm được chọn không có hai điểm nào nằm kề nhau trên đường tròn. Tính $T = 9100 \cdot P$.




KẾT QUẢ

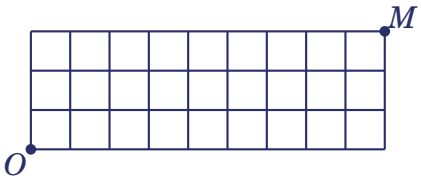
**Bài 27. TME** Một hệ thống quan trắc gồm 24 trạm viễn thông được lắp đặt cách đều nhau xung quanh chu vi của một đảo hình tròn, đánh số thứ tự từ 1 đến 24 theo chiều kim đồng hồ. Do bão lớn, trung tâm điều hành cần tạm ngắt kết nối đồng thời 5 trạm sao cho khi đi theo chiều kim đồng hồ, giữa hai trạm bị ngắt liên tiếp luôn có ít nhất 2 trạm còn hoạt động. Hỏi trung tâm có tất cả bao nhiêu phương án lựa chọn 5 trạm để ngắt kết nối?




KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Một robot di chuyển trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$ từ gốc tọa độ $O(0,0)$ đến điểm đích $M(9,3)$. Tại mỗi bước, robot chỉ có thể di chuyển sang phải theo vectơ $\vec{u} = (1,0)$ hoặc di chuyển lên trên theo vectơ $\vec{v} = (0,1)$. Các đường đi từ điểm đầu đến điểm cuối theo hai bước cho phép đều đồng khả năng. Để hạn chế tiêu hao động năng nâng, kỹ thuật viên cài đặt điều kiện: giữa hai bước đi lên trên liên tiếp, robot phải thực hiện ít nhất 3 bước đi sang phải.

Gọi $P$ là xác suất để hành trình robot thực hiện thỏa mãn điều kiện kỹ thuật này. Tính $T = 33000 \cdot P$.




KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Trên một tuyến đường, các mốc kilômét từ 1 đến 40 được đánh số theo thứ tự. Chọn 5 mốc đặt trạm kiểm soát sao cho mốc đầu tiên có số ít nhất là 3, mốc cuối cùng có số nhiều nhất là 37 và hiệu giữa hai số mốc được chọn liên tiếp ít nhất là 5. Gọi $S$ là số phương án. Tính $T = \dfrac{S}{3}$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Trên một tuyến cao tốc dài 36 km gồm 36 vị trí km được đánh số từ 1 đến 36, cơ quan chức năng chọn ngẫu nhiên 4 vị trí km khác nhau để đặt các camera quan sát tốc độ.

Gọi $P$ là xác suất để khoảng cách giữa hai camera quan sát bất kỳ luôn cách nhau ít nhất 6 km (hiệu giữa hai chỉ số được chọn liên tiếp ít nhất là 6). Tính $T = 18700 \cdot P$.




KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL

Bài toán chia kẹo Euler
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-09

# BUỔI 09. BÀI TOÁN CHIA KẸO EULER

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Nhận dạng bài toán chia kẹo

Chia hết $n$ vật giống nhau cho $k$ người phân biệt.
Gọi $x_i$ là số vật người thứ $i$ nhận được.
Mỗi cách chia ứng với đúng một bộ số theo thứ tự $(x_1, \dots, x_k)$ thỏa mãn $x_1 + \cdots + x_k = n$.

**Ai cũng có phần.**
Xếp $n$ viên kẹo thành hàng. Chọn $k-1$ trong $n-1$ khe giữa hai viên để đặt vách.
Số cách là $C_{n-1}^{k-1}$ khi $n \geq k \geq 1$.

**Có thể nhận 0 viên.**
Xếp chung $n$ viên kẹo và $k-1$ vách. Hai vách đứng liền nhau hoặc một vách ở đầu hàng biểu thị một phần rỗng.
Chọn $k-1$ vị trí đặt vách trong $n+k-1$ vị trí, được $C_{n+k-1}^{k-1}$ cách.



Một cách chia 5 viên cho 3 người theo bộ $(2, 0, 3)$

### 2 Đưa điều kiện về tổng các biến không âm

- **Có định mức tối thiểu.** Cấp trước $a_i$ vật cho người thứ $i$, rồi chia phần còn lại.
  Đặt $y_i = x_i - a_i \geq 0$.
  Nếu phần còn lại âm, có 0 cách.
- **Tổng không vượt quá** $n$. Thêm biến không âm $t = n - (x_1 + \cdots + x_k)$ biểu diễn số vật còn dư.
  Mỗi bộ ban đầu xác định đúng một giá trị $t$.
- **Hệ số, chẵn lẻ hoặc so sánh hai biến.** Cố định biến có hệ số hoặc liệt kê các giá trị đúng chẵn lẻ rồi đếm phần còn lại.
  Nếu $x_1 \geq x_2 + c$, có thể đặt $x_1 = x_2 + c + t$ với $t \geq 0$.

**Ví dụ nhanh.** Chia 9 viên cho 3 bạn với định mức tối thiểu lần lượt là 1, 2 và 3 viên.
Sau khi cấp trước 6 viên, chia tự do 3 viên còn lại, được $C_5^2 = 10$ cách.

### 3 Xử lý chặn trên và tính xác suất

Với điều kiện $x_i \leq b_i$, trường hợp vi phạm là $x_i \geq b_i + 1$.
Tính số cách vi phạm bằng cách cấp trước $b_i + 1$ vật cho người thứ $i$, đồng thời giữ định mức dưới của các người còn lại.

- Một chặn trên. Lấy tổng số cách chia trừ số cách vi phạm.
- Nhiều chặn trên. Trừ số cách vi phạm từng chặn.
  Cộng lại số cách vi phạm đồng thời từng cặp, rồi tiếp tục xen kẽ dấu.
- Xác suất. Nếu các bộ số lượng đồng khả năng, chia số bộ thuận lợi cho tổng số bộ thỏa điều kiện ban đầu.

**Kiểm tra trước khi tính.** Xác định vật có giống nhau và các người nhận có phân biệt hay không. Sau khi trừ định mức dưới, dùng số vật còn lại để đếm và áp dụng chặn trên nếu có.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thỏa mãn phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20.$$

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Một người mẹ có 15 chiếc kẹo sô-cô-la giống hệt nhau đem chia ngẫu nhiên cho 4 đứa con của mình (mỗi đứa con có thể nhận được từ 0 đến 15 chiếc kẹo).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi chia, cả 4 đứa con đều nhận được ít nhất một chiếc kẹo. Tính $T = 20400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Tìm số bộ nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Giáo viên chủ nhiệm có 12 quyển vở giống nhau đem chia ngẫu nhiên cho 4 học sinh tiêu biểu gồm An, Bình, Cường và Dũng (mỗi bạn có thể nhận từ 0 đến 12 quyển vở).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để học sinh An nhận được ít nhất 3 quyển vở. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

### Vận dụng

**Ví dụ 5. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26$$

thỏa mãn các điều kiện chặn dưới bậc thang: $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 \geq 5$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Một tổ chức giáo dục phân bổ ngẫu nhiên 16 suất học bổng toàn phần có giá trị tương đương nhau cho 4 trường THPT trọng điểm sao cho mỗi trường đều nhận được ít nhất một suất học bổng.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi phân bổ, mỗi trường đều nhận được ít nhất 2 suất học bổng. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn bất phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 14.$$

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Có 15 chiếc bánh cupcake giống nhau đem chia ngẫu nhiên cho 4 người sao cho mỗi người đều nhận được ít nhất một chiếc bánh.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để người thứ nhất nhận được ít nhất 5 chiếc bánh. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thỏa mãn phương trình:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20.$$

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Ban chỉ đạo chiến dịch Mùa hè xanh có 20 phần quà giống nhau phân chia ngẫu nhiên cho 4 tổ tình nguyện viên (mỗi tổ nhận ít nhất 1 phần quà).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Tổ 1 nhận được ít nhất 10 phần quà. Tính $T = 32300 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Một trường đại học cần phân chia 25 chiếc máy tính để bàn hoàn toàn giống nhau cho 5 phòng thực hành tin học sao cho mỗi phòng nhận được ít nhất một chiếc máy tính và riêng phòng Thực hành 1 phải nhận được một số chẵn chiếc máy tính. Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án phân chia thiết bị thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Phân chia ngẫu nhiên 19 chiếc máy tính xách tay giống nhau cho 4 phòng nghiên cứu sao cho phòng nào cũng có ít nhất 1 chiếc máy tính.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Phòng 1 nhận được một số chẵn chiếc máy tính. Tính $T = 20400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Một đoàn trường đại học có 22 chiếc vé tham quan triển lãm công nghệ quốc tế giống nhau cần phân bổ cho 4 khoa sinh viên sao cho mỗi khoa đều nhận được ít nhất một vé, riêng Khoa Toán - Tin do đã có suất tài trợ riêng nên được yêu cầu không nhận quá 8 chiếc vé. Hỏi ban chấp hành đoàn trường có tất cả bao nhiêu cách phân bổ vé?

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 14. TME** Có 16 suất quà giống nhau đem chia ngẫu nhiên cho 3 bạn An, Bình và Cường sao cho bạn nào cũng nhận được ít nhất một suất quà.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi chia, không có bất kỳ bạn nào nhận được quá 7 suất quà (tức là mỗi bạn nhận không quá 7 suất). Tính $T = 15000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một tổng kho dự trữ quốc gia cần phân bổ 32 tấn hàng cứu trợ giống nhau vào 4 kho dự trữ chiến lược K1, K2, K3, K4 sao cho mỗi kho nhận ít nhất 2 tấn hàng và để đảm bảo an toàn phòng chống cháy nổ, không có bất kỳ kho nào được phép tiếp nhận quá 13 tấn hàng. Lượng hàng mỗi nơi nhận được tính theo số nguyên tấn. Hỏi ban chỉ huy tổng kho có tất cả bao nhiêu phương án phân bổ hàng hóa thỏa mãn các tiêu chuẩn kỹ thuật trên?

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thỏa mãn phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18.$$

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một giáo viên có 14 chiếc bút bi giống nhau chia ngẫu nhiên cho 4 học sinh (mỗi học sinh có thể nhận từ 0 đến 14 chiếc bút).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi chia, cả 4 học sinh đều nhận được ít nhất một chiếc bút. Tính $T = 3400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thỏa mãn phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14.$$

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Có 10 phần quà lưu niệm giống nhau đem chia ngẫu nhiên cho 3 bạn An, Bình và Cường (mỗi bạn có thể nhận từ 0 đến 10 phần quà).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để cả 3 bạn đều nhận được ít nhất một phần quà. Tính $T = 5500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Có 20 quả cam giống hệt nhau cần phân chia vào 5 chiếc giỏ có dán nhãn từ Giỏ 1 đến Giỏ 5 sao cho giỏ nào cũng chứa ít nhất một quả cam. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phân chia?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Một người chia ngẫu nhiên 12 quả táo giống hệt nhau cho 3 người con (mỗi người con có thể nhận từ 0 đến 12 quả).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để mỗi người con đều nhận được ít nhất 2 quả táo. Tính $T = 6500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 7. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$$

thỏa mãn các điều kiện cận dưới: $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 \geq 5$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Một quỹ phúc lợi phân chia ngẫu nhiên 18 triệu đồng (gồm 18 món tiền 1 triệu đồng giống nhau) cho 4 nhân viên xuất sắc sao cho mỗi nhân viên nhận ít nhất 1 triệu đồng.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để mỗi nhân viên đều nhận được ít nhất 2 triệu đồng tiền thưởng. Tính $T = 6800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn bất phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15.$$

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Chọn ngẫu nhiên một bộ nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, x_3)$ từ tập hợp tất cả các nghiệm thỏa mãn bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$.

Các bộ nghiệm đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để bộ nghiệm được chọn thỏa mãn thêm điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$. Tính $T = 20400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn bất phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18.$$

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Phân chia ngẫu nhiên 15 chiếc máy tính bảng giống nhau cho 4 phòng ban chuyên môn sao cho phòng nào cũng nhận được ít nhất 1 chiếc máy tính bảng.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Phòng Kế hoạch nhận được ít nhất 5 chiếc máy tính bảng. Tính $T = 9100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Một trung tâm y tế dự phòng có 25 liều vắc xin phân bổ cho 5 trạm y tế phường sao cho: Trạm 1 nhận ít nhất 2 liều, Trạm 2 nhận ít nhất 3 liều, Trạm 3 nhận ít nhất 4 liều, Trạm 4 nhận ít nhất 5 liều, Trạm 5 nhận ít nhất 1 liều. Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án phân bổ?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một công ty xây dựng điều động 17 tấn xi măng giống nhau cho 4 công trình thi công sao cho mỗi công trình nhận ít nhất 1 tấn. Lượng hàng mỗi nơi nhận được tính theo số nguyên tấn.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Công trình 1 nhận được ít nhất 6 tấn xi măng. Tính $T = 11200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

thỏa mãn điều kiện bất đối xứng: $x_1 > x_2$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Chọn ngẫu nhiên một bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$.

Các bộ nghiệm đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để bộ nghiệm được chọn thỏa mãn điều kiện $x_1 > x_2$. Tính $T = 7600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thỏa mãn phương trình:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24.$$

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Phân chia ngẫu nhiên 24 suất học bổng giống nhau cho 5 lớp chuyên (12A1, 12A2, 12A3, 12A4, 12A5) sao cho lớp nào cũng có ít nhất 1 suất học bổng.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để lớp 12A1 nhận được số suất học bổng là một số chia hết cho 3. Tính $T = 11000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$$

thỏa mãn điều kiện: biến $x_1$ là một số nguyên lẻ và biến $x_2$ là một số nguyên chẵn.

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Phân chia ngẫu nhiên 22 máy tính xách tay giống nhau cho 5 phòng ban (mỗi phòng nhận ít nhất 1 chiếc).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Phòng 1 nhận được số lẻ máy tính và Phòng 2 nhận được số chẵn máy tính. Tính $T = 13300 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

thỏa mãn điều kiện chặn trên của biến thứ nhất: $x_1 \leq 10$.

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Phân chia ngẫu nhiên 25 tấn gạo cứu trợ giống nhau cho 4 xã miền núi $A$, $B$, $C$, $D$ (mỗi xã nhận ít nhất 1 tấn gạo). Lượng hàng mỗi nơi nhận được tính theo số nguyên tấn.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để Xã $A$ nhận được không quá 10 tấn gạo. Tính $T = 5060 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 23. TME** Tìm tổng số bộ nghiệm nguyên dương $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$$

thỏa mãn điều kiện chặn trên đồng thời: $x_1 \leq 8$ và $x_2 \leq 8$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Phân chia ngẫu nhiên 24 phần thưởng giống nhau cho 5 học sinh trong đội tuyển Olympic (mỗi bạn nhận ít nhất 1 phần thưởng).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để hai bạn An và Bình mỗi bạn đều nhận được không quá 8 phần thưởng. Tính $T = 2300 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Phân chia 21 chiếc máy chiếu giống hệt nhau cho 4 giảng đường lớn sao cho mỗi giảng đường nhận ít nhất 2 chiếc máy chiếu và riêng Giảng đường 1 nhận nhiều hơn Giảng đường 2 ít nhất 3 chiếc máy chiếu ($x_1 \geq x_2 + 3$). Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án phân chia thiết bị?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Có 20 chiếc kẹo sô-cô-la giống nhau đem chia ngẫu nhiên cho 3 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều nhận được ít nhất một chiếc kẹo.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi chia, không có bất kỳ đứa trẻ nào nhận quá 9 chiếc kẹo. Tính $T = 19000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một tổ chức cứu trợ nhân đạo phân phối 30 tấn nhu yếu phẩm giống nhau cho 5 xã bị cô lập do lũ lụt sao cho mỗi xã nhận ít nhất 1 tấn và do sức chứa của kho tại mỗi xã có hạn, không có bất kỳ xã nào được nhận quá 10 tấn. Lượng hàng mỗi nơi nhận được tính theo số nguyên tấn. Hỏi ban cứu trợ có tất cả bao nhiêu phương án phân phối?

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Chia ngẫu nhiên 22 chiếc bánh trung thu giống nhau cho 3 em nhỏ sao cho em nào cũng có ít nhất 1 chiếc bánh.

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để không có bất kỳ em nào nhận được quá 10 chiếc bánh. Tính $T = 14000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một tập đoàn viễn thông cần phân bổ 32 máy chủ vật lý giống nhau vào 5 cụm trung tâm dữ liệu đám mây sao cho mỗi cụm nhận ít nhất 1 máy chủ và để tránh nghẽn tải cục bộ, không có cụm nào được phép vận hành quá 10 máy chủ. Hỏi kỹ sư trưởng có tất cả bao nhiêu phương án quy hoạch?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Có 24 viên bi thủy tinh giống hệt nhau đem chia ngẫu nhiên cho 3 bạn nhỏ (mỗi bạn nhận ít nhất 1 viên bi).

Các cách chia theo số lượng đều đồng khả năng. Gọi $P$ là xác suất để sau khi chia, không có bất kỳ bạn nào nhận được quá 11 viên bi. Tính $T = 23000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Bao hàm và loại trừ
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-10

# BUỔI 10. BAO HÀM VÀ LOẠI TRỪ

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Đếm số phần tử thuộc ít nhất một tập

**Hai tập hợp.** Cộng số phần tử của hai tập. Phần giao bị đếm hai lần, nên trừ đi một lần.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

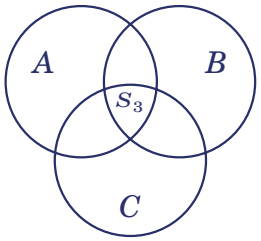
**Ba tập hợp.** Cộng từng tập, trừ từng giao đôi, rồi cộng lại giao ba.

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

Phần tử thuộc cả ba tập được cộng ba lần, trừ ba lần rồi cộng lại một lần.

### 2 Phân biệt ít nhất một, đúng một và đúng hai

– **Điền sơ đồ Venn từ trong ra ngoài.**
Điền giao ba trước, rồi lấy mỗi giao đôi trừ giao ba để được vùng chỉ thuộc hai tập.
Cuối cùng, lấy số phần tử từng tập trừ các vùng đã điền trong tập đó.
– **Đúng một hoặc đúng hai.** Cộng các vùng tương ứng.
– **Không thuộc tập nào.** Lấy tổng số phần tử trừ số thuộc hợp.




Gọi $S_1$ là tổng kích thước từng tập, $S_2$ là tổng kích thước các giao đôi và $S_3 = |A \cap B \cap C|$.
– Đúng một tập có $S_1 - 2S_2 + 3S_3$ phần tử.
– Đúng hai tập có $S_2 - 3S_3$ phần tử.

### 3 Chọn tập hợp để áp dụng

– **Bài chia hết.** Đặt $A$ là tập các bội của $a$, $B$ là tập các bội của $b$.
Giao $A \cap B$ gồm các bội của BCNN$(a, b)$.
– **Bài có điều kiện cấm.** Mỗi tập gồm các cấu hình vi phạm một điều kiện.
Đếm hợp các tập vi phạm rồi lấy tổng số cấu hình trừ đi.
– **Bài xác suất.** Với hai biến cố, dùng $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Nếu các kết quả đồng khả năng, có thể đếm số kết quả thuận lợi rồi chia cho số kết quả của không gian mẫu.

**Kiểm tra trước khi tính.** Trước khi cộng trừ, ghi rõ mỗi giao đôi có bao gồm giao ba hay không. Để đếm "đúng hai", mỗi vùng giao đôi phải loại phần thuộc cả ba tập.


thuvientoanhoc.com

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Một trường THPT tiến hành khảo sát ngẫu nhiên 2000 học sinh về nhu cầu rèn luyện thể chất, kết quả ghi nhận có 1200 học sinh yêu thích môn bóng đá, 950 học sinh yêu thích môn bóng rổ và 450 học sinh yêu thích đồng thời cả hai môn thể thao này. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh yêu thích ít nhất một trong hai môn bóng đá hoặc bóng rổ?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Trong một kỳ khảo sát đánh giá năng lực học sinh, gọi $A$ là biến cố "Học sinh đạt điểm giỏi môn Toán" với xác suất $P(A) = 0{,}65$; gọi $B$ là biến cố "Học sinh đạt điểm giỏi môn Vật lý" với xác suất $P(B) = 0{,}55$. Biết rằng xác suất để một học sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lý là $P(A \cap B) = 0{,}35$.

Gọi $P$ là xác suất để học sinh đó đạt điểm giỏi ít nhất một trong hai môn học trên. Tính $T = 4000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Một trường phổ thông liên cấp có tổng cộng 3000 học sinh. Nhà trường tổ chức dạy tăng cường hai môn ngoại ngữ tự chọn là Tiếng Anh và Tiếng Nhật. Qua thống kê có 1400 học sinh đăng ký học Tiếng Anh, 800 học sinh đăng ký học Tiếng Nhật và 300 học sinh đăng ký học đồng thời cả hai ngoại ngữ. Hỏi nhà trường có bao nhiêu học sinh không đăng ký học bất kỳ môn ngoại ngữ tự chọn nào?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một dây chuyền sản xuất linh kiện điện tử tự động kiểm tra sản phẩm xuất xưởng theo hai tiêu chí. Xác suất một linh kiện bị lỗi mạch điện (biến cố $A$) là $P(A) = 0{,}20$; xác suất linh kiện bị lỗi kích thước cơ khí (biến cố $B$) là $P(B) = 0{,}15$; xác suất linh kiện mắc đồng thời cả hai loại lỗi kỹ thuật trên là $P(A \cap B) = 0{,}05$.

Gọi $P$ là xác suất để một linh kiện lấy ngẫu nhiên là sản phẩm đạt chuẩn hoàn hảo (không mắc bất kỳ lỗi nào trong hai loại lỗi trên). Tính $T = 5000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 5. TME** Một viện đào tạo công nghệ thông tin khảo sát 2000 sinh viên năm cuối về kỹ năng lập trình đối với ba ngôn ngữ phổ biến: Python ($A$), Java ($B$) và $C$++ ($C$). Kết quả điều tra cụ thể như sau:

- Có 1100 sinh viên thành thạo Python; 850 sinh viên thành thạo Java; 750 sinh viên thành thạo $C$++.
- Có 450 sinh viên thành thạo cả Python và Java; 350 sinh viên thành thạo cả Java và $C$++; 300 sinh viên thành thạo cả $C$++ và Python.
- Có 150 sinh viên thành thạo đồng thời cả ba ngôn ngữ lập trình trên.

Hỏi có tất cả bao nhiêu sinh viên thành thạo ít nhất một trong ba ngôn ngữ lập trình nói trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Một trường đại học khảo sát độc lập 2400 sinh viên về việc tham gia ba dự án tình nguyện cộng đồng: Dự án dạy học trẻ em vùng cao ($A$), Dự án bảo vệ môi trường biển ($B$), và Dự án chăm sóc người cao tuổi neo đơn ($C$). Dữ liệu thống kê ghi nhận có: 1300 sinh viên tham gia dự án $A$; 1000 sinh viên tham gia dự án $B$; 900 sinh viên tham gia dự án $C$; có 500 sinh viên tham gia cả $A$ và $B$; 400 sinh viên tham gia cả $B$ và $C$; 300 sinh viên tham gia cả $C$ và $A$; có 150 sinh viên tham gia đồng thời cả ba dự án. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong số sinh viên được khảo sát.

Gọi $P$ là xác suất để sinh viên được chọn không tham gia bất kỳ dự án tình nguyện nào trong ba dự án trên. Tính $T = 19200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Một trường đại học khảo sát 3000 tân sinh viên về năng khiếu cá nhân trong ba lĩnh vực: Âm nhạc ($A$), Hội họa ($B$) và Thể thao ($C$). Dữ liệu thống kê thu được gồm:

- Có 1600 sinh viên có năng khiếu Âm nhạc; 1300 sinh viên có năng khiếu Hội họa; 1100 sinh viên có năng khiếu Thể thao.
- Có 600 sinh viên có năng khiếu cả Âm nhạc và Hội họa; 450 sinh viên có cả Hội họa và Thể thao; 400 sinh viên có cả Thể thao và Âm nhạc.
- Có 200 sinh viên có năng khiếu trong cả ba lĩnh vực trên.

Hỏi có tất cả bao nhiêu sinh viên chỉ có năng khiếu trong đúng một lĩnh vực duy nhất?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Một trung tâm tin học quốc tế đào tạo 2500 học viên với ba chuyên đề chuyên sâu: Trí tuệ nhân tạo ($A$), An toàn thông tin ($B$) và Điện toán đám mây ($C$). Thống kê đăng ký cho thấy có: 1200 học viên theo học $A$; 1000 học viên theo học $B$; 900 học viên theo học $C$; có 450 học viên theo học cả $A$ và $B$; 350 học viên theo học cả $B$ và $C$; 300 học viên theo học cả $C$ và $A$; có 150 học viên theo học đồng thời cả ba chuyên đề. Chọn ngẫu nhiên một học viên trong trung tâm.

Gọi $P$ là xác suất để học viên được chọn theo học đúng hai chuyên đề chuyên sâu. Tính $T = 5000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Hỏi trong đoạn các số nguyên từ 1 đến 6000 (tức tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 6000\}$), có tất cả bao nhiêu số nguyên chia hết cho ít nhất một trong ba số 4, 6 hoặc 9?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một máy tính chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương trong đoạn từ 1 đến 6000.

Gọi $P$ là xác suất để số nguyên được máy tính chọn không chia hết cho bất kỳ số nào trong ba số 4, 6 và 9. Tính $T = 6000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 11. TME** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một phân biệt được thành lập từ tập hợp các chữ số $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sao cho trong mỗi số được tạo thành luôn chứa đồng thời cả hai chữ số 1 và 2?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, người ta chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số đôi một phân biệt.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn có mặt đồng thời cả hai chữ số 1 và 2. Tính $T = 4900 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Cục Quản lý Chất lượng điều động 7 chuyên viên kiểm định độc lập phân biệt đến thanh tra tại 3 nhà máy sản xuất thiết bị y tế (Nhà máy $A$, Nhà máy $B$ và Nhà máy $C$). Để đảm bảo tính chặt chẽ, cơ quan yêu cầu mỗi nhà máy đều phải có ít nhất một chuyên viên trực tiếp phụ trách (không có nhà máy nào bị bỏ sót). Hỏi cơ quan có tất cả bao nhiêu phương án phân công chuyên viên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một đài kiểm soát không lưu sân bay quốc tế chuẩn bị điều phối lịch hạ cánh tuần tự cho một khung giờ gồm 8 chuyến bay độc lập, trong đó có 3 chuyến bay vận tải quốc tế đặc biệt ký hiệu là $A$, $B$, $C$ và 5 chuyến bay thương mại thông thường. Do yêu cầu giãn cách luồng khí xoáy và phòng chống va chạm an toàn, quy chuẩn hàng không bắt buộc:

– Chuyến bay $A$ và chuyến bay $B$ không được hạ cánh ở hai lượt liên tiếp nhau;
– Đồng thời, chuyến bay $B$ và chuyến bay $C$ cũng không được hạ cánh ở hai lượt liên tiếp nhau.

Giả định rằng mọi thứ tự hạ cánh khả dĩ của 8 chuyến bay đều có khả năng diễn ra như nhau.

Gọi $P$ là xác suất để thứ tự hạ cánh được xếp ngẫu nhiên đáp ứng trọn vẹn cả hai quy chuẩn an toàn trên. Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Để chuẩn bị cho diễn đàn khoa học trẻ toàn quốc, một trường đại học danh tiếng tuyển chọn thành viên từ ba câu lạc bộ học thuật xuất sắc gồm: CLB Toán ứng dụng (có 5 sinh viên), CLB Khoa học dữ liệu (có 5 sinh viên) và CLB An ninh mạng (có 5 sinh viên), biết rằng không có sinh viên nào tham gia từ hai câu lạc bộ trở lên (tổng cộng có 15 sinh viên phân biệt). Ban giám hiệu cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm đúng 6 sinh viên đại diện cho nhà trường tham dự diễn đàn sao cho trong đoàn đại biểu bắt buộc phải có mặt ít nhất một sinh viên đến từ mỗi câu lạc bộ (có đầy đủ đại diện của cả 3 câu lạc bộ). Hỏi ban giám hiệu có tất cả bao nhiêu phương án lựa chọn nhân sự?

KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận dạng

**Bài 1. TME** Trong đợt khảo sát phong trào rèn luyện sức khỏe của 2400 học sinh tại một trường THPT, có 1500 học sinh đăng ký học bơi, 1200 học sinh đăng ký học cầu lông và 600 học sinh đăng ký tham gia cả hai môn thể thao này. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh đăng ký tham gia ít nhất một trong hai môn thể thao?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Cho hai biến cố $A$ và $B$ trong cùng một không gian mẫu với các xác suất thành phần lần lượt là $P(A) = 0{,}50$, $P(B) = 0{,}40$ và xác suất của biến cố giao là $P(A \cap B) = 0{,}15$.

Gọi $P$ là xác suất để có ít nhất một trong hai biến cố $A$ hoặc $B$ xảy ra. Tính $T = 4000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Một siêu thị điện máy thực hiện khảo sát ngẫu nhiên 3500 khách hàng tham quan mua sắm: có 1600 khách hàng mua sản phẩm gia dụng loại $A$, 1300 khách hàng mua sản phẩm điện tử loại $B$ và 700 khách hàng mua đồng thời cả hai loại sản phẩm $A$ và $B$. Hỏi có tất cả bao nhiêu khách hàng tham quan không chọn mua bất kỳ loại sản phẩm nào trong hai loại trên?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một xưởng cơ khí chính xác kiểm tra ngẫu nhiên các chi tiết máy xuất xưởng: xác suất chi tiết bị lỗi bề mặt gia công là 0,25; xác suất chi tiết bị lỗi kích thước hình học là 0,20; xác suất chi tiết mắc đồng thời cả hai loại lỗi kỹ thuật là 0,05.

Gọi $P$ là xác suất để một chi tiết máy được chọn ngẫu nhiên là sản phẩm hoàn hảo (không mắc bất kỳ lỗi nào trong hai loại lỗi trên). Tính $T = 5000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một câu lạc bộ cờ trí tuệ có 1800 thành viên chính thức: có 1100 thành viên biết chơi cờ vua, 900 thành viên biết chơi cờ tướng và 400 thành viên biết chơi cả hai bộ môn cờ. Hỏi câu lạc bộ có tất cả bao nhiêu thành viên biết chơi ít nhất một trong hai môn cờ vua hoặc cờ tướng?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ một trường THPT tiêu biểu: xác suất học sinh đó đạt danh hiệu Học sinh giỏi môn Toán là 0,45; xác suất đạt xếp loại hạnh kiểm Tốt là 0,70; xác suất đạt đồng thời cả danh hiệu Học sinh giỏi môn Toán và hạnh kiểm Tốt là 0,35.

Gọi $P$ là xác suất để học sinh được chọn đạt được ít nhất một trong hai tiêu chuẩn thi đua khen thưởng nói trên. Tính $T = 2500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 7. TME** Một trường THPT có 2000 học sinh khối 12 tham gia sinh hoạt ngoại khóa: có 1200 học sinh tham gia Câu lạc bộ Tiếng Anh ($A$), 900 học sinh tham gia CLB Tin học ($B$) và 800 học sinh tham gia CLB Thể thao ($C$). Thống kê giao thoa cho thấy: có 500 bạn tham gia cả Tiếng Anh và Tin học; 400 bạn tham gia cả Tin học và Thể thao; 350 bạn tham gia cả Thể thao và Tiếng Anh; có 150 bạn tham gia đồng thời cả ba câu lạc bộ. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh tham gia ít nhất một câu lạc bộ?

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Một tổ chức đoàn thanh niên khảo sát độc lập 2500 đoàn viên về ba hoạt động tình nguyện: Phong trào Hiến máu nhân đạo ($A$), Hoạt động Bảo vệ môi trường xanh ($B$) và Chương trình Tiếp sức người già neo đơn ($C$). Kết quả điều tra cho thấy: có 1300 đoàn viên tham gia $A$; 1100 đoàn viên tham gia $B$; 950 đoàn viên tham gia $C$; có 450 đoàn viên tham gia cả $A$ và $B$; 350 đoàn viên tham gia cả $B$ và $C$; 300 đoàn viên tham gia cả $C$ và $A$; có 150 đoàn viên tham gia cả ba hoạt động trên. Chọn ngẫu nhiên một đoàn viên.

Gọi $P$ là xác suất để đoàn viên được chọn không tham gia bất kỳ hoạt động tình nguyện nào trong ba hoạt động trên. Tính $T = 50000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Khảo sát 3500 sinh viên tại một trường đại học thể dục thể thao về ba môn tập luyện yêu thích: Bóng đá ($A$), Bóng rổ ($B$) và Cầu lông ($C$). Dữ liệu thống kê ghi nhận có: 1800 sinh viên chơi Bóng đá; 1500 sinh viên chơi Bóng rổ; 1300 sinh viên chơi Cầu lông; có 700 sinh viên chơi cả Bóng đá và Bóng rổ; 600 sinh viên chơi cả Bóng rổ và Cầu lông; 500 sinh viên chơi cả Cầu lông và Bóng đá; có 250 sinh viên chơi đồng thời cả ba môn thể thao trên. Hỏi có tất cả bao nhiêu sinh viên chỉ chơi đúng một môn thể thao duy nhất?

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một tập đoàn viễn thông khảo sát độc lập 3000 hộ gia đình trong một khu đô thị mới về việc sử dụng ba gói dịch vụ: Truyền hình cáp ($A$), Internet cáp quang ($B$) và Điện thoại cố định ($C$). Kết quả cho thấy: có 1600 hộ dùng dịch vụ $A$; 1400 hộ dùng dịch vụ $B$; 1200 hộ dùng dịch vụ $C$; có 600 hộ dùng cả $A$ và $B$; 500 hộ dùng cả $B$ và $C$; 400 hộ dùng cả $C$ và $A$; có 200 hộ dùng đồng thời cả ba gói dịch vụ. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình trong số hộ được khảo sát.

Gọi $P$ là xác suất để hộ gia đình được chọn sử dụng đúng hai gói dịch vụ viễn thông. Tính $T = 7000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Trong đoạn các số nguyên dương từ 1 đến 5000 (tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 5000\}$), có tất cả bao nhiêu số nguyên chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương từ tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 5000\}$.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3. Tính $T = 5000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Hỏi trong tập hợp các số nguyên từ 1 đến 3000, có bao nhiêu số nguyên chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương từ tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn không chia hết cho 3 và cũng không chia hết cho 5. Tính $T = 4500 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số (từ 1000 đến 9999) mà chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 7?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số từ 1000 đến 9999.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 7. Tính $T = 9000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Hỏi trong đoạn các số nguyên từ 1 đến 4200 (tức tập $S = \{1, 2, \dots, 4200\}$), có tất cả bao nhiêu số nguyên chia hết cho ít nhất một trong ba số 2, 3 hoặc 7?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 4200\}$.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn không chia hết cho bất kỳ số nào trong ba số 2, 3 và 7. Tính $T = 7700 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 19. TME** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một phân biệt được thành lập từ tập hợp các chữ số $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ sao cho trong mỗi số tạo thành luôn có mặt đồng thời cả hai chữ số 1 và 2?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Từ tập hợp $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một phân biệt.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn có mặt đồng thời cả hai chữ số 1 và 2. Tính $T = 5600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một phân biệt được lập từ tập hợp các chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sao cho trong mỗi số luôn chứa đồng thời cả hai chữ số 3 và 4?

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Gọi $P$ là xác suất để số được chọn chứa đồng thời cả hai chữ số 3 và 4. Tính $T = 4900 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Một tổng công ty tài chính cần phân bổ 7 chuyên viên kiểm toán phân biệt về làm việc tại 3 công ty con độc lập (Công ty $X$, Công ty $Y$ và Công ty $Z$) sao cho công ty con nào cũng có ít nhất một chuyên viên trực tiếp phụ trách. Hỏi ban giám đốc tổng công ty có tất cả bao nhiêu phương án phân bổ nhân sự?

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Mỗi thí sinh trong nhóm 7 người được phân ngẫu nhiên và độc lập vào một trong 3 phòng thi, với xác suất như nhau cho mỗi phòng.

Gọi $P$ là xác suất để sau khi phân chia, không có bất kỳ phòng thi nào bị bỏ trống. Tính $T = 7290 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Một ngân hàng thương mại phân công 8 nhân viên chăm sóc khách hàng mới tuyển dụng về công tác tại 3 chi nhánh lớn trên địa bàn thành phố sao cho chi nhánh nào cũng có ít nhất một nhân viên mới tiếp nhận. Hỏi phòng nhân sự có tất cả bao nhiêu cách phân công nhân sự?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Một hãng hàng không bố trí 9 hành khách (trong đó có 3 vị khách ngoại giao cấp cao $A$, $B$, $C$ và 6 hành khách phổ thông) ngồi vào một hàng gồm đúng 9 chiếc ghế phân biệt. Do nghi thức ngoại giao và an ninh hàng không, ban tổ chức yêu cầu vị khách $A$ và vị khách $B$ không được ngồi cạnh nhau; đồng thời vị khách $B$ và vị khách $C$ cũng không được ngồi cạnh nhau. Xếp ngẫu nhiên 9 hành khách vào hàng ghế.

Gọi $P$ là xác suất để việc sắp xếp đáp ứng cả hai điều kiện an ninh nói trên. Tính $T = 4800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một hội đồng khoa học cấp quốc gia cần thành lập một tổ thẩm định độc lập gồm 6 chuyên gia từ danh sách đề cử gồm 15 nhà khoa học hàng đầu thuộc ba lĩnh vực chuyên sâu: Ban Năng lượng mới (có 5 người), Ban Vật liệu bán dẫn (có 5 người) và Ban Trí tuệ nhân tạo (có 5 người), biết rằng mỗi nhà khoa học chỉ thuộc đúng một ban chuyên môn. Để đảm bảo tính khách quan toàn diện, quy định yêu cầu tổ thẩm định bắt buộc phải có mặt ít nhất một chuyên gia đến từ mỗi ban chuyên môn (có đủ đại diện cả 3 ban). Hỏi hội đồng có tất cả bao nhiêu phương án thành lập tổ thẩm định?

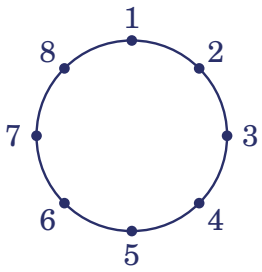
KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Một vườn ươm khởi nghiệp có 15 ứng viên xuất sắc gồm: 5 lập trình viên, 5 chuyên viên marketing và 5 chuyên gia quản trị tài chính (mỗi ứng viên chỉ có một chuyên môn duy nhất). Hội đồng tuyển dụng chọn ngẫu nhiên 6 ứng viên để thành lập một nhóm phát triển dự án công nghệ mới.

Gọi $P$ là xác suất để nhóm phát triển được thành lập có mặt ít nhất một người thuộc mỗi lĩnh vực chuyên môn (đủ cả 3 lĩnh vực). Tính $T = 1430 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Trên chu vi khép kín của một căn cứ quân sự hình tròn có 8 trạm kiểm soát cách đều nhau được đánh số thứ tự từ 1 đến 8 theo chiều kim đồng hồ. Ban chỉ huy phân công 8 sĩ quan (trong đó có 3 sĩ quan chỉ huy $X$, $Y$, $Z$) trực tại 8 trạm kiểm soát (mỗi trạm đúng 1 sĩ quan). Để đảm bảo quy chuẩn tác chiến phân tán lực lượng: sĩ quan $X$ và $Y$ không được trực ở hai trạm kề nhau trên vòng tròn; đồng thời sĩ quan $Y$ và $Z$ cũng không được trực ở hai trạm kề nhau trên vòng tròn.

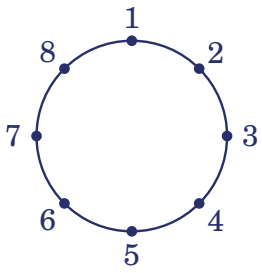



Gọi $S$ là tổng số phương án phân công 8 sĩ quan thỏa mãn các quy chuẩn tác chiến. Tính $T = \dfrac{S}{5}$.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Phân công ngẫu nhiên 8 sĩ quan (trong đó có 3 sĩ quan $X$, $Y$, $Z$) vào 8 trạm kiểm soát được đánh số từ 1 đến 8 theo chiều kim đồng hồ trên chu vi hình tròn của một căn cứ quân sự, mỗi trạm có đúng một sĩ quan.

Gọi $P$ là xác suất để cả hai cặp sĩ quan $(X, Y)$ và $(Y, Z)$ đều không trực ở các trạm kề nhau trên vòng tròn khép kín. Tính $T = 6300 \cdot P$.




KẾT QUẢ

HẾT


thuvientoanhoc.com

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN II. NÂNG CAO TỔNG HỢP

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Xác suất Bernoulli
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-II-11

# BUỔI 11. CÔNG THỨC XÁC SUẤT BERNOULLI

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Nhận dạng lược đồ Bernoulli

– Thực hiện $n$ phép thử độc lập. Mỗi phép thử có hai kết quả: thành công hoặc thất bại.
– Xác suất thành công luôn bằng $p$, xác suất thất bại bằng $q = 1 - p$.

Gọi $X$ là số lần thành công. Một chuỗi có đúng $k$ lần thành công có xác suất $p^k q^{n-k}$. Chọn $k$ vị trí thành công trong $n$ lượt, ta được

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Ví dụ nhanh.** Gieo đồng xu cân đối 4 lần. Có $C_4^2$ cách chọn 2 lượt xuất hiện mặt ngửa. Mỗi chuỗi có xác suất $\dfrac{1}{16}$, nên xác suất đúng 2 lần ngửa là $\dfrac{3}{8}$.

### 2 Chuyển yêu cầu đề bài thành điều kiện đếm

– **Ít nhất, nhiều nhất.** Cộng xác suất của các giá trị $k$ phù hợp.
Nếu đề hỏi ít nhất một lần thành công, dùng $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.
– **Số lần thành công dễ xảy ra nhất.** Với $0 < p < 1$, xét $(n+1)p$.
Nếu giá trị này không nguyên, số lần có xác suất lớn nhất là $\lfloor (n+1)p \rfloor$. Nếu bằng số nguyên $m$, cả $m-1$ và $m$ đều đạt cực đại.
Có thể kiểm tra bằng tỉ số $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$ với $0 \leq k < n$.
– **Bước đi trên trục số.** Nếu có $k$ bước sang phải trong $n$ bước dài một đơn vị, tọa độ cuối là $2k - n$.
Muốn đến $x$, giải $k = \dfrac{n+x}{2}$ rồi kiểm tra $k$ nguyên và $0 \leq k \leq n$.
– **Ba loại kết quả.** Với $a + b + c = n$, số chuỗi có số lần xuất hiện từng loại là $a, b, c$ bằng $\dfrac{n!}{a!b!c!}$.
Nếu các lượt độc lập và xác suất từng loại là $p_1, p_2, p_3$, nhân số chuỗi với $p_1^a p_2^b p_3^c$.

### 3 Điều kiện dừng và điều kiện liên tiếp

– **Dừng ở lượt $m$ khi đủ $r$ thành công.** Lượt cuối phải thành công.
Trong $m-1$ lượt đầu có đúng $r-1$ thành công. Xác suất là $C_{m-1}^{r-1} p^r (1-p)^{m-r}$ với $m \geq r \geq 1$.
– **Hai bên đấu đến khi phân thắng bại.** Xác định các lượt trước vẫn hòa và lượt cuối tạo ra kết quả thắng.
Dùng quy tắc nhân khi các lượt độc lập.
– **Giới hạn cụm liên tiếp.** Xếp trước các ký hiệu làm vách để tạo khe.
Gọi $x_i$ là số ký hiệu chèn vào khe thứ $i$. Điều kiện cụm dài tối đa $d$ trở thành $0 \leq x_i \leq d$. Dùng chia kẹo và bao hàm, loại trừ để đếm.

**Kiểm tra trước khi tính.** Kiểm tra hai điều kiện trước khi dùng công thức Bernoulli. Các lượt độc lập và xác suất thành công không đổi. Nếu $p = 0$ thì $X = 0$ chắc chắn. Nếu $p = 1$ thì $X = n$ chắc chắn.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Một hệ thống thử nghiệm tự động thực hiện liên tiếp một dãy gồm 13 phép thử độc lập trong cùng điều kiện. Mỗi phép thử chỉ có hai khả năng: Thành công ($S$) hoặc Thất bại ($F$). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi kết quả khác nhau mà trong đó có đúng 5 lần xuất hiện kết quả Thành công?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 8 lần liên tiếp một cách độc lập.

Gọi $P$ là xác suất để có đúng 4 lần xuất hiện mặt sấp. Tính $T = 12800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Trong kỹ thuật truyền dẫn tín hiệu số, xét tập hợp tất cả các chuỗi bit nhị phân có độ dài gồm 13 ký tự (mỗi ký tự chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi bit nhị phân mà trong đó số lượng bit 1 nhiều hơn số lượng bit 0?

KẾT QUẢ

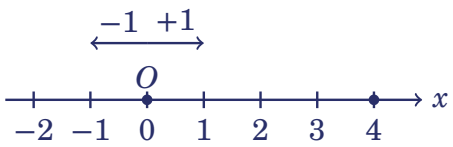
**Ví dụ 4. TME** Một vận động viên bắn súng thực hiện 6 phát bắn độc lập vào một bia mục tiêu cố định. Biết rằng xác suất để bắn trúng bia trong mỗi phát bắn đều bằng $p = 0{,}5$.

Gọi $P$ là xác suất để vận động viên bắn trúng bia từ 4 phát trở lên (tức trúng 4, 5 hoặc cả 6 phát). Tính $T = 6400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

### Vận dụng

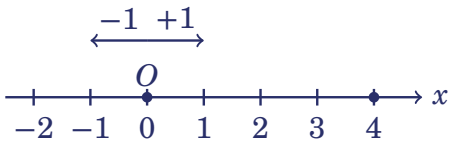
**Ví dụ 5. TME** Một chất điểm bắt đầu chuyển động từ gốc tọa độ $O(0)$ trên trục số thực $Ox$. Tại mỗi bước di chuyển, chất điểm chỉ có thể nhảy sang phải một đoạn $+1$ đơn vị hoặc nhảy sang trái một đoạn $-1$ đơn vị. Hỏi sau đúng 14 bước di chuyển, có tất cả bao nhiêu quỹ đạo chuyển động khác nhau để chất điểm dừng lại chính xác tại vị trí có tọa độ $x = 4$?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Một hạt vi mô thực hiện chuyển động ngẫu nhiên trên trục số $Ox$, xuất phát từ điểm gốc 0. Tại mỗi bước, hạt nhảy sang phải $+1$ hoặc sang trái $-1$ với xác suất bằng nhau và bằng 0,5 (các bước nhảy độc lập).

Gọi $P$ là xác suất để sau đúng 14 bước nhảy, hạt dừng lại tại vị trí có tọa độ $x = 4$. Tính $T = 16384 \cdot P$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Một hệ thống kiểm định tự động thực hiện dãy 16 phép thử độc lập với xác suất thành công trong mỗi phép thử là $p = 0{,}6$. Gọi $k_0$ là số lần thành công có khả năng xuất hiện cao nhất (xác suất đạt giá trị cực đại). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi kết quả thí nghiệm có số lần thành công đúng bằng giá trị $k_0$?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Thực hiện 6 phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong mỗi phép thử là $p = 0{,}5$. Gọi $k_0$ là số lần thành công có khả năng xảy ra cao nhất.

Gọi $P$ là xác suất để trong 6 phép thử có đúng $k_0$ lần thành công. Tính $T = 6400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Một dây chuyền kiểm thử vi mạch thực hiện ghi nhận một chuỗi 17 kết quả liên tiếp gồm chính xác 13 lần Đạt ($S$) và 4 lần Lỗi ($F$). Để đảm bảo độ ổn định nhiệt của máy đo, quy chuẩn kỹ thuật yêu cầu không được xuất hiện hai lần Lỗi liên tiếp nhau trong chuỗi. Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi kết quả kiểm thử thỏa mãn tiêu chuẩn kỹ thuật trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Trong tập hợp tất cả các chuỗi gồm 17 phép thử độc lập có chính xác 13 lần thành công và 4 lần thất bại, người ta chọn đồng khả năng một chuỗi kết quả.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi được chọn không chứa bất kỳ hai lần thất bại nào ở hai lượt liên tiếp. Tính $T = 3400 \cdot P$.

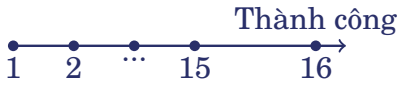
KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Một dây chuyền kiểm soát chất lượng xuất xưởng 10 sản phẩm công nghệ cao độc lập. Qua đánh giá chuyên môn, mỗi sản phẩm được xếp vào đúng một trong ba phân loại: Loại Tốt ($A$), Loại Đạt yêu cầu ($B$) hoặc Loại Phế phẩm ($C$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phân bổ kết quả đánh giá cho 10 sản phẩm sao cho có chính xác 5 sản phẩm Loại Tốt, 3 sản phẩm Loại Đạt yêu cầu và 2 sản phẩm Loại Phế phẩm?

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 12. TME** Một nhóm kỹ sư phát triển vật liệu mới tiến hành thử nghiệm liên tục từng mẫu vật cho đến khi ghi nhận đủ 5 mẫu vật đạt chuẩn độ bền kéo thì dừng lại toàn bộ quy trình thử nghiệm. Hỏi có tất cả bao nhiêu kịch bản thử nghiệm khác nhau mà quy trình dừng lại chính xác ở lần thử thứ 16?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Một thiết bị phát xung lượng tử thực hiện phát xung lặp lại độc lập với xác suất thu nhận xung thành công trong mỗi lần phát là $p = 0{,}5$. Thiết bị tự động ngắt nguồn dừng hoạt động ngay khi thu nhận đủ 4 lần xung thành công.

Gọi $P$ là xác suất để thiết bị tự động ngắt nguồn chính xác ở lần phát xung thứ 8. Tính $T = 25600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Trong trận chung kết giải cầu lông đỉnh cao, hai tay vợt $A$ và $B$ hòa nhau ở tỷ số 20–20 (bước vào loạt điểm deuce). Trong mô hình của bài toán, các pha cầu tiếp theo độc lập và trận đấu dừng ngay khi một tay vợt dẫn 2 điểm. Biết rằng trong mỗi pha cầu, xác suất tay vợt $A$ giành điểm là $p = 0{,}6$ và xác suất tay vợt $B$ giành điểm là $q = 0{,}4$.

Gọi $P$ là xác suất để tay vợt $A$ giành chiến thắng chung cuộc và trận đấu kết thúc sau đúng 4 pha cầu phụ. Tính $T = 10000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một hệ thống mã hóa bảo mật tạo ra các chuỗi ký hiệu nhị phân có độ dài gồm 16 bit, trong đó luôn chứa chính xác 10 bit mang giá trị 1 và 6 bit mang giá trị 0. Để ngăn chặn lỗi đồng bộ đường truyền, quy chuẩn an ninh mạng yêu cầu không được phép có quá 3 bit 1 nào xuất hiện ở các vị trí liên tiếp nhau (độ dài cụm bit 1 liên tiếp tối đa là 3). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi nhị phân thỏa mãn quy chuẩn an ninh trên?

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Một thiết bị kiểm tra tự động tiến hành lặp lại 14 phép thử Bernoulli độc lập trong cùng một điều kiện kỹ thuật. Mỗi phép thử chỉ có hai trạng thái: Thành công ($S$) hoặc Thất bại ($F$). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi kết quả khác nhau mà trong đó có đúng 4 lần xuất hiện kết quả Thành công?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 6 lần liên tiếp một cách độc lập (xác suất xuất hiện mặt ngửa trong mỗi lần gieo là $p = 0{,}5$).

Gọi $P$ là xác suất để có đúng 3 lần xuất hiện mặt ngửa. Tính $T = 6400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Trong không gian mã hóa nhị phân, xét tập hợp các chuỗi bit có độ dài gồm 14 ký tự (mỗi ký tự nhận giá trị 0 hoặc 1). Hỏi có bao nhiêu chuỗi bit mà trong đó số lượng bit 1 nhiều hơn số lượng bit 0?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một vận động viên bắn súng thực hiện 4 phát bắn độc lập vào bia, xác suất trúng bia ở mỗi phát bắn là $p = 0{,}5$.

Gọi $P$ là xác suất để vận động viên bắn trúng bia ít nhất 3 phát. Tính $T = 6400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Một bài thi trắc nghiệm gồm 15 câu hỏi độc lập, mỗi câu hỏi chỉ có 2 phương án lựa chọn: Đúng hoặc Sai. Một thí sinh chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho toàn bộ 15 câu hỏi. Hỏi có bao nhiêu cách điền phiếu thi để thí sinh đó trả lời đúng chính xác 4 câu hỏi?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Gieo một đồng xu cân đối 8 lần độc lập.

Gọi $P$ là xác suất để có đúng 2 lần xuất hiện mặt sấp. Tính $T = 12800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Một cung thủ bắn 5 mũi tên độc lập vào bia với xác suất bắn trúng hồng tâm ở mỗi phát bắn là $p = 0{,}5$.

Gọi $P$ là xác suất để cung thủ bắn trúng hồng tâm từ 3 đến 5 phát. Tính $T = 4000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Một tổ kiểm tra chất lượng lấy ngẫu nhiên 15 sản phẩm xuất xưởng để kiểm định độc lập. Hỏi có tất cả bao nhiêu kịch bản kết quả kiểm định mà trong đó có đúng 4 hoặc đúng 5 sản phẩm bị lỗi kỹ thuật?

KẾT QUẢ

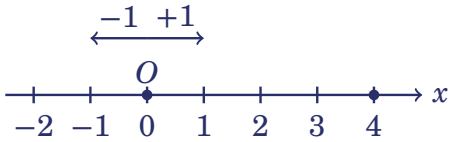
**Bài 9. TME** Kiểm định ngẫu nhiên 8 sản phẩm độc lập, biết rằng xác suất mỗi sản phẩm bị lỗi là $p = 0{,}5$.

Gọi $P$ là xác suất để có đúng 3 hoặc đúng 4 sản phẩm bị lỗi trong 8 sản phẩm được kiểm tra. Tính $T = 6400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

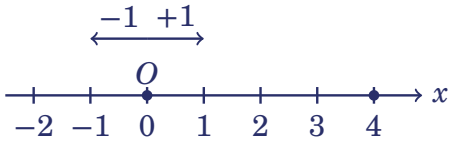
**Bài 10. TME** Một chất điểm xuất phát từ gốc tọa độ $O(0)$ trên trục số thực $Ox$, thực hiện liên tiếp 16 bước nhảy độc lập. Tại mỗi bước, chất điểm chỉ nhảy sang phải $+1$ hoặc sang trái $-1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu quỹ đạo di chuyển khác nhau để chất điểm dừng lại tại vị trí có tọa độ $x = 4$?




KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một hạt chuyển động ngẫu nhiên trên trục số $Ox$ từ vị trí 0. Sau 16 bước nhảy độc lập (mỗi bước sang phải $+1$ hoặc sang trái $-1$ với xác suất bằng nhau $p = 0{,}5$).

Gọi $P$ là xác suất để hạt dừng lại tại vị trí $x = 4$. Tính $T = 16384 \cdot P$.

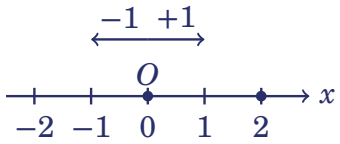



KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một hệ thống cảm biến quang học thực hiện 15 phép đo độc lập với xác suất đo chính xác trong mỗi lần là $p = 0{,}35$. Gọi $k_0$ là số lần đo chính xác có khả năng xảy ra cao nhất (xác suất đạt cực đại). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi kết quả đo có số lần đo chính xác đúng bằng $k_0$?

KẾT QUẢ

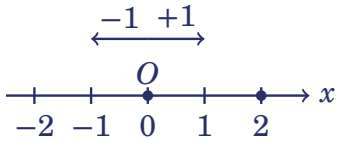
**Bài 13. TME** Một chất điểm chuyển động trên trục số thực từ gốc 0. Tại mỗi bước, chất điểm nhảy sang phải $+1$ hoặc sang trái $-1$. Hỏi sau 14 bước di chuyển, có bao nhiêu quỹ đạo khác nhau để chất điểm dừng lại tại tọa độ $x = 2$?




KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một hạt thực hiện 14 bước nhảy ngẫu nhiên độc lập trên trục số bắt đầu từ 0 (xác suất nhảy sang phải $+1$ hay sang trái $-1$ đều bằng 0,5).

Gọi $P$ là xác suất để hạt dừng lại tại vị trí $x = 2$. Tính $T = 16384 \cdot P$.




KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Một trung tâm kiểm nghiệm dược phẩm kiểm tra 16 mẫu thuốc độc lập. Mỗi mẫu chỉ có kết quả Đạt hoặc Không đạt. Hỏi có bao nhiêu chuỗi kết quả kiểm nghiệm mà trong đó số lượng mẫu Đạt gấp đúng 3 lần số lượng mẫu Không đạt?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Kiểm tra 16 mẫu thử nghiệm độc lập với xác suất đạt chuẩn của mỗi mẫu là $p = 0{,}5$.

Gọi $P$ là xác suất để số mẫu đạt chuẩn gấp đúng 3 lần số mẫu không đạt chuẩn. Tính $T = 65536 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Một hệ thống truyền tin vệ tinh ghi nhận một chuỗi gồm 18 tín hiệu độc lập gồm chính xác 14 lần Thành công ($S$) và 4 lần Thất bại ($F$). Để đảm bảo tính ổn định của kênh truyền, kỹ sư yêu cầu không được xuất hiện hai lần Thất bại liên tiếp nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi tín hiệu thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Trong tập hợp tất cả các chuỗi gồm 18 phép thử độc lập có đúng 14 lần thành công và 4 lần thất bại, người ta chọn đồng khả năng một chuỗi.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi được chọn không có hai lần thất bại nào ở hai lượt liên tiếp. Tính $T = 20400 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một hệ thống trung tâm dữ liệu tiếp nhận 11 yêu cầu truy cập mạng độc lập phân biệt. Mỗi yêu cầu được phân bổ xử lý tại đúng một trong ba cụm máy chủ: Cụm Alpha, Cụm Beta và Cụm Gamma. Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án phân bổ sao cho Cụm Alpha nhận 5 yêu cầu, Cụm Beta nhận 4 yêu cầu và Cụm Gamma nhận 2 yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Một hệ thống cân bằng tải mạng phân phối ngẫu nhiên 6 yêu cầu dịch vụ độc lập vào 3 máy chủ phân biệt (mỗi yêu cầu có xác suất rơi vào từng máy chủ là $\frac{1}{3}$).

Gọi $P$ là xác suất để cả 3 máy chủ đều nhận được số lượng yêu cầu hoàn toàn bằng nhau (mỗi máy chủ nhận đúng 2 yêu cầu). Tính $T = 8100 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Trong kỹ thuật mã hóa kênh truyền, xét tập hợp các chuỗi bit nhị phân có độ dài gồm 17 ký tự, trong đó luôn chứa chính xác 12 bit 1 và 5 bit 0. Hỏi có bao nhiêu chuỗi bit nhị phân thỏa mãn điều kiện không có hai bit 0 nào đứng ở hai vị trí cạnh nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Trong tập hợp tất cả các chuỗi bit nhị phân có độ dài gồm 17 ký tự chứa đúng 12 bit 1 và 5 bit 0, người ta chọn đồng khả năng một chuỗi.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi được chọn không có hai bit 0 nào đứng cạnh nhau. Tính $T = 47600 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Một tổng đài cứu hộ tiếp nhận 10 cuộc gọi yêu cầu hỗ trợ độc lập phân biệt. Mỗi cuộc gọi được phân loại vào đúng một trong ba mức độ ưu tiên: Khẩn cấp cấp 1, Khẩn cấp cấp 2 và Tư vấn thông thường. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phân loại 10 cuộc gọi sao cho có đúng 4 cuộc gọi Khẩn cấp cấp 1, 3 cuộc gọi Khẩn cấp cấp 2 và 3 cuộc gọi Tư vấn thông thường?

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 24. TME** Một dây chuyền sản xuất tự động thực hiện thử nghiệm liên tục từng linh kiện vi xử lý cho đến khi ghi nhận đủ 5 linh kiện đạt chuẩn loại $A$ thì dừng lại toàn bộ quy trình. Hỏi có tất cả bao nhiêu kịch bản thử nghiệm mà quy trình dừng lại chính xác ở lần thử thứ 17?

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Một thiết bị phát xung thử nghiệm lặp lại độc lập với xác suất thu nhận xung thành công ở mỗi lần phát là $p = 0{,}5$. Thiết bị tự động ngắt nguồn dừng hoạt động khi thu nhận đủ 4 xung thành công.

Gọi $P$ là xác suất để thiết bị tự động ngắt nguồn dừng lại chính xác ở lần phát xung thứ 9. Tính $T = 12800 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Trong trận chung kết bóng đá, hai đội bóng bước vào loạt sút luân lưu 11 m cân não. Sau 5 loạt sút luân lưu bắt buộc đầu tiên, hai đội hòa nhau với tỷ số 4–4 (mỗi đội đều sút thành công 4 quả và hỏng 1 quả). Từ loạt thứ 6 trở đi, hai đội sút luân lưu từng quả một (nếu một đội ghi bàn còn đội kia đá hỏng ở cùng loạt thì trận đấu dừng lại ngay lập tức). Các quả sút độc lập. Biết rằng xác suất sút thành công của mỗi cầu thủ bằng $p = 0{,}8$.

Gọi $P$ là xác suất để Đội $A$ giành chiến thắng chung cuộc và trận đấu kết thúc chính xác ở loạt sút thứ 7. Tính $T = 25000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một chuẩn truyền dẫn dữ liệu cao tốc yêu cầu mỗi gói tin gồm một chuỗi nhị phân độ dài 16 bit, trong đó luôn chứa chính xác 9 bit 1 và 7 bit 0. Để tránh hiện tượng trễ đồng hồ giải mã, gói tin phải đáp ứng quy chuẩn: không có quá 3 bit 1 nào xuất hiện ở các vị trí liên tiếp nhau (độ dài cụm bit 1 liên tục tối đa là 3). Hỏi có tất cả bao nhiêu gói tin hợp lệ thỏa mãn quy chuẩn kỹ thuật trên?

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Trong tập hợp tất cả các chuỗi nhị phân độ dài 16 bit chứa đúng 10 bit 1 và 6 bit 0, người ta chọn đồng khả năng một chuỗi.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi được chọn không chứa bất kỳ cụm nào có nhiều hơn 3 bit 1 liên tiếp. Tính $T = 14300 \cdot P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một thiết bị viễn thông phát đi các chuỗi ký hiệu nhị phân độ dài 17 bit gồm 11 bit dữ liệu (mang giá trị 1) và 6 bit kiểm tra (mang giá trị 0). Để đảm bảo thuật toán tự sửa lỗi hoạt động hiệu quả, chuỗi ký hiệu bắt buộc không được chứa bất kỳ cụm lỗi nào gồm quá 2 bit 0 liên tiếp (độ dài chuỗi bit 0 liên tục tối đa bằng 2). Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi ký hiệu nhị phân thỏa mãn yêu cầu kỹ thuật?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Chọn ngẫu nhiên một chuỗi nhị phân độ dài 17 bit chứa đúng 11 bit 1 và 6 bit 0 từ tập hợp tất cả các chuỗi cùng loại.

Gọi $P$ là xác suất để chuỗi được chọn không chứa quá 2 bit 0 nào ở các vị trí liên tiếp nhau. Tính $T = 6188 \cdot P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Phân tập đồng dư và lập số
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-12

# BUỔI 12. PHÂN TẬP ĐỒNG DƯ VÀ LẬP SỐ

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Chia tập hợp theo số dư

Hai số $a, b$ đồng dư theo modulo $m$ khi $a-b$ chia hết cho $m$, ký hiệu $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Chọn modulo $m$ theo điều kiện chia hết trong đề.
2. Chia tập nguồn thành các lớp $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}$. Lớp $R_r$ gồm các số chia cho $m$ dư $r$.
3. Đếm số phần tử từng lớp. Nếu tập nguồn là một đoạn số nguyên liên tiếp và lớp khác rỗng, lấy số cuối trừ số đầu, chia cho $m$, rồi cộng 1.

Khi xét tổng, hiệu hoặc tích theo modulo $m$, có thể thay mỗi số bằng số dư tương ứng.

### 2 Chọn số thỏa điều kiện chia hết

– **Tổng chia hết cho** $m$. Liệt kê các kiểu số dư có tổng chia hết cho $m$.
Nếu lấy $k_r$ phần tử từ lớp $R_r$ có $n_r$ phần tử, dùng $C_{n_r}^{k_r}$ cho lớp đó.
Nhân trong từng kiểu, rồi cộng các kiểu rời nhau.
– **Hiệu chia hết cho** $m$. Hai số phải thuộc cùng lớp dư.
– **Tích chia hết.** Xét số dư của tích hoặc lượng thừa số nguyên tố cần có.
Ví dụ, tích chia hết cho 4 nếu có một thừa số chia hết cho 4 hoặc có ít nhất hai thừa số chẵn.

**Ví dụ nhanh.** Chọn 3 số có tổng chia hết cho 3 từ 1 đến 9.
Ba số dư có thể cùng bằng $0, 1, 2$ (mỗi giá trị là một trường hợp), hoặc là $0, 1, 2$ đôi một khác nhau.
Mỗi lớp có 3 số, nên có $3C_3^3 + 3^3 = 30$ cách chọn.

### 3 Lập số tự nhiên

– **Xét chữ số cuối.** Dùng chữ số cuối cho điều kiện chia hết cho $2, 5$ và hai chữ số cuối cho $4, 25$.
– **Xét tổng chữ số.** Với modulo 3 hoặc 9, chọn các chữ số có tổng phù hợp rồi xếp vào các vị trí.
– **Xét vị trí xen kẽ.** Với modulo 11, hiệu tổng chữ số ở hai nhóm vị trí xen kẽ phải chia hết cho 11.
– **Phối hợp điều kiện.** Chia hết cho 6 cần chữ số cuối chẵn và tổng chữ số chia hết cho 3. Chia hết cho 15 cần chữ số cuối là 0 hoặc 5 và tổng chữ số chia hết cho 3.
– **Kiểm tra chữ số đầu.** Nếu có 0, cố định chữ số đầu khác 0 hoặc trừ các cách xếp bắt đầu bằng 0.

### 4 Điền bảng theo lớp dư

Hiệu hai số không chia hết cho $m$ khi hai số thuộc hai lớp dư khác nhau.
Điền lớp dư trước, sau đó hoán vị các số cụ thể trong từng lớp.

– Với bảng bậc thang có $h$ hàng và $h$ cột, nếu một lớp có $h$ số và mỗi hàng, mỗi cột chứa tối đa một số thuộc lớp đó, lớp này phải xuất hiện đúng một lần trên từng hàng và từng cột.
– Bắt đầu ở hàng chỉ có một ô. Tiếp tục lên các hàng dài hơn và loại các cột đã dùng. Sau khi bỏ các ô đã xác định, xét bảng còn lại.
– Với mỗi mẫu lớp dư hợp lệ, nếu lớp $R_r$ có $n_r$ số, có $n_r!$ cách xếp các số đó vào các ô của lớp.

**Xác suất.** Khi các kết quả đồng khả năng, chia số kết quả thuận lợi cho số kết quả của không gian mẫu.

# B VÍ DỤ MINH HỌA

## Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Trong một đợt tập huấn trực tuyến chuẩn bị cho kỳ thi Đánh giá năng lực $HSA$, ban tổ chức cấp mã số báo danh cho các thí sinh tham gia là các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Người phụ trách kỹ thuật cần chọn ngẫu nhiên một cặp gồm 2 thí sinh khác nhau để cùng tham gia phòng phỏng vấn thử nghiệm sao cho tổng hai mã số báo danh của họ là một số chẵn.

– Với từng thí sinh, mã số là một số nguyên dương duy nhất thuộc tập $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.
– Với từng cặp thí sinh được chọn, thứ tự lựa chọn không phân biệt.

Hỏi người phụ trách có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu trên?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Một hộp đựng 30 tấm thẻ kiểm tra kiến thức được đánh số thứ tự liên tiếp từ 1 đến 30. Một học sinh rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, khả năng được rút ra là như nhau.
– Xác suất để số ghi trên tấm thẻ rút ra là một số chia hết cho 3 là $P$.

Tính $T = 9000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Từ các chữ số thuộc tập hợp $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ban tổ chức một cuộc thi robocon muốn lập các mã số định danh gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho mỗi mã số biểu diễn một số tự nhiên chia hết cho 5.

– Với từng mã số, chữ số đầu tiên ở hàng vạn phải khác 0.
– Với từng mã số, chữ số hàng đơn vị phải thỏa mãn dấu hiệu chia hết cho 5.

Hỏi ban tổ chức có thể lập được tất cả bao nhiêu mã số thỏa mãn các điều kiện trên?

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 4. TME** Trong một trò chơi toán học tại ngày hội $STEM$, người quản trò có một hộp chứa 22 quả cầu đồng chất gồm:

– 12 quả cầu màu đỏ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 12.
– 10 quả cầu màu xanh được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10.

Một người chơi được chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp. Gọi $P$ là xác suất để người chơi rút được 2 quả cầu có cùng màu và tổng hai số ghi trên chúng là một số lẻ. Tính $T = 4620 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ gồm 30 số nguyên dương đầu tiên. Ban giám khảo một cuộc thi Olympic Toán học muốn chọn ra một nhóm gồm 3 số phân biệt từ tập $A$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3.

– Với từng nhóm 3 số, thứ tự các số trong nhóm không phân biệt.
– Tổng của 3 số phải đồng dư với 0 theo modulo 3.

Hỏi ban giám khảo có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Cho tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Người ta lập ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các phần tử của tập $X$.

– Mỗi số tự nhiên được lập có xác suất xuất hiện như nhau.
– Biết xác suất để số tự nhiên được lập chia hết cho 3 là $P$.

Tính $T = 6500 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Từ tập hợp các chữ số thập phân $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 4?

– Chữ số đầu tiên ở hàng vạn phải khác 0.
– Số tự nhiên tạo thành phải chia hết cho 4.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Một trung tâm dữ liệu phát hành 15 khóa bảo mật được mã hóa bằng các số nguyên dương từ 1 đến 15. Hệ thống kích hoạt ngẫu nhiên một cụm gồm 3 khóa phân biệt.

– Với từng khóa, xác suất được kích hoạt là đồng đều.
– Biết xác suất để tổng của 3 số mã hóa ghi trên 3 khóa chia hết cho 3 là $P$.

Tính $T = 9100 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 3? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = 20 \times N + 1500$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Trong chương trình khuyến mãi của một sàn thương mại điện tử, có 25 mã giảm giá được đánh số từ 1 đến 25. Một khách hàng may mắn được hệ thống chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 mã giảm giá.

– Với từng mã giảm giá, cơ hội được chọn là như nhau.
– Xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 mã giảm giá chia hết cho 5 bằng $P$.

Tính $T = 8500 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Từ tập hợp các chữ số $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho các chữ số chẵn và các chữ số lẻ luôn đứng xen kẽ nhau?

– Với từng số tự nhiên, không có hai chữ số cùng tính chẵn lẻ nào đứng cạnh nhau.
– Các chữ số đôi một khác nhau.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 12. TME** Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số nguyên phân biệt từ tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Gọi $P$ là xác suất để tổng của 3 số được chọn chia hết cho 4. Tính $T = 8000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số (các chữ số không nhất thiết phải khác nhau) sao cho tổng các chữ số của số đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

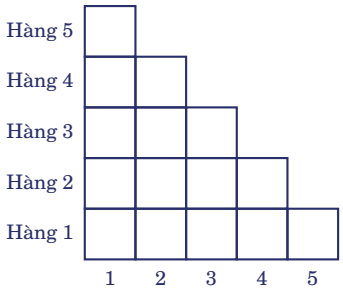
**Ví dụ 14. TME** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số thuộc tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Gọi $P$ là xác suất để số được chọn chia hết cho 3. Tính $T = 14700 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Trong một trò chơi bạn Bình cần vượt qua một thử thách. Theo yêu cầu của thử thách, Bình cần điền tất cả 15 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15; 16; 20\}$ vào 15 ô vuông trong bảng hình bậc thang gồm 5 hàng và 5 cột (Hàng 1 có 5 ô, Hàng 2 có 4 ô, Hàng 3 có 3 ô, Hàng 4 có 2 ô, Hàng 5 có 1 ô) thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Mỗi ô điền đúng một số và mỗi số chỉ được sử dụng một lần.
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 5.
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột không chia hết cho 5.

Hai cách điền gọi là giống nhau nếu số điền ở mỗi ô tương ứng trong 15 ô là giống nhau (không tính đến thứ tự điền các số vào 15 ô vuông). Gọi $H$ là số cách điền khác nhau để bạn Bình vượt qua được thử thách. Giá trị của biểu thức $\dfrac{H}{30}$ bằng bao nhiêu?




**KẾT QUẢ**

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Trong một đợt phát động phong trào đọc sách, thư viện trường THPT chuyên đánh mã số cho 80 cuốn sách tham khảo môn Toán bằng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 80. Thủ thư cần chọn ngẫu nhiên một cặp gồm 2 cuốn sách khác nhau để trưng bày tại bàn giới thiệu sách mới sao cho tổng hai mã số ghi trên chúng là một số lẻ.

– Với từng cuốn sách, mã số là một số nguyên dương thuộc tập $S = \{1, 2, 3, \ldots, 80\}$.
– Với từng cặp sách được chọn, thứ tự lựa chọn không phân biệt.

Hỏi thủ thư có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một ngân hàng chuẩn bị 40 phong bao lì xì điện tử được gắn các mã số may mắn là các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 40. Một khách hàng giao dịch đầu năm được hệ thống chọn ngẫu nhiên 1 phong bao lì xì.

– Với từng phong bao, khả năng được hệ thống chọn là hoàn toàn như nhau.
– Xác suất để mã số may mắn trên phong bao nhận được chia hết cho 4 là $P$.

Tính $T = 8400 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ gồm 100 số nguyên dương đầu tiên. Ban tổ chức một giải đấu cờ vua cần chọn ra 2 bạn học sinh có số báo danh phân biệt từ tập $X$ để thi đấu ván cờ giao hữu khai mạc sao cho tích hai số báo danh của hai bạn là một số lẻ.

– Với từng học sinh, số báo danh là một số nguyên dương thuộc tập $X$.
– Cặp đấu không phân biệt thứ tự giữa hai học sinh.

Hỏi ban tổ chức có tất cả bao nhiêu cách chọn cặp đấu thỏa mãn điều kiện?

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Một chiếc hộp chứa 50 thẻ bốc thăm trúng thưởng được đánh số thứ tự từ 1 đến 50. Người tham gia được rút ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, xác suất được rút ra là như nhau.
– Xác suất để số ghi trên thẻ rút được chia hết cho cả 2 và 3 là $P$.

Tính $T = 7500 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Từ tập hợp các chữ số $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, một công ty công nghệ muốn tạo các mã khóa thẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho mỗi mã khóa là một số tự nhiên chẵn.

– Với từng mã khóa, các chữ số được lấy từ tập $D$ và không trùng lặp.
– Chữ số tận cùng phải thuộc lớp thặng dư chia hết cho 2.

Hỏi công ty công nghệ đó có thể tạo ra tất cả bao nhiêu mã khóa thỏa mãn?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất 6 mặt (các mặt ghi số chấm từ 1 đến 6) hai lần liên tiếp độc lập.

– Với từng lần gieo, mỗi mặt xuất hiện với xác suất bằng nhau là $\frac{1}{6}$.
– Xác suất để tổng số chấm sau hai lần gieo là một số chia hết cho 3 là $P$.

Tính $T = 7200 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 70\}$ gồm 70 số nguyên dương đầu tiên. Một giáo viên chọn ngẫu nhiên 2 số phân biệt từ tập $S$ để giao đề bài tập nhóm cho học sinh sao cho tổng của hai số được chọn là một số chẵn.

– Với từng học sinh, số được chọn là duy nhất.
– Tổng hai số chia hết cho 2.

Hỏi giáo viên có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Một chiếc hộp kín chứa 60 tấm thẻ kiểm tra được đánh số thứ tự từ 1 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp.

– Khả năng được rút của mỗi tấm thẻ là như nhau.
– Biết xác suất để số ghi trên thẻ rút được là một số chia hết cho 5 bằng $P$.

Tính $T = 8500 \times P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 9. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 45\}$ gồm 45 số nguyên dương đầu tiên. Ban chủ nhiệm câu lạc bộ Tin học cần chọn ra 3 số phân biệt từ tập $S$ để làm bộ ba khóa bảo mật trong thuật toán băm sao cho tổng của 3 số này là một số chia hết cho 3.

– Với từng bộ ba số, thứ tự các phần tử không phân biệt.
– Tổng của 3 số phải đồng dư với 0 theo modulo 3.

Hỏi ban chủ nhiệm có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một hộp chứa 20 quả cầu xốp đánh số từ 1 đến 20 dùng trong trò chơi bốc thăm may mắn tại một trường THPT. Một học sinh lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp.

– Với từng quả cầu, cơ hội được rút là như nhau.
– Biết xác suất để tích của 2 số ghi trên 2 quả cầu được lấy ra là một số chia hết cho 2 (số chẵn) bằng $P$.

Tính $T = 3800 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Từ tập hợp các chữ số thập phân $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó là một số lẻ?

– Với từng số tự nhiên, chữ số đầu tiên ở hàng nghìn phải khác 0.
– Chữ số hàng đơn vị phải là số lẻ thuộc lớp thặng dư $R_1$ theo modulo 2.

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Cho tập hợp gồm 12 số nguyên dương $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Một phần mềm máy tính chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 số phân biệt từ tập $A$.

– Với từng cặp số, xác suất được phần mềm chọn là đồng đều.
– Xác suất để tổng của 2 số được chọn chia hết cho 4 bằng $P$.

Tính $T = 8800 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, người ta muốn lập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho tích của 4 chữ số trong mỗi số là một số chẵn.

– Với từng số tự nhiên, các chữ số thuộc tập $X$ và không lặp lại.
– Tích các chữ số chia hết cho 2.

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện trên?

KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một hộp chứa 15 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, khả năng được chọn là như nhau.
– Xác suất để hiệu của hai số ghi trên hai tấm thẻ được chọn là một số chia hết cho 3 bằng $P$.

Tính $T = 7700 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Từ tập hợp các chữ số $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 25? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = 30 \times N + 1200$.

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Lập ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ tập hợp các chữ số khác không $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

– Mỗi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau đều có khả năng được lập như nhau.
– Xác suất để số lập được là một số chẵn chia hết cho 3 bằng $P$.

Tính $T = 6300 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Từ tập hợp các chữ số $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số đứng ở vị trí chính giữa (hàng trăm) là một chữ số chia hết cho 3?

– Với từng số tự nhiên, các chữ số đôi một khác nhau.
– Chữ số hàng trăm thuộc tập hợp $\{3, 6\}$.

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một hộp đựng 16 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số từ 1 đến 16. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ hộp.

– Với từng viên bi, khả năng được lấy là như nhau.
– Xác suất để tích của 3 số ghi trên 3 viên bi được lấy ra là một số chia hết cho 4 bằng $P$.

Tính $T = 5000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 36\}$ gồm 36 số nguyên dương đầu tiên. Ban giám khảo cần chọn ra 3 số phân biệt từ tập $X$ sao cho tổng của 3 số này là một số chia hết cho 3.

– Thứ tự các số trong nhóm không phân biệt.
– Tổng của 3 số đồng dư với 0 theo modulo 3.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Một hộp chứa 24 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 24. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, khả năng được rút là như nhau.
– Xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 thẻ rút được chia hết cho 3 bằng $P$.

Tính $T = 6900 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Từ tập hợp các chữ số $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 5? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = 10 \times N + 1500$.

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất 6 mặt (số chấm từ 1 đến 6) hai lần liên tiếp độc lập.

– Với từng lần gieo, mỗi mặt xuất hiện với xác suất bằng nhau.
– Xác suất để tích số chấm của hai lần gieo là một số chia hết cho 6 bằng $P$.

Tính $T = 7200 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 3? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = 15 \times N + 1500$.

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Lập ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

– Với từng số tự nhiên, các chữ số thuộc tập $A$ và đôi một khác nhau.
– Xác suất để số tự nhiên được lập có tổng các chữ số chia hết cho 3 bằng $P$.

Tính $T = 7000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Từ các chữ số thuộc tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số luôn chứa đúng 3 chữ số chẵn và đúng 2 chữ số lẻ?

– Với từng số tự nhiên, các chữ số không được lặp lại.
– Số lượng chữ số chẵn là 3 và số lượng chữ số lẻ là 2.

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Một hộp chứa 21 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 21. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, xác suất được rút ra là như nhau.
– Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 tấm thẻ được rút chia hết cho 3 bằng $P$.

Tính $T = 9500 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng của chữ số đầu tiên và chữ số cuối cùng là một số chẵn?

– Chữ số đầu tiên (hàng vạn) và chữ số cuối cùng (hàng đơn vị) có cùng tính chẵn lẻ.
– Năm chữ số trong số tự nhiên đôi một khác nhau.

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất 6 mặt (các mặt mang số chấm từ 1 đến 6) ba lần liên tiếp độc lập.

– Với từng lần gieo, mỗi mặt có xác suất xuất hiện là $\frac{1}{6}$.

– Xác suất để tổng số chấm của 3 lần gieo là một số chia hết cho 5 bằng $P$.

Tính $T = 8640 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Từ tập hợp các chữ số thập phân $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 luôn đứng cạnh nhau, đồng thời tổng các chữ số của số đó là một số lẻ?

– Chữ số đầu tiên ở hàng vạn phải khác 0.

– Chữ số 1 và 2 luôn đứng liền kề nhau và tổng 5 chữ số là số lẻ.

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Một nhóm học sinh gồm 9 bạn (trong đó có 5 bạn nam và 4 bạn nữ) được xếp ngẫu nhiên thành một hàng dọc gồm 4 bạn để nhận phần thưởng danh dự.

– Với từng vị trí trong hàng, cơ hội được chọn của các bạn học sinh là như nhau.

– Xác suất để 4 bạn học sinh được chọn đứng thành hàng có nam và nữ đứng xen kẽ nhau bằng $P$.

Tính $T = 6300 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 31. TME** Từ tập hợp các chữ số $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho tích của 5 chữ số đó là một số chia hết cho 10?

– Các chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $A$.

– Tích của 5 chữ số chia hết cho cả 2 và 5.

KẾT QUẢ

**Bài 32. TME** Một hộp chứa 30 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 30. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

– Với từng tấm thẻ, khả năng được chọn là như nhau.

– Xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 thẻ rút được chia hết cho 5 bằng $P$.

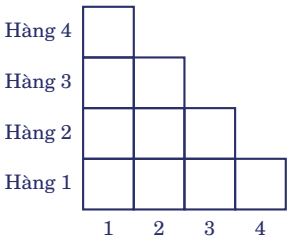
Tính $T = 8500 \times P$.

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 33. TME** Cho một bảng lưới ô vuông hình bậc thang gồm 4 hàng: Hàng 1 có 4 ô, Hàng 2 có 3 ô, Hàng 3 có 2 ô, Hàng 4 có 1 ô (tổng cộng 10 ô vuông). Người ta cần điền tất cả 10 số thuộc tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$ vào 10 ô vuông sao cho:

- Mỗi ô điền đúng một số và mỗi số chỉ sử dụng một lần.
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 4.
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột không chia hết cho 4.

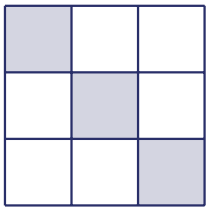



Gọi $N$ là số cách điền khác nhau thỏa mãn yêu cầu. Tính $T = 10 \times N + 1500$.

KẾT QUẢ

**Bài 34. TME** Một bảng lưới vuông kích thước $3 \times 3$ gồm 9 ô vuông. Người ta điền ngẫu nhiên 9 số tự nhiên phân biệt từ 1 đến 9 vào 9 ô vuông của bảng (mỗi ô một số).

- Các hoán vị điền 9 số đều có khả năng xảy ra như nhau.
- Biết xác suất để tổng 3 số nằm trên đường chéo chính của bảng là một số chia hết cho 3 bằng $P$.

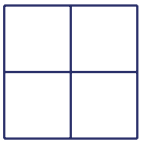


Tính $T = 5600 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 35. TME** Người ta cần điền 4 số phân biệt được chọn từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vào một bảng ô vuông kích thước $2 \times 2$ (mỗi ô điền một số) sao cho tổng các số trên mỗi hàng và tổng các số trên mỗi cột đều là các số chẵn.

- Bốn số điền vào 4 ô đôi một khác nhau.
- Tổng hai số ở mỗi hàng và mỗi cột đều chia hết cho 2.



Gọi $N$ là số cách điền thỏa mãn điều kiện. Tính $T = 10 \times N + 1200$.

KẾT QUẢ

**Bài 36. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ gồm 30 số nguyên dương đầu tiên. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 số phân biệt từ tập $S$.

- Với từng bộ ba số, xác suất được chọn là đồng đều.
- Xác suất để tổng của 3 số được chọn chia hết cho 5 bằng $P$.

Tính $T = 8500 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 37. TME** Từ tập hợp các chữ số $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 9? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = \dfrac{N}{3}$.

KẾT QUẢ

**Bài 38. TME** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập chữ số $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$.

– Mỗi số tự nhiên trong tập $S$ có cơ hội được chọn như nhau.
– Xác suất để số được chọn chia hết cho 6 bằng $P$.

Tính $T = 14000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 39. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó chia hết cho 15? Gọi số lượng các số lập được là $N$. Tính $T = 25 \times N + 1200$.

KẾT QUẢ

**Bài 40. TME** Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 số nguyên phân biệt từ tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

– Với từng bộ 4 số, khả năng được chọn là đồng đều.
– Xác suất để tổng của 4 số được chọn chia hết cho 4 bằng $P$.

Tính $T = 9690 \times P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Đếm tam giác và xác suất
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-13

# BUỔI 13. ĐẾM TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG XÁC SUẤT

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Từ bộ ba điểm đến tam giác

– Chọn ba điểm phân biệt rồi loại các bộ ba thẳng hàng. Với $n$ điểm và chỉ một đường thẳng chứa $k \geq 3$ điểm, số tam giác là $C_n^3 - C_k^3$.
– Nếu các điểm chỉ nằm trên hai đường thẳng song song, chọn hai điểm trên một đường và một điểm trên đường kia.
– Trên lưới tọa độ, kiểm tra thẳng hàng bằng $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$.
Khi đếm theo đường thẳng, mỗi bộ ba thẳng hàng chỉ thuộc một đường.

### 2 Đếm cạnh chung với đa giác lồi

Với đa giác lồi $n \geq 4$ đỉnh, có $C_n^3$ tam giác tạo từ các đỉnh.
– **Hai cạnh chung.** Chọn một đỉnh làm đỉnh giữa của ba đỉnh liên tiếp, được $n$ cách.
– **Một cạnh chung.** Chọn cạnh rồi loại hai đầu mút và hai đỉnh kề bên ngoài cạnh. Có $n(n-4)$ cách.
– **Không có cạnh chung.** Lấy tổng số tam giác trừ hai loại trên.

### 3 Phân loại tam giác trong đa giác đều

– **Vuông.** Cạnh huyền là đường kính. Nếu $n$ chẵn, có $\frac{n}{2}(n-2)$ cách. Nếu $n$ lẻ, có 0 cách. Tam giác vuông cân chỉ có khi $4 \mid n$, với đỉnh thứ ba cách mỗi đầu đường kính $\frac{n}{4}$ bước trên vòng.
– **Cân.** Chọn đỉnh cân rồi chọn hai đỉnh đối xứng qua đường nối đỉnh cân với tâm. Có $n\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ lượt đếm.
Mỗi tam giác đều bị đếm ba lần, nên trừ hai lần số tam giác đều để đếm tam giác cân.
– **Đều.** Nếu $3 \mid n$, các đỉnh cách nhau $\frac{n}{3}$ bước. Có $\frac{n}{3}$ tam giác đều, đôi một không chung đỉnh. Nếu $3 \nmid n$, có 0 cách.
– **Nhọn và tù.** Xét ba khoảng cách giữa các đỉnh liên tiếp theo vòng, có tổng $n$.
Nếu khoảng lớn nhất nhỏ hơn $\frac{n}{2}$, tam giác nhọn và chứa tâm trong miền trong. Nếu lớn hơn $\frac{n}{2}$, tam giác tù. Trường hợp bằng $\frac{n}{2}$ cho tam giác vuông.

### 4 Phân nhóm đỉnh và lập xác suất

– **Nhóm tam giác đều.** Đếm số vị trí cần chọn trong từng nhóm, sau đó nhân số cách gán vật phân biệt nếu đề yêu cầu.
– **Nhóm theo số dư.** Khi tổng chỉ số phải chia hết cho $m$, liệt kê các kiểu số dư có tổng chia hết cho $m$. Dùng tổ hợp trong từng lớp dư.
– **Xác suất.** Khi các bộ chọn đồng khả năng, lấy số bộ thuận lợi chia cho số bộ có thể chọn. Nếu chọn ba đỉnh thì mẫu số là $C_n^3$.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 8 điểm phân biệt. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh của nó được chọn từ 18 điểm nói trên. Tính $T = N + 1500$.

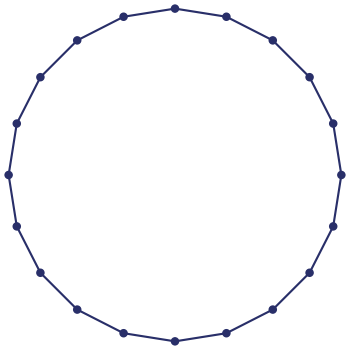



KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Trong mặt phẳng cho 15 điểm phân biệt, trong đó có đúng 6 điểm cùng nằm trên đường thẳng $d$, ngoài ra không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 điểm từ 15 điểm đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác. Tính $T = 1820 \times P$.

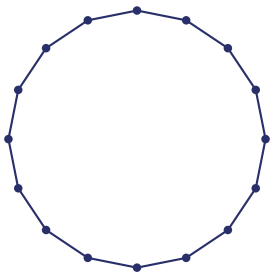
KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Cho một đa giác lồi 20 đỉnh. Xét tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác lồi đã cho. Gọi $N$ là số tam giác mà cả ba cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác lồi. Tính $T = N + 1200$.



KẾT QUẢ

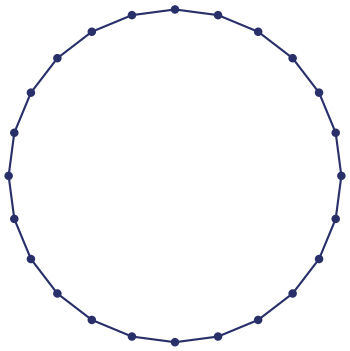
**Ví dụ 4. TME** Cho một đa giác lồi gồm 16 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 7000 \times P$.



KẾT QUẢ

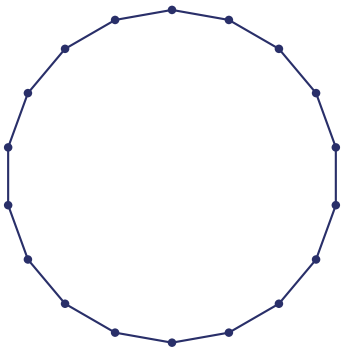
## Vận dụng

**Ví dụ 5. TME** Cho một đa giác đều 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác vuông mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1500$.



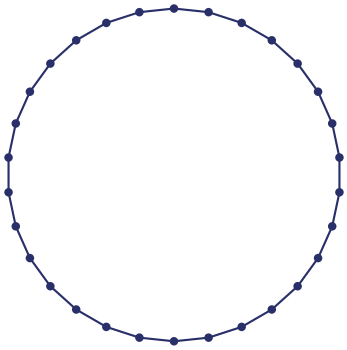
KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Cho đa giác đều gồm 18 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 18 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác cân (kể cả tam giác đều). Tính $T = 6800 \times P$.



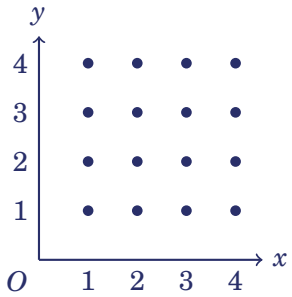
KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Hỏi có bao nhiêu tam giác tù mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho? (Biết rằng tam giác tù là tam giác có một góc lớn hơn $90°$).



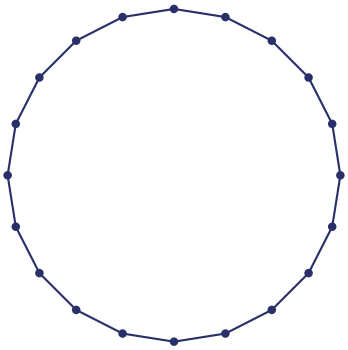
KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp điểm $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 4\}$ gồm 16 điểm tạo thành lưới vuông kích thước $4 \times 4$. Gọi $N$ là số tam giác có diện tích dương mà 3 đỉnh đều thuộc tập hợp $S$. Tính $T = 10N + 1000$.



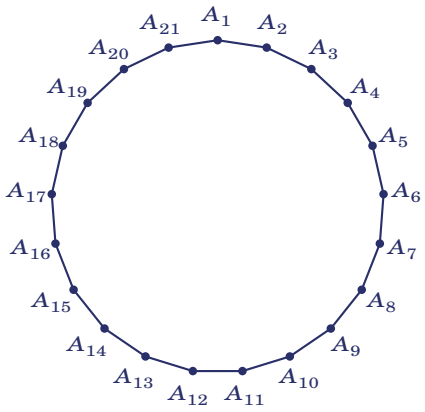

KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác nhọn (tương đương với việc tâm $O$ nằm trong miền trong của tam giác). Tính $T = 9500 \times P$.



KẾT QUẢ

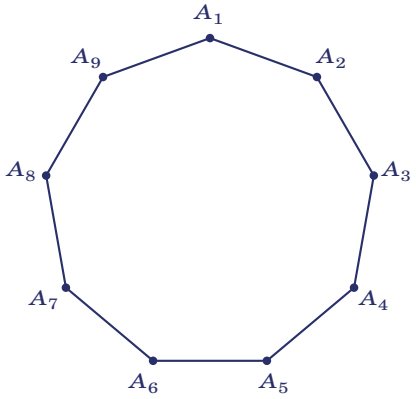
**Ví dụ 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 21 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 21 theo chiều kim đồng hồ: $A_1, A_2, \ldots, A_{21}$. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh $A_i, A_j, A_k$ $(1 \le i < j < k \le 21)$ sao cho tổng ba chỉ số $(i+j+k)$ chia hết cho 3. Tính $T = 10N + 1200$.




KẾT QUẢ

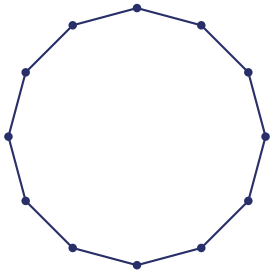
## Tổng hợp

**Ví dụ 11. TME** Cho đa giác đều gồm 9 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_9$ nội tiếp đường tròn. Tập hợp 9 đỉnh này được phân hoạch thành 3 tam giác đều rời nhau: $T_1 = \{A_1, A_4, A_7\}$, $T_2 = \{A_2, A_5, A_8\}$, $T_3 = \{A_3, A_6, A_9\}$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 9 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 đỉnh được chọn có chứa trọn vẹn 3 đỉnh của ít nhất một tam giác đều. Tính $T = 7000 \times P$.



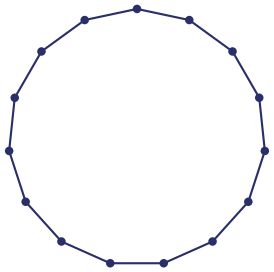

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Một khung đèn trang trí hình đa giác đều 12 đỉnh. Người ta có 3 bóng đèn LED màu đỏ giống nhau và 9 bóng đèn LED màu xanh giống nhau để gắn vào 12 đỉnh (mỗi đỉnh gắn đúng 1 bóng đèn). Gọi $N$ là số cách bố trí vị trí các bóng đèn sao cho 3 bóng đèn LED màu đỏ không tạo thành một tam giác đều. Tính $T = 10N + 1500$.



**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 15 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác để tạo thành một tam giác. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành là một tam giác tù. Tính $T = 2600 \times P$.



**KẾT QUẢ**

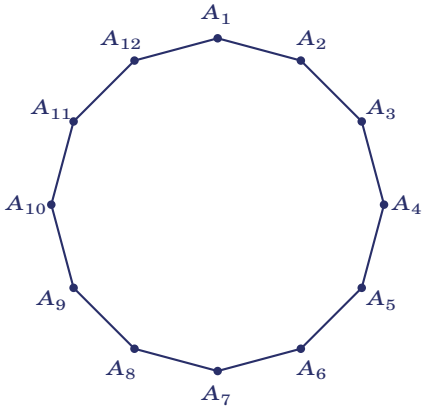
**Ví dụ 14. TME** Một vòng đu quay trò chơi có khung thép dạng đa giác đều 12 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ nội tiếp đường tròn. Khung này chứa 4 tam giác đều khung chịu lực rời nhau là:

$$T_1 = \{A_1, A_5, A_9\}, \quad T_2 = \{A_2, A_6, A_{10}\}, \quad T_3 = \{A_3, A_7, A_{11}\}, \quad T_4 = \{A_4, A_8, A_{12}\}$$

Kỹ sư lắp đặt 12 bóng đèn led vào 12 đỉnh của đa giác, gồm:

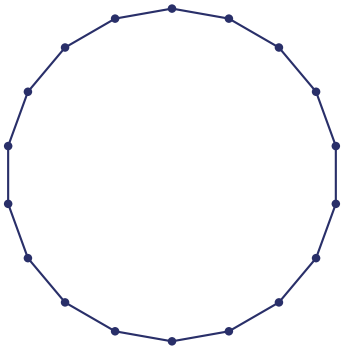
– 4 bóng đèn màu đỏ có công suất khác nhau đôi một.
– 8 bóng đèn màu xanh có công suất khác nhau đôi một.

Xếp ngẫu nhiên 12 bóng đèn này vào 12 đỉnh sao cho mỗi tam giác đều $T_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Gọi $P$ là tỉ số giữa số cách xếp thỏa mãn điều kiện trên và tổng số cách xếp 12 bóng đèn tùy ý vào 12 đỉnh. Tính $T = 11000 \times P$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Cho một đa giác đều gồm 18 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 18 đỉnh của đa giác đều để tạo thành một tam giác. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành là một tam giác không vuông và không cân. Tính $T = 1360 \times P + 1000$.



KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận dạng

**Bài 1. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 8 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 6 điểm phân biệt. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh được chọn từ 14 điểm nói trên. Tính $T = 10N + 1200$.

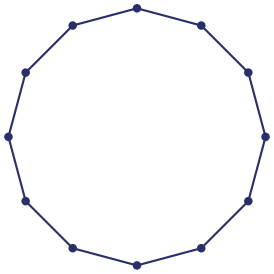



KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Trong mặt phẳng cho 12 điểm phân biệt, trong đó có đúng 5 điểm cùng nằm trên một đường thẳng $d$, ngoài ra không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 điểm từ 12 điểm đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác. Tính $T = 2200 \times P$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho một đa giác lồi có 12 đỉnh. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh của nó là 3 đỉnh của đa giác lồi và có đúng hai cạnh là hai cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 100N + 1200$.

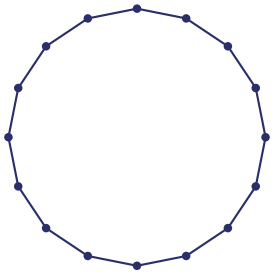


KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Cho một đa giác lồi gồm 15 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 9100 \times P + 1000$.

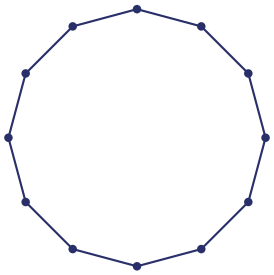
KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác vuông mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1500$.



KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác đều. Tính $T = 55000 \times P$.



KẾT QUẢ

## Vận dụng

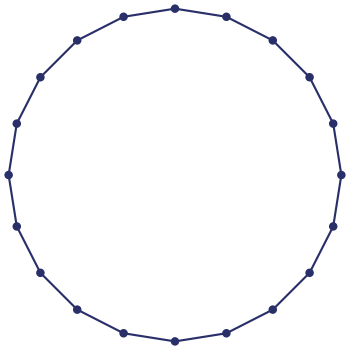
**Bài 7. TME** Cho một đa giác lồi gồm 14 đỉnh. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh của nó là đỉnh của đa giác lồi và có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 10N + 1600$.

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Cho một đa giác lồi gồm 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác lồi đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác lồi. Tính $T = 5500 \times P$.

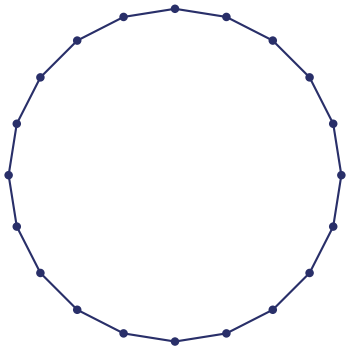
KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác cân (kể cả tam giác đều nếu có) mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1200$.



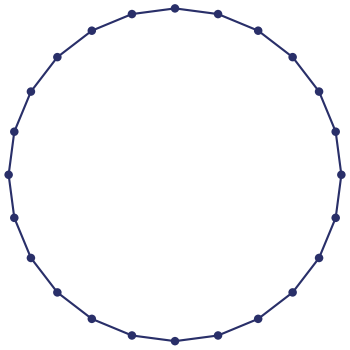
KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông. Tính $T = 9500 \times P$.



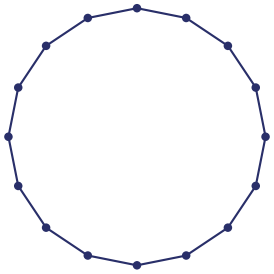
KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác đều mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 200N + 1400$.



KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác tù. Tính $T = 5000 \times P$.

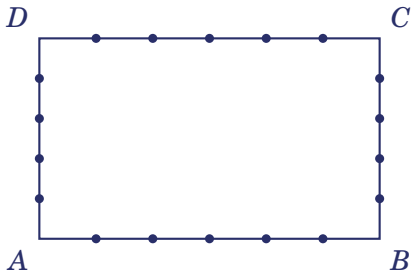


KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Trong mặt phẳng cho một đường tròn $(C)$ và một đường thẳng $d$ không cắt $(C)$. Trên đường tròn $(C)$ lấy 8 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d$ lấy 12 điểm phân biệt. Biết rằng ngoài 12 điểm trên $d$ không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh được chọn từ 20 điểm nói trên. Tính $T = N + 1500$.

KẾT QUẢ

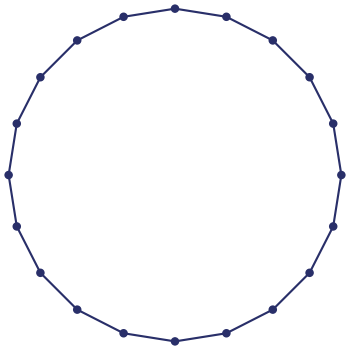
**Bài 14. TME** Trên mặt phẳng cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên cạnh $AB$ lấy 5 điểm phân biệt, trên cạnh $BC$ lấy 4 điểm phân biệt, trên cạnh $CD$ lấy 5 điểm phân biệt, trên cạnh $DA$ lấy 4 điểm phân biệt (tất cả các điểm đều không trùng với 4 đỉnh $A, B, C, D$). Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 điểm từ 18 điểm nói trên. Gọi $P$ là xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác (tức 3 điểm không cùng nằm trên một cạnh). Tính $T = 2040 \times P$.




KẾT QUẢ

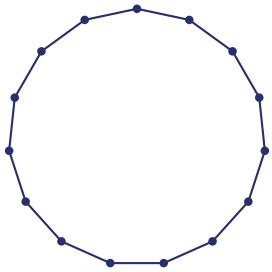

thuvientoanhoc.com

**Bài 15. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác nhọn mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1600$.



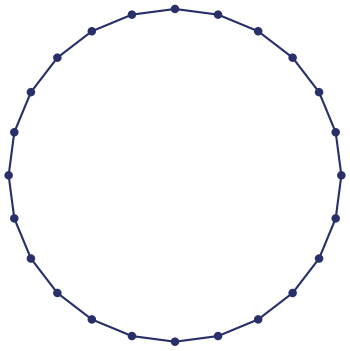
KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Cho một đa giác đều gồm 15 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác cân (kể cả tam giác đều). Tính $T = 9100 \times P$.



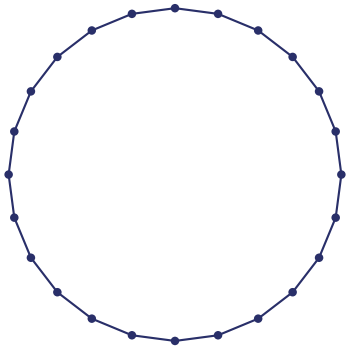
KẾT QUẢ

**Bài 17. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N+1600$.



KẾT QUẢ

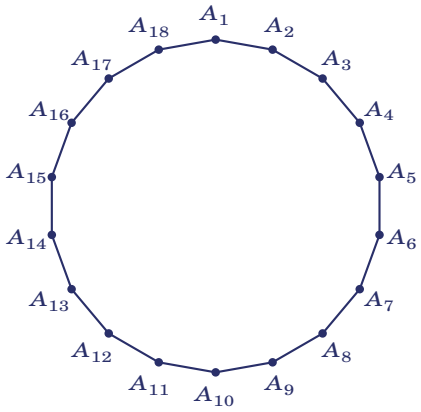
**Bài 18. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 24 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông cân. Tính $T = 25300 \times P + 1100$.



KẾT QUẢ

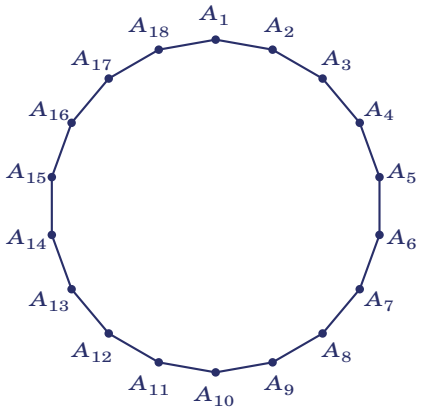
## Tổng hợp

**Bài 19. TME** Cho một đa giác đều gồm 18 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 18 theo chiều kim đồng hồ: $A_1, A_2, \ldots, A_{18}$. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh $A_i, A_j, A_k$ $(1 \le i < j < k \le 18)$ sao cho tổng ba chỉ số $(i + j + k)$ chia hết cho 3. Tính $T = 10N + 1240$.



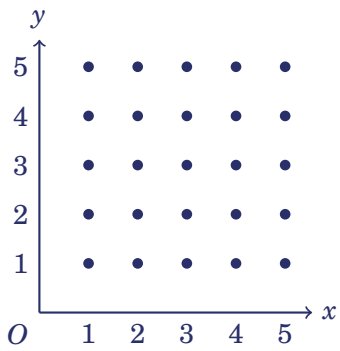

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Cho một đa giác đều gồm 18 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 18 theo chiều kim đồng hồ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 18 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn $A_i, A_j, A_k$ có tổng ba chỉ số $(i+j+k)$ chia hết cho 2. Tính $T = 8160 \times P$.



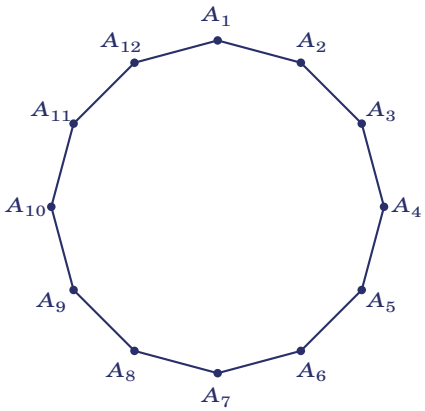

**KẾT QUẢ**

**Bài 21. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp điểm $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5\}$ gồm 25 điểm tạo thành lưới vuông kích thước $5 \times 5$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có diện tích dương mà 3 đỉnh đều thuộc tập hợp $S$?



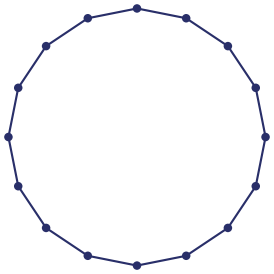

**KẾT QUẢ**

**Bài 22. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn. Tập hợp 12 đỉnh này được phân hoạch thành 4 tam giác đều rời nhau: $T_1, T_2, T_3, T_4$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 đỉnh được chọn có chứa trọn vẹn 3 đỉnh của đúng một tam giác đều trong 4 tam giác đều nói trên. Tính $T = 55000 \times P$.



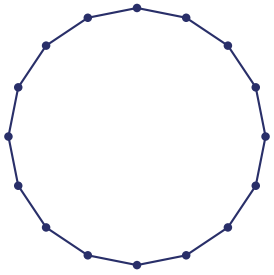

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Một vòng tròn trang trí có 16 vị trí gắn bóng đèn cách đều nhau (tạo thành 16 đỉnh của một đa giác đều). Người ta có 4 bóng đèn LED màu đỏ giống nhau và 12 bóng đèn LED màu vàng giống nhau để gắn vào 16 vị trí này (mỗi vị trí gắn đúng 1 bóng đèn). Gọi $N$ là số cách chọn vị trí gắn 4 bóng đèn đỏ sao cho không có bất kỳ hai bóng đèn đỏ nào nằm ở hai vị trí kề nhau trên vòng tròn. Tính $T = 10N + 1400$. Các vị trí gắn đèn được phân biệt.



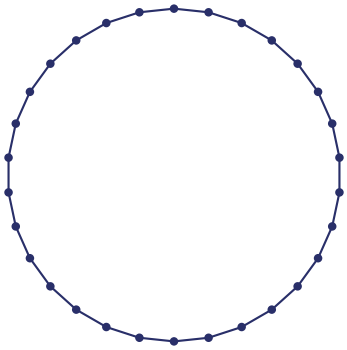
KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 đỉnh được chọn không có bất kỳ hai đỉnh nào là hai đỉnh kề nhau của đa giác đều. Tính $T = 9100 \times P$.



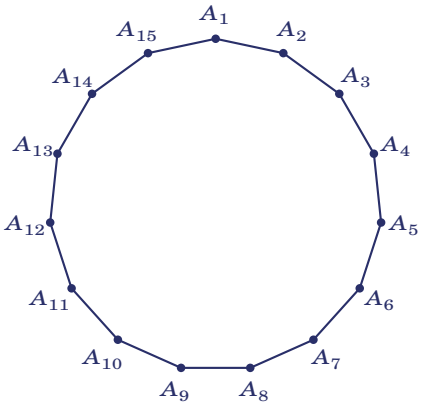
KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác vuông mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều sao cho tam giác đó không cân. Tính $T = 10N + 1100$.



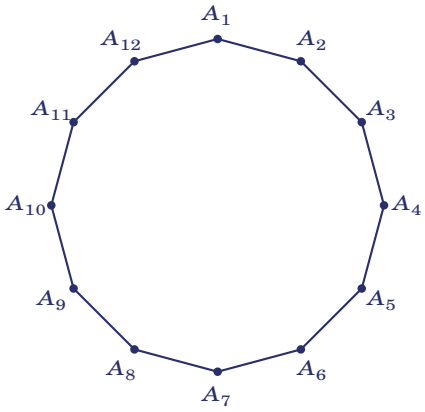
KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Cho một đa giác đều gồm 15 đỉnh nội tiếp đường tròn. Tập hợp 15 đỉnh này được phân hoạch thành 5 tam giác đều rời nhau đôi một: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 5 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để mỗi tam giác đều $T_k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ đều có đúng một đỉnh được chọn. Tính $T = 10010 \times P + 1000$.



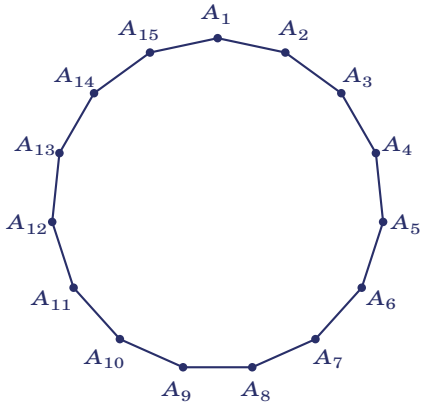

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một biển quảng cáo hình đa giác đều 12 đỉnh có 4 tam giác đều rời nhau đôi một: $T_1, T_2, T_3, T_4$. Người ta dùng 4 bóng đèn LED màu đỏ giống nhau và 8 bóng đèn LED màu xanh giống nhau để gắn vào 12 đỉnh (mỗi đỉnh đúng một bóng). Gọi $N$ là số cách chọn 4 đỉnh để gắn bóng đèn đỏ sao cho 4 đỉnh này chỉ phân bố trên đúng 2 tam giác đều trong số 4 tam giác đều nói trên (và mỗi tam giác đều trong 2 tam giác đó đều có ít nhất một bóng đỏ). Tính $T = 50N + 1500$.



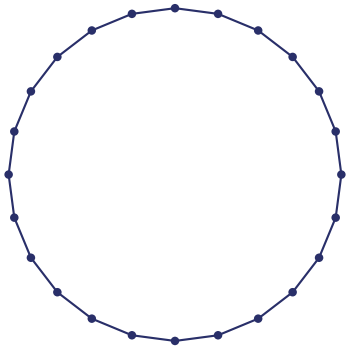

KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Cho một đa giác đều gồm 15 đỉnh nội tiếp đường tròn. Tập hợp 15 đỉnh này chứa đúng 5 tam giác đều rời nhau $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 6 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để trong 6 đỉnh được chọn có chứa trọn vẹn 3 đỉnh của đúng một tam giác đều trong 5 tam giác đều nói trên. Tính $T = 7007 \times P$.



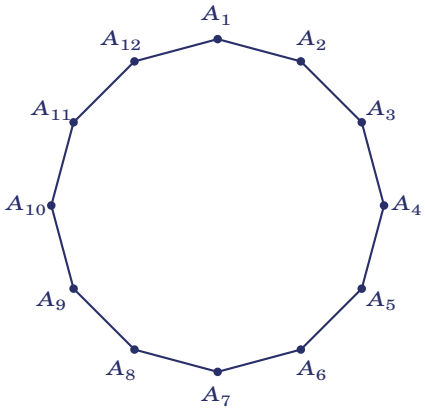

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác nhọn (tương đương tam giác chứa tâm $O$ trong miền trong của nó) mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1500$.



KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Cho một vòng đu quay dạng đa giác đều 12 đỉnh có 4 tam giác đều khung chịu lực rời nhau: $T_1, T_2, T_3, T_4$. Người ta gắn ngẫu nhiên 4 bóng đèn màu đỏ giống nhau và 8 bóng đèn màu xanh giống nhau vào 12 đỉnh của vòng đu quay (mỗi đỉnh đúng 1 bóng đèn). Gọi $P$ là xác suất để toàn bộ 4 bóng đèn đỏ chỉ nằm trên các đỉnh của đúng 2 tam giác đều khung chịu lực. Tính $T = 8800 \times P$. Mọi bộ bốn đỉnh gắn bóng đỏ đều đồng khả năng.




KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Tứ giác, hình chữ nhật và hình vuông
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-14

# BUỔI 14. ĐẾM TỨ GIÁC VÀ ỨNG DỤNG XÁC SUẤT

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Chọn bốn điểm để tạo thành tứ giác

– **Tứ giác đơn.** Bốn điểm phân biệt có thể làm đỉnh của một tứ giác đơn nếu không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu một điểm nằm trong tam giác tạo bởi ba điểm còn lại, tứ giác đơn tạo được là tứ giác lõm.
– **Tứ giác lồi.** Cả bốn điểm phải là đỉnh của bao lồi. Nếu chọn bốn đỉnh của một đa giác lồi, có $C_n^4$ cách.
– **Có một nhóm thẳng hàng.** Nếu chỉ đường thẳng $d$ chứa từ ba điểm trở lên, với $k$ điểm trên $d$ trong tổng số $n$ điểm, số bộ bốn điểm tạo được tứ giác đơn là

$$C_n^4 - C_k^4 - C_k^3(n-k).$$

Hai số hạng trừ lần lượt ứng với bốn điểm và đúng ba điểm trên $d$.
– **Hai đường thẳng song song.** Chọn đúng hai điểm từ mỗi đường. Với $m$ và $n$ điểm, có $C_m^2 C_n^2$ tứ giác lồi.

### 2 Đếm hình trên lưới ô vuông

– **Hình chữ nhật.** Trên lưới $m \times n$ ô, chọn hai trong $m+1$ đường kẻ theo một hướng và hai trong $n+1$ đường theo hướng còn lại. Số hình là $C_{m+1}^2 C_{n+1}^2$.
– **Hình vuông.** Với cạnh dài $k$ ô, có $(m-k+1)(n-k+1)$ vị trí. Cộng theo $k$ từ 1 đến $\min(m,n)$. Nếu đề yêu cầu hình chữ nhật không vuông, lấy hiệu hai kết quả.
– Các công thức trên đếm hình có cạnh nằm trên đường lưới. Nếu đề chỉ yêu cầu các đỉnh là điểm lưới, cần xét thêm hình nghiêng.

### 3 Đếm số cạnh chung với đa giác lồi

– Trên vòng $n \geq 5$ đỉnh, gom bốn đỉnh được chọn thành $r$ nhóm liên tiếp. Số cạnh chung là $4-r$.
– Chọn đỉnh đầu của một nhóm, rồi phân 4 đỉnh được chọn và $n-4$ đỉnh không được chọn thành $r$ nhóm khác rỗng xen kẽ. Mỗi bộ đỉnh bị đếm $r$ lần, nên số bộ là

$$\frac{n}{r} C_3^{r-1} C_{n-5}^{r-1}, \qquad 1 \leq r \leq \min(4, n-4).$$

Nếu $r > n-4$, không đủ đỉnh để tách các nhóm.

### 4 Nhận dạng hình trong đa giác đều

– **Hình chữ nhật.** Hai đường chéo là hai đường kính. Có $C_{n/2}^2$ hình nếu $n$ chẵn và không có hình nào nếu $n$ lẻ.
– **Hình vuông.** Hai đường kính phải vuông góc. Nếu $4 \mid n$, có $n/4$ hình. Mỗi hình gồm bốn đỉnh cách nhau $n/4$ bước trên vòng. Nếu $4 \nmid n$, không có hình vuông.
– **Hình thang cân.** Với bốn chỉ số $a < b < c < d$ quanh vòng, hai cạnh $A_aA_b$ và $A_cA_d$ song song khi $a+b \equiv c+d \pmod{n}$. Cặp cạnh còn lại song song khi $a+d \equiv b+c \pmod{n}$. Một hình chữ nhật thỏa cả hai điều kiện, nên cần xử lý phần giao khi đếm.


thuvientoanhoc.com

### 5 Đếm theo lớp dư và lập xác suất

– **Tổng chỉ số.** Chia các đỉnh theo số dư, liệt kê các kiểu số lượng có tổng dư bằng 0, rồi nhân các số tổ hợp trong từng kiểu.
– **Phân bố trên các hình vuông.** Chia các đỉnh thành các nhóm bốn đỉnh của từng hình vuông. Với mỗi kiểu phân bố, chọn vị trí trong từng nhóm. Nếu các vật phân biệt, nhân thêm số cách gán vật vào các vị trí đã chọn.
– **Xác suất.** Khi mọi bộ $k$ đỉnh đều đồng khả năng, mẫu số là $C_n^k$. Tử số đếm các bộ đỉnh thỏa điều kiện.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

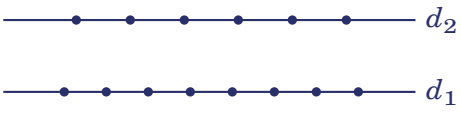
### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 12 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 10 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tứ giác lồi (hình thang) mà cả 4 đỉnh đều được chọn từ 22 điểm nói trên?



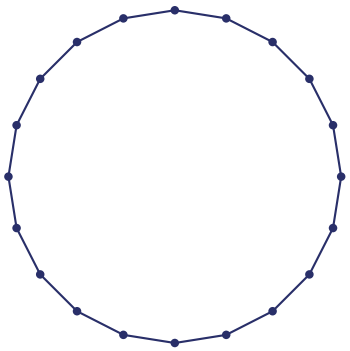

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ có 8 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ có 6 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 điểm từ 14 điểm đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 4 điểm được chọn tạo thành một tứ giác lồi. Tính $T = 7150 \times P$.



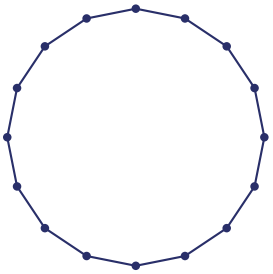

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật mà cả 4 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 50N + 1250$.



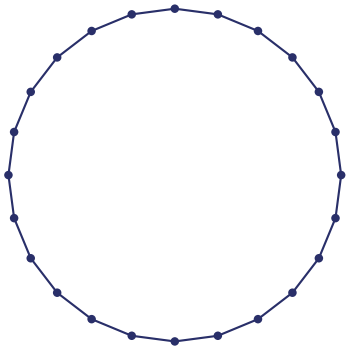
KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật. Tính $T = 65000 \times P + 1000$.



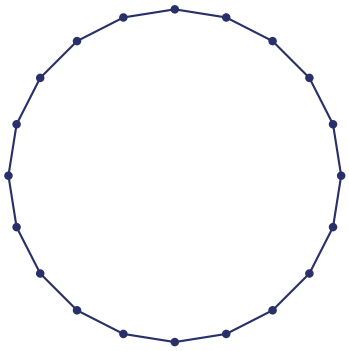
KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều nhưng không phải là hình vuông. Tính $T = 50N + 1500$.



KẾT QUẢ

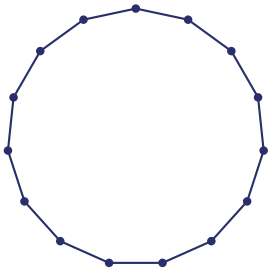
**Ví dụ 6. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình vuông. Tính $T = 969000 \times P + 1000$.



KẾT QUẢ

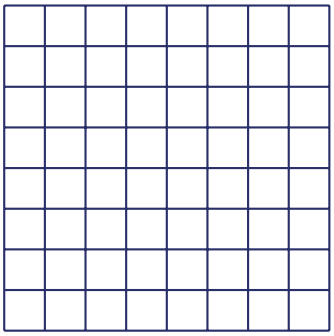
## Vận dụng

**Ví dụ 7. TME** Cho một đa giác lồi gồm 15 đỉnh. Xét tập hợp tất cả các tứ giác có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác lồi đã cho. Gọi $N$ là số tứ giác mà cả bốn cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác lồi. Tính $T = 10N + 1500$.



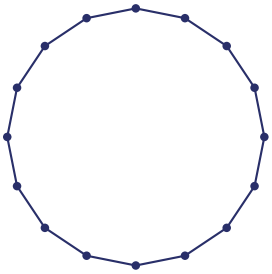
KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Bàn cờ vua tiêu chuẩn gồm 64 ô vuông nhỏ kích thước $1\times 1$, được tạo thành bởi hệ 9 đường thẳng nằm ngang song song cách đều nhau và hệ 9 đường thẳng đứng song song cách đều nhau. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật tạo thành từ các đường lưới nói trên mà không phải là hình vuông?



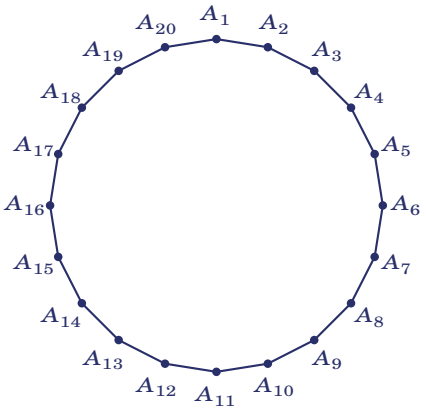
KẾT QUẢ

**Ví dụ 9. TME** Cho một đa giác lồi gồm 16 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác lồi có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T=9100\times P$.



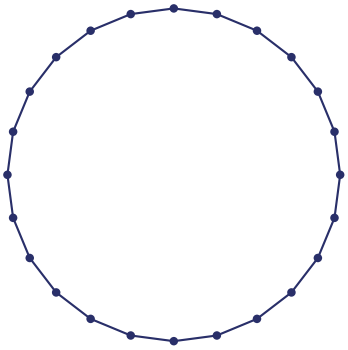
KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 20 theo chiều kim đồng hồ: $A_1,A_2,\ldots,A_{20}$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh $A_i,A_j,A_k,A_l$ $(1\le i<j<k<l\le 20)$ sao cho tổng bốn chỉ số $(i+j+k+l)$ chia hết cho 4. Tính $T=N+1000$.



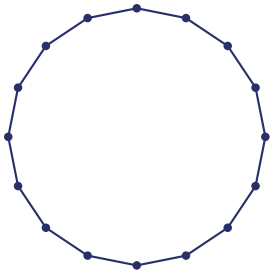

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 24 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật. Tính $T=322000\times P+1000$.



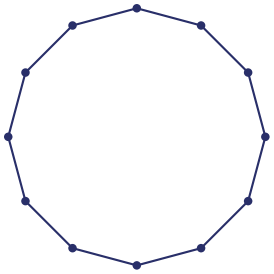
KẾT QUẢ

## Tổng hợp



**Ví dụ 12. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình thang cân mà 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều nhưng không phải là hình chữ nhật. Tính $T = 10N + 1200$.

KẾT QUẢ

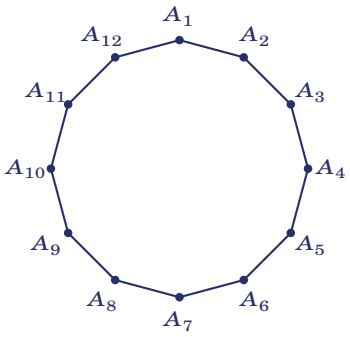


**Ví dụ 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn. Tập hợp 12 đỉnh này được phân hoạch thành 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình vuông. Tính $T = 330000 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một vòng đu quay trò chơi có khung thép dạng đa giác đều gồm 12 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ nội tiếp đường tròn. Khung này chứa đúng 3 hình vuông khung chịu lực rời nhau đôi một là:

$$V_1 = \{A_1, A_4, A_7, A_{10}\},$$
$$V_2 = \{A_2, A_5, A_8, A_{11}\},$$
$$V_3 = \{A_3, A_6, A_9, A_{12}\}.$$



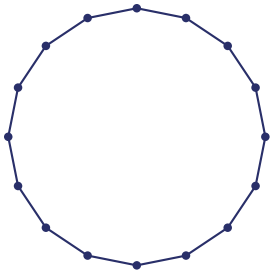

Kỹ sư lắp đặt 12 bóng đèn led vào 12 đỉnh của đa giác, gồm:

- 4 bóng đèn màu đỏ có công suất khác nhau đôi một.
- 8 bóng đèn màu xanh có công suất khác nhau đôi một.

Xếp 12 bóng đèn này vào 12 đỉnh. Một cách xếp thỏa yêu cầu nếu mỗi hình vuông trong 3 hình vuông nói trên đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Gọi $P$ là tỉ số giữa số cách xếp thỏa mãn điều kiện trên và tổng số cách xếp 12 bóng đèn tùy ý vào 12 đỉnh. Tính $T = 11000 \times P$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một vòng hoa trang trí dạng đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Tập hợp 16 đỉnh này chứa đúng 4 hình vuông rời nhau đôi một là $V_1, V_2, V_3, V_4$. Người ta gắn ngẫu nhiên 4 bông hoa cúc màu đỏ giống nhau và 12 bông hoa cúc màu trắng giống nhau vào 16 đỉnh (mỗi đỉnh gắn đúng 1 bông hoa). Gọi $P$ là xác suất để mỗi hình vuông $V_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ đều có đúng một bông hoa cúc màu đỏ. Tính $T = 9100 \times P$.

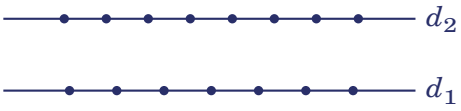


KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

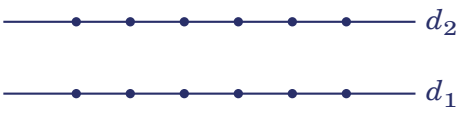
## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 7 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 8 điểm phân biệt. Gọi $N$ là số tứ giác lồi mà 4 đỉnh của nó được chọn từ 15 điểm nói trên. Tính $T = 10N + 1200$.



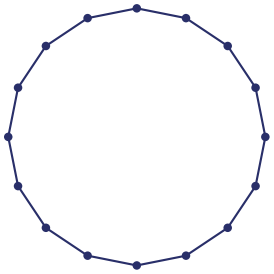

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ lấy 6 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ lấy 6 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 điểm từ 12 điểm đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 4 điểm được chọn tạo thành một tứ giác lồi. Tính $T = 4400 \times P$.



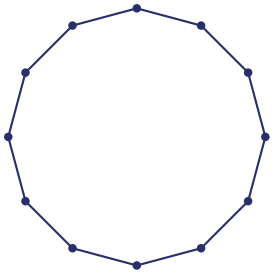

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật mà cả 4 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 100N + 1200$.



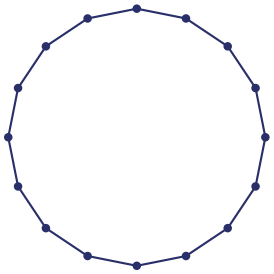
KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật. Tính $T = 66000 \times P + 1000$.



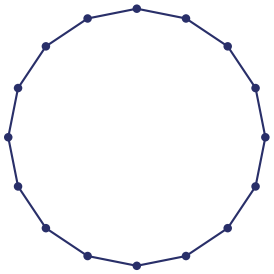
KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình vuông mà cả 4 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 500N + 1000$.



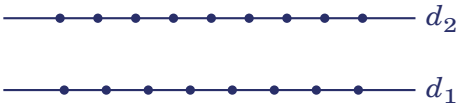
KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình vuông. Tính $T = 910000 \times P + 1000$.



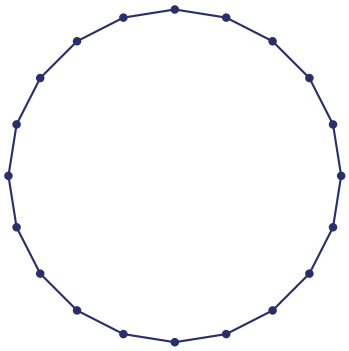
KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ có 8 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ có 9 điểm phân biệt. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh thuộc tập hợp 17 điểm nói trên. Tính $T = N + 1000$.



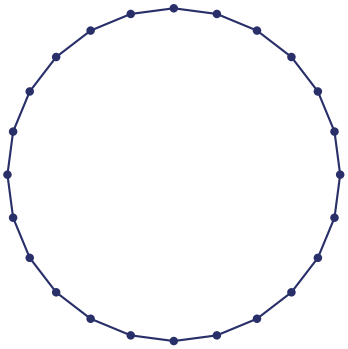

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp khác độ dài. Tính $T = 484500 \times P$.



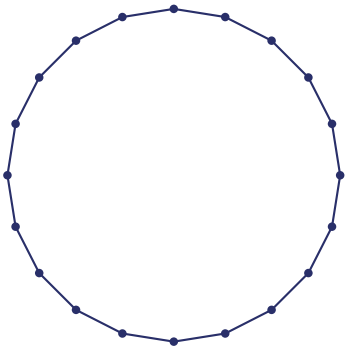
KẾT QUẢ

## Vận dụng



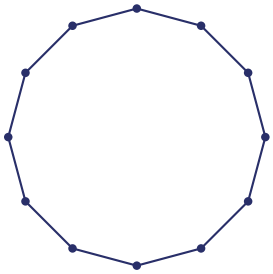
**Bài 9. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật mà cả 4 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 50N + 1200$.

KẾT QUẢ



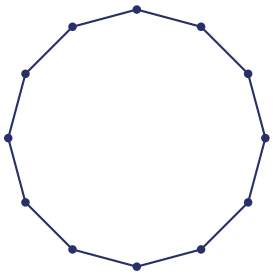
**Bài 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Tính $T = 323000 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ



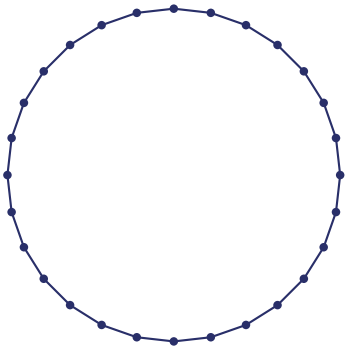
**Bài 11. TME** Cho một đa giác lồi gồm 12 đỉnh. Gọi $N$ là số tứ giác lồi mà cả 4 đỉnh là đỉnh của đa giác và có đúng ba cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 100N + 1200$.

KẾT QUẢ



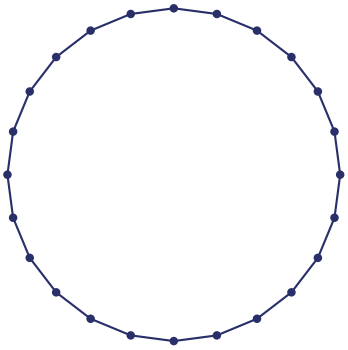
**Bài 12. TME** Cho một đa giác lồi gồm 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác lồi có đúng ba cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 33000 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ



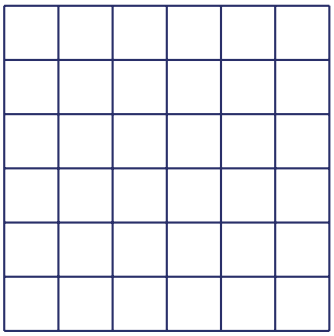
**Bài 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 28 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều nhưng không phải là hình vuông. Tính $T = 50N + 1800$.

**KẾT QUẢ**



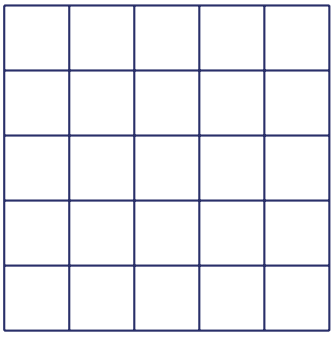
**Bài 14. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 24 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình vuông. Tính $T = 3542000 \times P + 1000$.

**KẾT QUẢ**



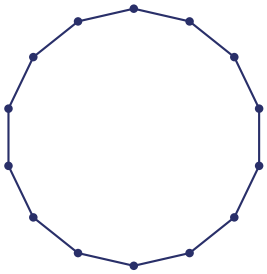
**Bài 15. TME** Trên mặt phẳng cho hệ gồm 7 đường thẳng nằm ngang song song cách đều nhau và hệ 7 đường thẳng đứng song song cách đều nhau, tạo thành lưới gồm 36 ô vuông nhỏ kích thước $1 \times 1$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật được tạo thành từ các đoạn thẳng của lưới ô vuông nói trên. Tính $T = 10N + 1590$.

**KẾT QUẢ**



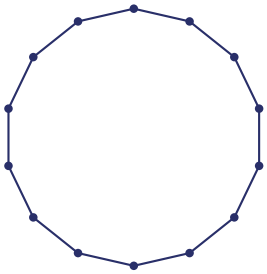
**Bài 16. TME** Một tấm bảng lưới ô vuông kích thước $5 \times 5$ được tạo bởi 6 đường kẻ ngang và 6 đường kẻ dọc. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật từ tập hợp tất cả các hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn là một hình vuông. Tính $T = 4500 \times P$.

**KẾT QUẢ**



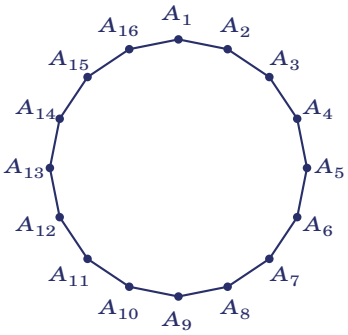
**Bài 17. TME** Cho một đa giác lồi gồm 14 đỉnh. Gọi $N$ là số tứ giác lồi mà cả 4 đỉnh là đỉnh của đa giác và cả bốn cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 10N + 1060$.

KẾT QUẢ



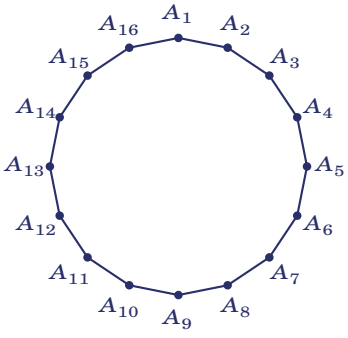
**Bài 18. TME** Cho một đa giác lồi gồm 14 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 14 đỉnh của đa giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác lồi không có cạnh nào là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 7150 \times P$.

KẾT QUẢ



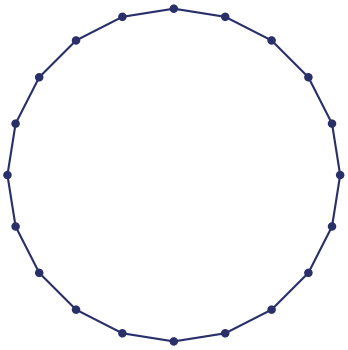

**Bài 19. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 16 theo chiều kim đồng hồ: $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh $A_i, A_j, A_k, A_l$ $(1 \le i < j < k < l \le 16)$ sao cho tổng bốn chỉ số $(i + j + k + l)$ là một số chẵn (tức chia hết cho 2). Tính $T = N + 1500$.

KẾT QUẢ



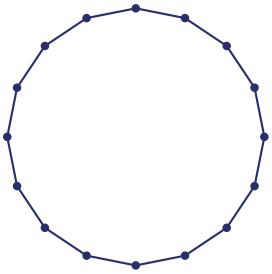

**Bài 20. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 16 theo chiều kim đồng hồ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn $A_i, A_j, A_k, A_l$ có tổng bốn chỉ số $(i + j + k + l)$ chia hết cho 3. Tính $T = 9100 \times P$.

KẾT QUẢ



**Bài 21. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều nhưng không phải là hình vuông. Tính $T = 100N + 1500$.

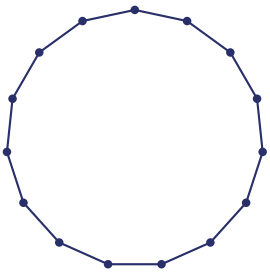
KẾT QUẢ



**Bài 22. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật nhưng không phải là hình vuông. Tính $T = 91000 \times P + 1000$.

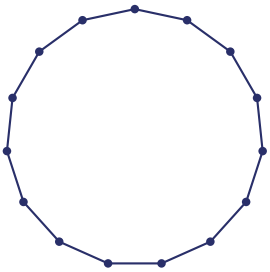
KẾT QUẢ

## Tổng hợp



**Bài 23. TME** Cho một đa giác lồi gồm 15 đỉnh. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác và có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 10N + 1250$.

KẾT QUẢ



**Bài 24. TME** Cho một đa giác lồi gồm 15 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác lồi có đúng một cạnh là cạnh của đa giác lồi đã cho. Tính $T = 9100 \times P$.

KẾT QUẢ

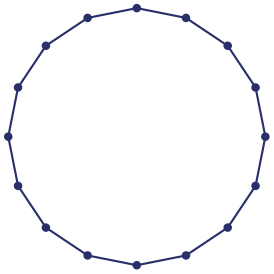
**Bài 25. TME** Trong mặt phẳng cho 20 điểm phân biệt, trong đó có đúng 6 điểm cùng nằm trên một đường thẳng $d$, ngoài ra không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Có bao nhiêu cách chọn 4 điểm từ 20 điểm trên để chúng có thể làm bốn đỉnh của một tứ giác đơn?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Trong mặt phẳng cho 16 điểm phân biệt, trong đó có đúng 5 điểm cùng nằm trên đường thẳng $d$, ngoài ra không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 điểm từ 16 điểm đã cho. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn có thể làm bốn đỉnh của một tứ giác đơn. Tính $T = 3640 \times P$.

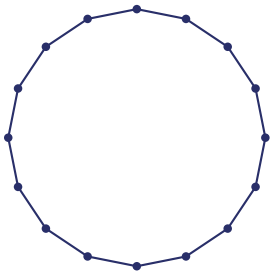
KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình thang cân mà 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều nhưng không phải là hình chữ nhật. Tính $T = 10N + 1640$.



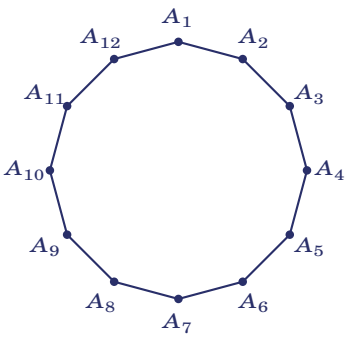
KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình thang cân (kể cả hình chữ nhật). Tính $T = 5000 \times P + 1000$.

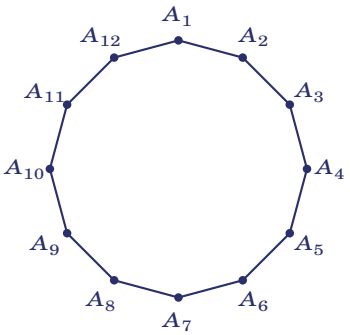


KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 12 theo chiều kim đồng hồ: $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh $A_i, A_j, A_k, A_l$ $(1 \le i < j < k < l \le 12)$ sao cho tổng bốn chỉ số $(i+j+k+l)$ chia hết cho 3. Tính $T = 10N + 1330$.

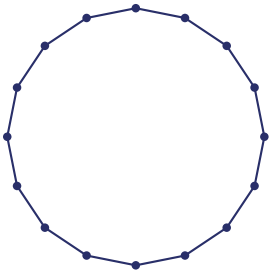



KẾT QUẢ



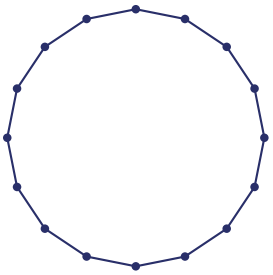

**Bài 30. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 12 theo chiều kim đồng hồ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn có tổng bốn chỉ số $(i+j+k+l)$ là số lẻ. Tính $T = 4950 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ



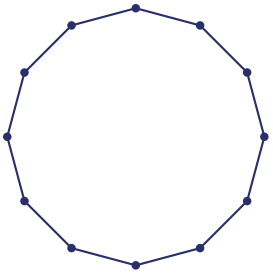
**Bài 31. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Gọi $N$ là số cách chọn ra 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều sao cho không có bất kỳ hai đỉnh nào kề nhau trên đường tròn. Tính $T = 10N + 1400$.

KẾT QUẢ



**Bài 32. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để trong 4 đỉnh được chọn không có bất kỳ hai đỉnh nào kề nhau trên đường tròn. Tính $T = 9100 \times P$.

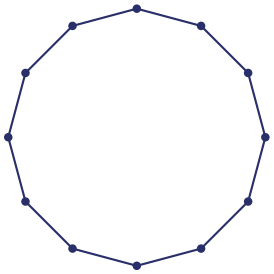
KẾT QUẢ



**Bài 33. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa đúng 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Gọi $N$ là số cách chọn ra 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều sao cho 4 đỉnh này chỉ phân bố trên đúng 2 hình vuông trong số 3 hình vuông nói trên (và mỗi hình vuông trong 2 hình vuông đó đều có ít nhất một đỉnh được chọn). Tính $T = 10N + 1960$.

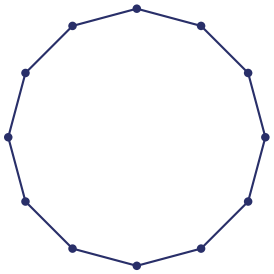
KẾT QUẢ

**Bài 34. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn phân bố trên cả ba hình vuông, trong đó hình vuông $V_1$ có đúng hai đỉnh được chọn. Tính $T = 9900 \times P$.



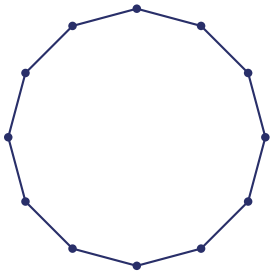
KẾT QUẢ

**Bài 35. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Người ta dùng 5 bóng đèn màu đỏ giống nhau và 7 bóng đèn màu xanh giống nhau để gắn vào 12 đỉnh (mỗi đỉnh gắn đúng 1 bóng). Gọi $N$ là số cách chọn 5 vị trí gắn bóng đèn màu đỏ sao cho mỗi hình vuông trong 3 hình vuông nói trên đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Tính $T = 10N + 1760$.



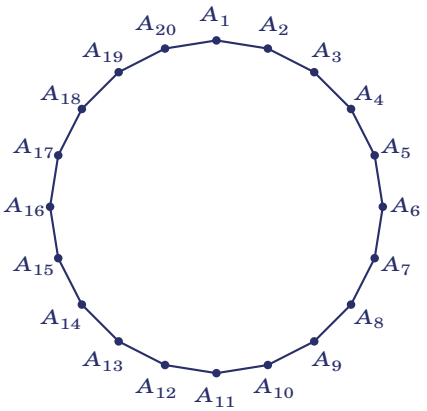
KẾT QUẢ

**Bài 36. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa đúng 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Người ta gắn ngẫu nhiên 4 bóng đèn màu đỏ giống nhau và 8 bóng đèn màu xanh giống nhau vào 12 đỉnh (mỗi đỉnh gắn đúng 1 bóng đèn). Gọi $P$ là xác suất để mỗi hình vuông trong 3 hình vuông nói trên đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Tính $T = 11000 \times P$.

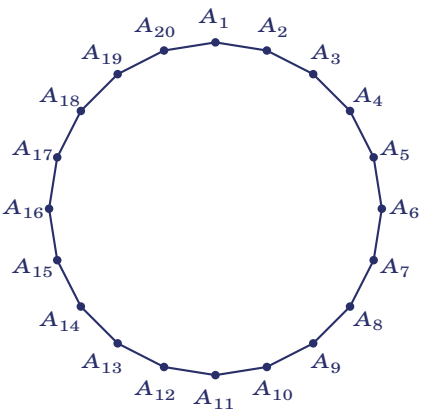


KẾT QUẢ

**Bài 37. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 20 theo chiều kim đồng hồ: $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh $A_i, A_j, A_k, A_l$ $(1 \le i < j < k < l \le 20)$ sao cho tổng bốn chỉ số $(i+j+k+l)$ chia hết cho 4. Tính $T = 2N + 1310$.

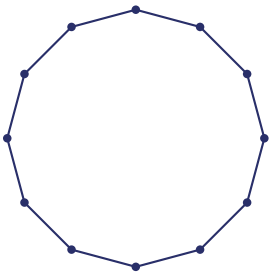



KẾT QUẢ



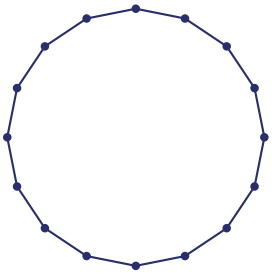

**Bài 38. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh được đánh số thứ tự từ 1 đến 20 theo chiều kim đồng hồ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn có tổng bốn chỉ số $(i+j+k+l)$ chia hết cho 5. Tính $T = 9690 \times P$.

KẾT QUẢ



**Bài 39. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa 3 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3$. Gọi $N$ là số cách chọn ra 5 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều sao cho trong 5 đỉnh được chọn có chứa trọn vẹn 4 đỉnh của đúng một hình vuông trong 3 hình vuông nói trên. Tính $T = 100N + 1600$.

KẾT QUẢ



**Bài 40. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn, chứa đúng 4 hình vuông rời nhau đôi một gồm $V_1, V_2, V_3, V_4$. Gắn ngẫu nhiên 5 bóng đèn LED màu đỏ giống nhau và 11 bóng đèn LED màu xanh giống nhau vào 16 đỉnh (mỗi đỉnh đúng 1 bóng đèn). Gọi $P$ là xác suất để mỗi hình vuông $V_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Tính $T = 9100 \times P$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Lưới ô vuông và điểm nguyên
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-15

# BUỔI 15. ĐẾM HÌNH TRÊN LƯỚI VÀ XÁC SUẤT HÌNH HỌC

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Đếm hình trên lưới ô vuông

– **Hình chữ nhật có cạnh theo lưới.** Trên lưới $m \times n$ ô, chọn hai trong $m+1$ đường ngang và hai trong $n+1$ đường dọc. Số hình là $C_{m+1}^2 C_{n+1}^2$.
– **Hình vuông.** Với hình vuông bao quanh có cạnh $k$ ô, có $(m-k+1)(n-k+1)$ vị trí đặt. Mỗi vị trí cho một hình vuông thẳng và $k-1$ hình vuông nghiêng. Vì vậy, trên lưới $n \times n$ ô, số hình vuông thẳng là $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, còn tổng số hình vuông là $\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.
– **Đoạn thẳng và hình thang.** Với đoạn nằm trên đường lưới, chọn hai nút cùng hàng hoặc cùng cột. Với hình thang có đáy ngang, chọn hai hàng, sau đó chọn hai đoạn đáy thỏa điều kiện về trung điểm hoặc cạnh bên.

### 2 Đường đi ngắn nhất và đường cấm

– Từ $(0,0)$ đến $(m,n)$, mỗi đường đi gồm $m$ bước sang phải và $n$ bước lên. Có $C_{m+n}^m$ cách. Muốn đi qua một nút, nhân số cách trên hai chặng. Muốn tránh nút đó, lấy tổng trừ số đường đi qua nút.
– **Phản xạ.** Để đếm đường từ $(0,0)$ đến $(n,n)$ không vượt $y=x$, đổi vai trò bước phải và bước lên ở đoạn đầu đến lần chạm $y=x+1$. Trừ số đường vi phạm, thu được số Catalan $\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^n$.
– Với nhiều điểm cấm hoặc biên phức tạp, điền số cách tới từng nút bằng tổng số cách tới nút bên trái và nút bên dưới. Gán 0 cho nút cấm.

### 3 Góc nội tiếp trong đa giác đều

– Góc chắn cung gồm $k$ cạnh của đa giác đều $n$ đỉnh có số đo $\dfrac{180^\circ k}{n}$. Luôn dùng cung không chứa đỉnh của góc.
– Với tam giác, gọi $a,b,c$ là số cạnh trên ba cung liên tiếp. Khi đó $a+b+c=n$ và ba góc tỉ lệ với $a,b,c$. Đếm theo cung và kiểm tra số lần mỗi tam giác được tính. Ví dụ, tam giác đều có ba góc $60^\circ$ nên xuất hiện ba lần nếu đánh dấu từng góc.
– Với tứ giác có bốn khoảng cung liên tiếp $a,b,c,d$, bốn góc theo thứ tự tương ứng với $b+c, c+d, d+a, a+b$. Hai góc đối luôn bù nhau.

### 4 Đếm điểm nguyên trong miền

– Cố định tung độ nguyên $y$, rồi tìm cận nguyên của hoành độ $x$ trên hàng đó. Cộng số điểm của từng hàng. Đọc kỹ dấu $<$ và $\le$ để xử lý biên.
– Nếu chọn đều trên tập hữu hạn, xác suất bằng số điểm thuận lợi chia số điểm của toàn miền.

### 5 Bước đi ngẫu nhiên và kim Buffon

– **Bước đi ngẫu nhiên.** Theo dõi vị trí sau mỗi lượt. Cộng xác suất từ các vị trí có thể đi đến điểm đang xét. Với biên hấp thụ, loại các nhánh đã ra khỏi miền ngay ở lượt đó.

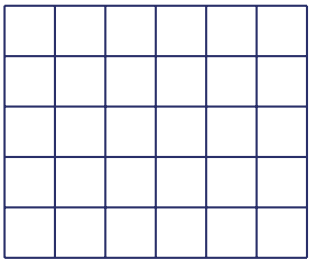

thuvientoanhoc.com

– **Kim trên lưới vuông.** Với cạnh ô $a$ và kim dài $\ell \le a$, đặt tâm đều trong một ô và hướng đều, độc lập với tâm. Điều kiện theo hướng $\theta$ cho hai xác suất cắt đường dọc và ngang lần lượt là $\frac{\ell|\cos\theta|}{a}$ và $\frac{\ell|\sin\theta|}{a}$. Lấy hợp hai biến cố rồi lấy trung bình theo góc, được $P = \frac{4\ell}{\pi a} - \frac{\ell^2}{\pi a^2}$.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

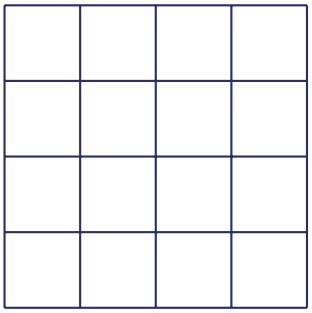
### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Một tấm bảng lưới ô vuông kích thước $5\times 6$ gồm 30 ô vuông nhỏ đơn vị, được tạo thành bởi 6 đường thẳng nằm ngang song song cách đều nhau và 7 đường thẳng đứng song song cách đều nhau. Gọi $N$ là số hình chữ nhật được tạo thành từ các đoạn thẳng của lưới ô vuông nói trên. Tính $T = 10N + 1200$.



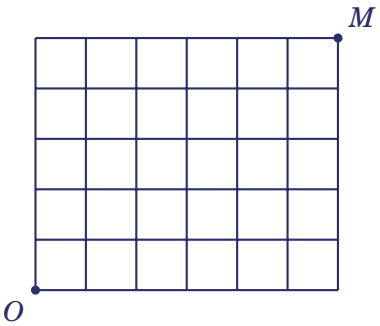
KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Cho một lưới ô vuông kích thước $4 \times 4$ gồm 16 ô vuông nhỏ đơn vị, được tạo bởi 5 đường kẻ ngang và 5 đường kẻ dọc. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn là một hình vuông (có các cạnh song song với đường lưới). Tính $T = 7000 \times P + 1000$.



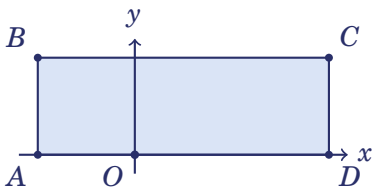
KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một chất điểm di chuyển từ gốc tọa độ $O(0,0)$ đến điểm $M(6,5)$ dọc theo các cạnh của các ô vuông đơn vị. Tại mỗi bước, chất điểm chỉ có thể di chuyển sang phải 1 đơn vị (từ $(x,y)$ sang $(x+1,y)$) hoặc di chuyển lên trên 1 đơn vị (từ $(x,y)$ sang $(x,y+1)$). Gọi $N$ là số đường đi ngắn nhất khác nhau từ $O$ đến $M$. Tính $T = 10N + 1500$.




KẾT QUẢ

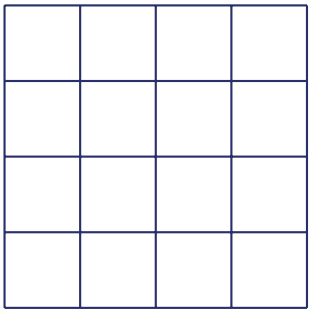
**Ví dụ 4. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các đỉnh $A(-2;0), B(-2;2), C(4;2), D(4;0)$. Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó (tính cả trên cạnh của hình chữ nhật) sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều là số nguyên). Biết rằng khả năng đáp xuống các điểm nguyên là như nhau, hãy tính xác suất $P$ để con châu chấu đáp xuống điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x+y<2$. Tính $T=7000\times P$.




KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Ví dụ 5. TME** Xét lưới điểm nguyên $S=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid 0\le x\le 4, 0\le y\le 4\}$ gồm 25 điểm tạo thành lưới ô vuông kích thước $4\times 4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình vuông (kể cả hình vuông có cạnh song song với các trục tọa độ và hình vuông nghiêng) có 4 đỉnh thuộc tập hợp $S$? Tính $T=50N+1500$, với $N$ là số hình vuông tìm được.



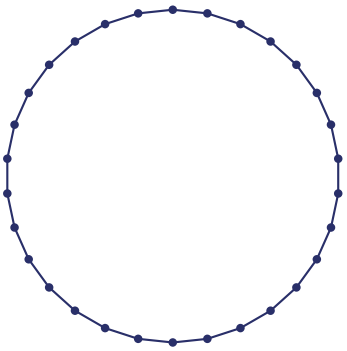
KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình chữ nhật $OMNP$ với các đỉnh $O(0;0), M(0;10), N(100;10)$ và $P(100;0)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với $x,y\in\mathbb{Z}$, nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x;y)$ thuộc tập hợp $S$. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn thỏa mãn điều kiện $x+y\le 90$. Tính $T=10100\times P$.

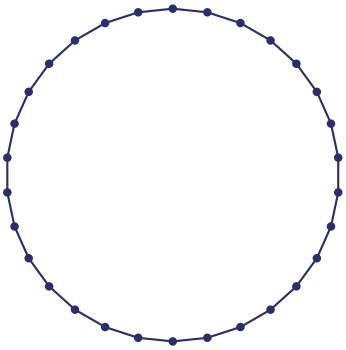



KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho và có ít nhất một góc bằng $60^\circ$. Tính $T=10N+1200$.

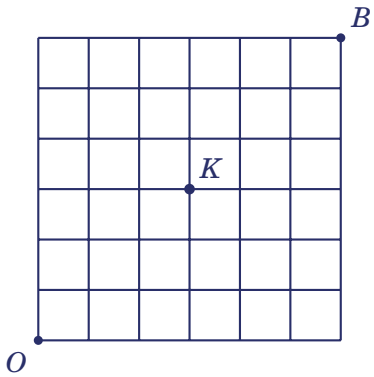


KẾT QUẢ



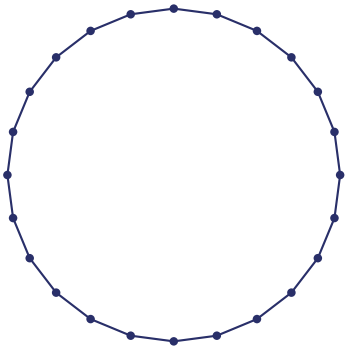
**Ví dụ 8. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 30 đỉnh của đa giác đều để tạo thành một tam giác. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có một góc lớn hơn $120°$. Tính $T = 20300 \times P$.

**KẾT QUẢ**




**Ví dụ 9. TME** Một mạng lưới giao thông ô vuông gồm các nút giao $(x,y)$ với $0 \le x \le 6$ và $0 \le y \le 6$. Một người đi từ gốc tọa độ $O(0,0)$ đến đích $B(6,6)$, mỗi bước chỉ đi sang phải 1 đơn vị hoặc lên trên 1 đơn vị. Biết rằng nút giao $K(3,3)$ đang bị cấm do sửa chữa đường nên người đó không thể đi qua $K$. Gọi $N$ là số đường đi ngắn nhất thỏa mãn yêu cầu. Tính $T = 10N + 1200$.

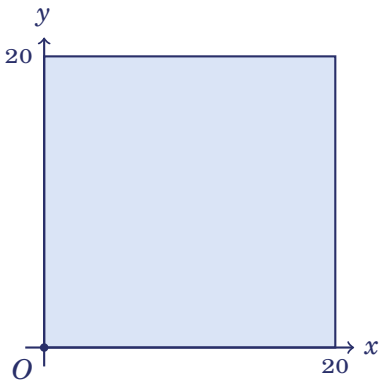
**KẾT QUẢ**



**Ví dụ 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 24 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có ít nhất một góc bằng $45°$. Tính $T = 25300 \times P$.

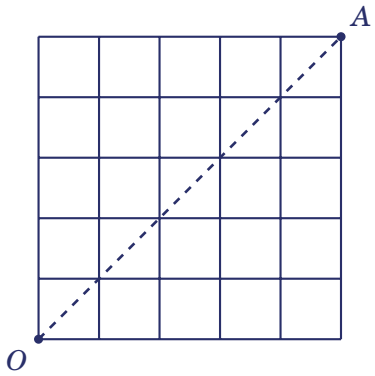
**KẾT QUẢ**

## Tổng hợp



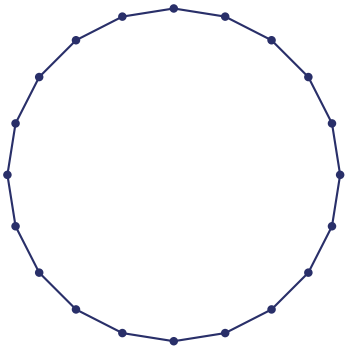

**Ví dụ 11. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp điểm $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le x \le 20, 0 \le y \le 20\}$ gồm 441 điểm nguyên trong hình vuông $[0,20] \times [0,20]$. Một con bọ nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm thuộc tập $S$. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn bất phương trình $2x + 3y \le 30$. Tính $T = 6300 \times P$.

KẾT QUẢ



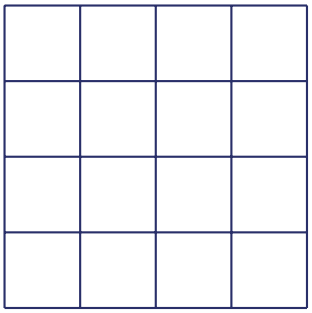

**Ví dụ 12. TME** Một chú kiến bò trên lưới ô vuông từ gốc tọa độ $O(0,0)$ đến điểm $A(5,5)$. Mỗi bước kiến chỉ bò sang phải 1 đơn vị hoặc lên trên 1 đơn vị. Biết rằng kiến không bao giờ bò vượt qua đường chéo $y = x$ (tức là tại mọi thời điểm $(x,y)$, luôn có $y \le x$). Gọi $N$ là số đường đi hợp lệ. Tính $T = 100N + 1800$.

KẾT QUẢ



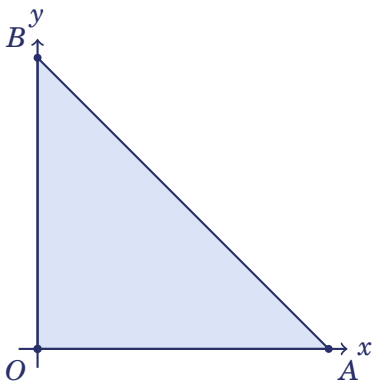
**Ví dụ 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều để tạo thành một tứ giác lồi. Gọi $P$ là xác suất để tứ giác tạo thành có hai đường chéo vuông góc với nhau tại tâm $O$ của đường tròn. Tính $T = 484500 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ



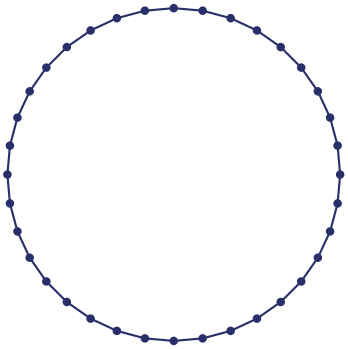
**Ví dụ 14. TME** Xét lưới điểm nguyên kích thước $4 \times 4$ ô vuông (gồm $5 \times 5 = 25$ điểm nút). Gọi $N$ là số hình thang cân có 4 đỉnh thuộc tập hợp 25 điểm nút nói trên và có các cạnh đáy song song với trục $Ox$ hoặc $Oy$ (không tính hình chữ nhật). Tính $T = 10N + 1500$.

**KẾT QUẢ**



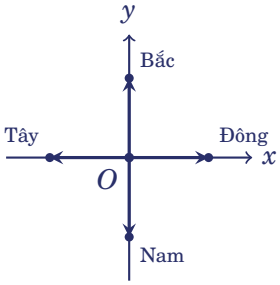

**Ví dụ 15. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét miền tam giác vuông cân $OAB$ với $O(0,0), A(30,0), B(0,30)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các điểm nguyên $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ thuộc miền tam giác (tức $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \leq 30$). Lấy ngẫu nhiên một điểm từ tập $S$. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn thỏa mãn $x \geq 5, y \geq 5$ và $x + y \leq 20$. Tính $T = 24800 \times P$.

**KẾT QUẢ**



**Ví dụ 16. TME** Cho một đa giác đều gồm 36 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác vuông có một góc bằng $30°$ và một góc bằng $60°$ mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1200$.

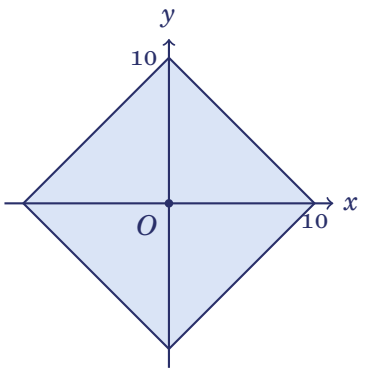
**KẾT QUẢ**




**Ví dụ 17. TME** Một chú ếch bắt đầu tại gốc tọa độ $O(0,0)$ trên mặt phẳng. Chú ếch thực hiện liên tiếp 4 bước nhảy, mỗi bước nhảy có độ dài đúng 1 đơn vị theo một trong 4 hướng: Đông $(+1,0)$, Tây $(-1,0)$, Nam $(0,-1)$, Bắc $(0,+1)$ với xác suất chọn mỗi hướng là $\frac{1}{4}$ và các bước nhảy là độc lập nhau. Gọi $P$ là xác suất để sau đúng 4 bước nhảy, chú ếch quay trở về đúng vị trí xuất phát $O(0,0)$. Tính $T = 64000 \times P$.

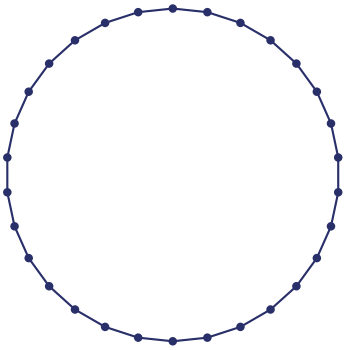
**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 18. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét miền hình thoi $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 10\}$. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống các điểm có tọa độ nguyên thuộc miền $D$. Gọi $N$ là số điểm nguyên $M(x;y) \in D$ thỏa mãn điều kiện tích hoành độ và tung độ $x \cdot y \ge 0$ và $|x| + |y| \ge 4$. Tính $T = 10N + 1600$.




KẾT QUẢ

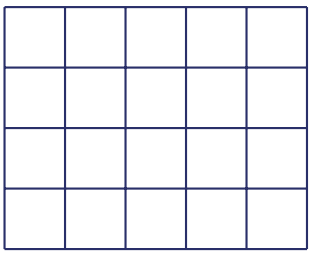
**Ví dụ 19. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 30 đỉnh của đa giác đều để tạo thành một tam giác. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành là tam giác nhọn (tất cả các góc đều nhỏ hơn 90°) đồng thời không có bất kỳ góc nào nhỏ hơn 30°. Tính $T = 58000 \times P$.



KẾT QUẢ

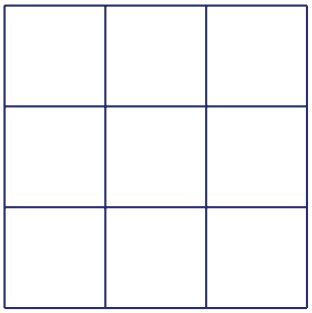
## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận dạng



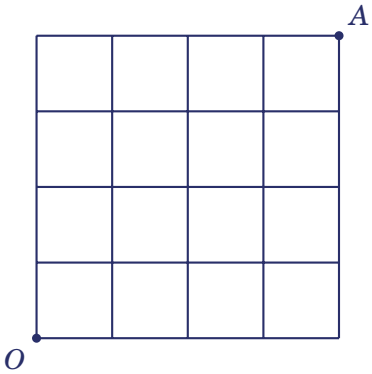
**Bài 1. TME** Cho một tấm lưới ô vuông kích thước $4 \times 5$ ô vuông đơn vị, được tạo thành bởi 5 đường kẻ ngang song song và 6 đường kẻ dọc song song. Gọi $N$ là số hình chữ nhật được tạo thành từ các đoạn thẳng của đường lưới. Tính $T = 10N + 1200$.

KẾT QUẢ



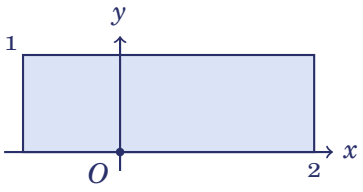
**Bài 2. TME** Cho một lưới ô vuông kích thước $3 \times 3$ gồm 9 ô vuông nhỏ đơn vị (tạo bởi 4 đường kẻ ngang và 4 đường kẻ dọc). Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn là một hình vuông thẳng. Tính $T = 3600 \times P$.

KẾT QUẢ




**Bài 3. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, một chất điểm di chuyển từ gốc tọa độ $O(0,0)$ đến điểm $A(4,4)$ dọc theo các cạnh của lưới ô vuông đơn vị (chỉ đi sang phải hoặc lên trên). Gọi $N$ là số đường đi ngắn nhất khác nhau. Tính $T = 50N + 1500$.

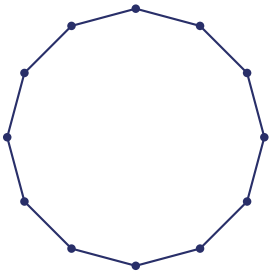
KẾT QUẢ




**Bài 4. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét miền hình chữ nhật giới hạn bởi $-1 \le x \le 2$ và $0 \le y \le 1$ gồm 8 điểm nguyên. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên trong miền đó. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn điều kiện $x + y < 1$. Tính $T = 8000 \times P$.

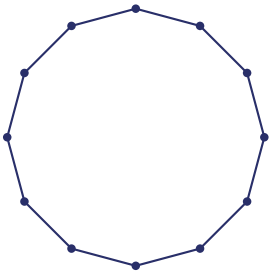
KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác vuông mà cả 3 đỉnh đều là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 50N + 1000$.



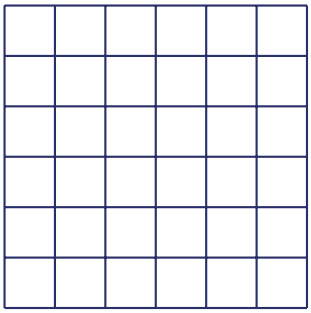
KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Cho một đa giác đều gồm 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 12 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông. Tính $T = 4400 \times P$.



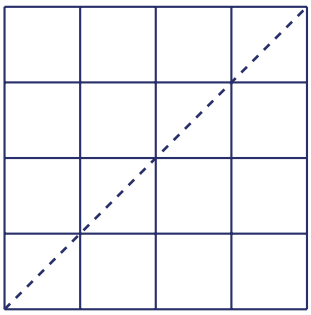
KẾT QUẢ

**Bài 7. TME** Trên lưới ô vuông kích thước $6 \times 6$ (gồm 7 đường ngang và 7 đường dọc), hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nằm hoàn toàn trên các đường lưới mà hai đầu mút là hai điểm nút của lưới? Tính $T = 10N + 1060$, với $N$ là số đoạn thẳng tìm được.



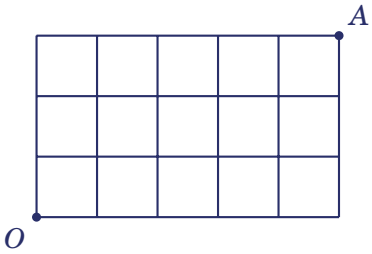
KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Xét tập hợp 25 điểm nguyên trong hình vuông $[0,4] \times [0,4]$. Chọn ngẫu nhiên một điểm $M(x;y)$ từ tập hợp 25 điểm này. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn nằm trên đường thẳng $y = x$. Tính $T = 5000 \times P + 1000$.



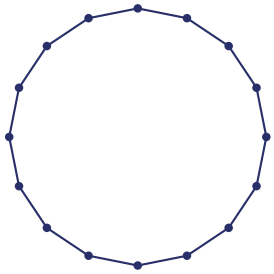
KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một con kiến bò trên lưới ô vuông từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(5,3)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên 1 đơn vị. Gọi $N$ là số đường đi khác nhau. Tính $T = 50N + 1200$.



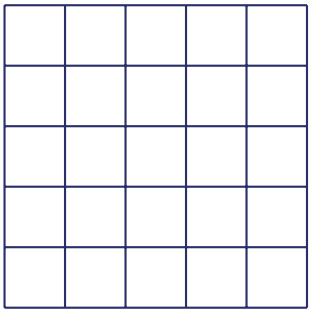

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông. Tính $T = 5000 \times P + 1000$.



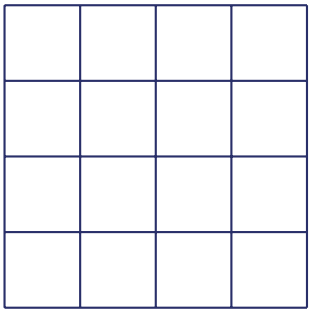
KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một lưới ô vuông kích thước $5 \times 5$ có bao nhiêu ô vuông nhỏ kích thước $1 \times 1$? Tính $T = 100N + 1500$, với $N$ là số ô vuông tìm được.



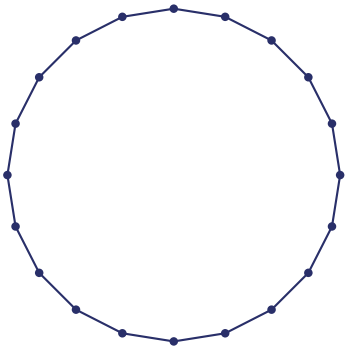
KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Xét lưới gồm 25 điểm nút nguyên của hình vuông $4 \times 4$ ô vuông. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 điểm nút phân biệt. Gọi $P$ là xác suất để khoảng cách giữa hai điểm được chọn đúng bằng 1 đơn vị. Tính $T = 15000 \times P$.



KẾT QUẢ

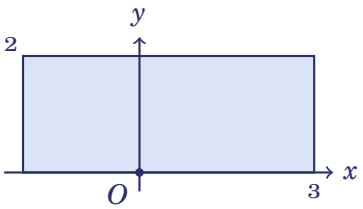
**Bài 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều. Tính $T = 100N + 1500$.



KẾT QUẢ

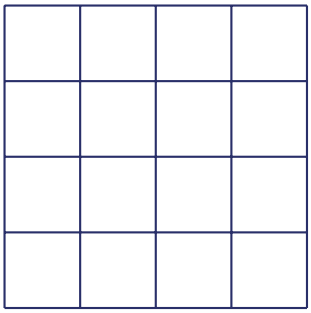
## Vận dụng

**Bài 14. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét hình chữ nhật giới hạn bởi $-2 \le x \le 3$ và $0 \le y \le 2$ gồm 18 điểm nguyên. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên trong miền đó. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn $x+y<2$. Tính $T = 4000 \times P$.




KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Xét lưới ô vuông kích thước $4 \times 4$ (gồm 25 điểm nút). Gọi $N$ là số hình vuông nghiêng (các cạnh không song song với các trục tọa độ) mà cả 4 đỉnh đều là điểm nút của lưới. Tính $T = 100N + 1000$.

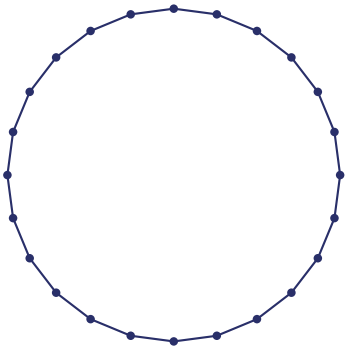


KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Xét tập hợp tất cả các điểm nguyên $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ thuộc hình chữ nhật $[0,50] \times [0,10]$. Lấy ngẫu nhiên một điểm. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn thỏa mãn bất phương trình $x+y \le 40$. Tính $T = 1700 \times P$.

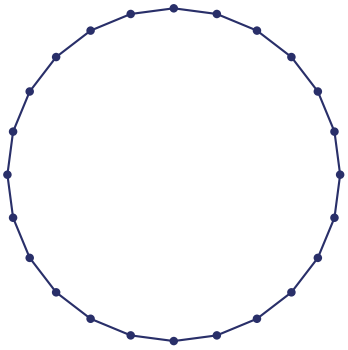



KẾT QUẢ



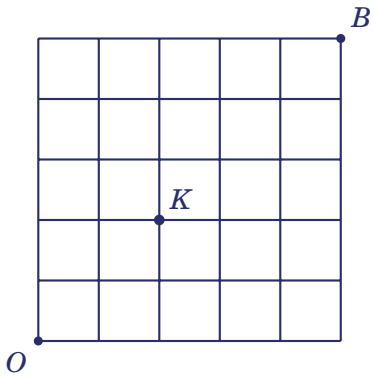
**Bài 17. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có đúng một góc bằng $60^\circ$. Tính $T = 10N + 1840$.

**KẾT QUẢ**



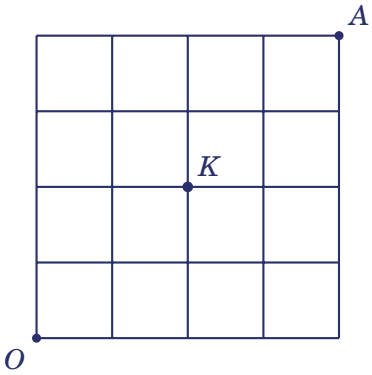
**Bài 18. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 24 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác đều. Tính $T = 253000 \times P + 1000$.

**KẾT QUẢ**



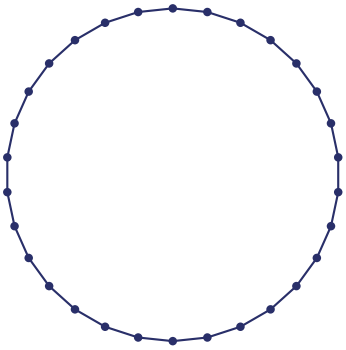

**Bài 19. TME** Một chất điểm di chuyển từ $O(0,0)$ đến $B(5,5)$ trên lưới ô vuông (chỉ đi sang phải hoặc lên trên). Gọi $N$ là số đường đi ngắn nhất bắt buộc đi qua điểm trung gian $K(2,2)$. Tính $T = 50N + 1000$.

**KẾT QUẢ**



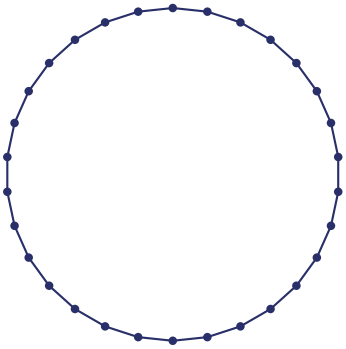

**Bài 20. TME** Một chất điểm di chuyển ngẫu nhiên theo đường đi ngắn nhất từ $(0,0)$ đến $(4,4)$ trên lưới ô vuông. Gọi $P$ là xác suất để chất điểm đi qua điểm $(2,2)$. Tính $T = 3500 \times P$.

KẾT QUẢ



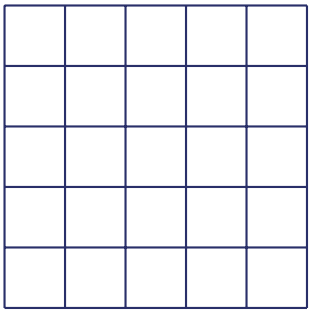
**Bài 21. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều và có một góc lớn hơn $120°$?

KẾT QUẢ



**Bài 22. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 30 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có một góc lớn hơn $120°$. Tính $T = 20300 \times P$.

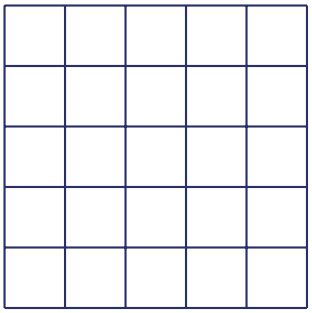
KẾT QUẢ



**Bài 23. TME** Một lưới ô vuông kích thước $5 \times 5$ (tạo bởi 6 đường kẻ ngang và 6 đường kẻ dọc) có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới? Tính $T = 10N + 1750$, với $N$ là số hình chữ nhật tìm được.

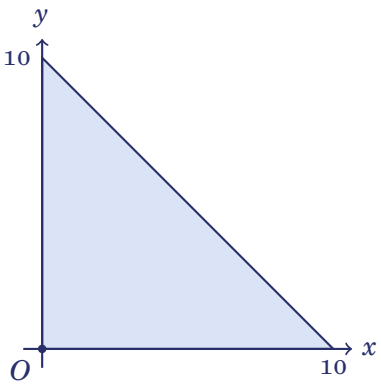
KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com



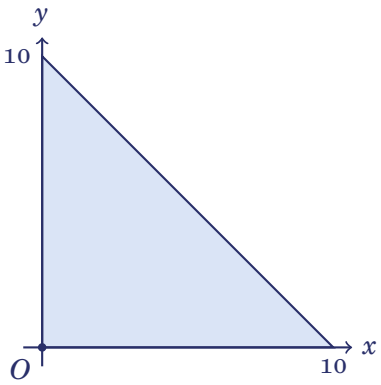
**Bài 24. TME** Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới của bảng $5 \times 5$. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn là một hình vuông thẳng. Tính $T = 4500 \times P$.

**KẾT QUẢ**



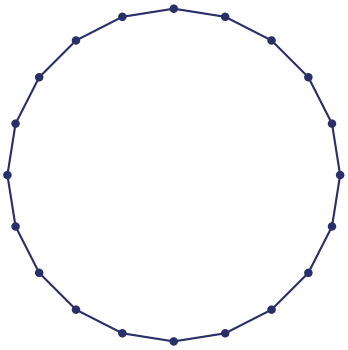

**Bài 25. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét miền tam giác $OAB$ xác định bởi $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \leq 10$. Gọi $N$ là số điểm có tọa độ nguyên $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ thuộc miền tam giác đó. Tính $T = 50N + 1700$.

**KẾT QUẢ**



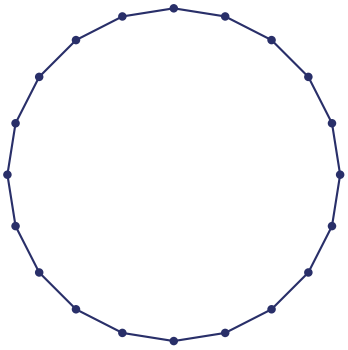

**Bài 26. TME** Lấy ngẫu nhiên một điểm nguyên thuộc miền tam giác $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10$. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn thỏa mãn $x + y \leq 5$. Tính $T = 4400 \times P + 1000$.

**KẾT QUẢ**



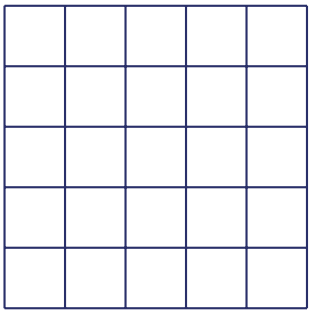
**Bài 27. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác tù mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1800$.

KẾT QUẢ



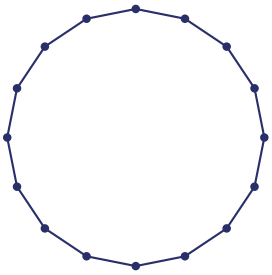
**Bài 28. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 20 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành là một tam giác tù. Tính $T = 9500 \times P$.

KẾT QUẢ



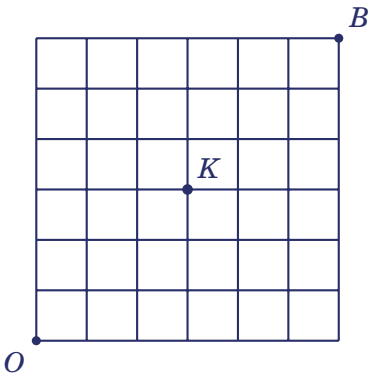
**Bài 29. TME** Xét lưới ô vuông kích thước $5 \times 5$ ô vuông. Gọi $N$ là số hình vuông nghiêng mà 4 đỉnh là các điểm nút của lưới và có diện tích đúng bằng 5 đơn vị diện tích. Tính $T = 100N + 1200$.

KẾT QUẢ



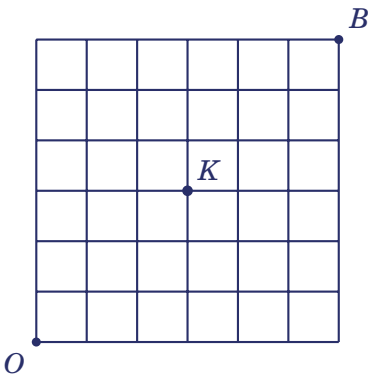
**Bài 30. TME** Cho một đa giác đều gồm 16 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh từ 16 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật. Tính $T = 65000 \times P + 1000$.

KẾT QUẢ



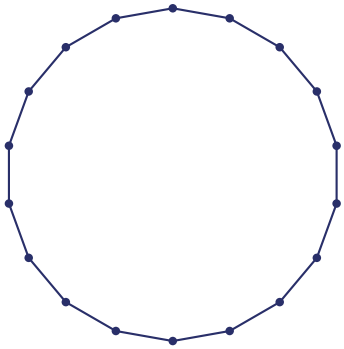

**Bài 31. TME** Một người đi từ $(0,0)$ đến $(6,6)$ trên lưới ô vuông (chỉ đi sang phải hoặc lên trên). Biết không thể đi qua trạm sửa chữa $K(3,3)$. Gọi $N$ là số đường đi ngắn nhất thỏa mãn. Tính $T = 10N + 1200$.

**KẾT QUẢ**



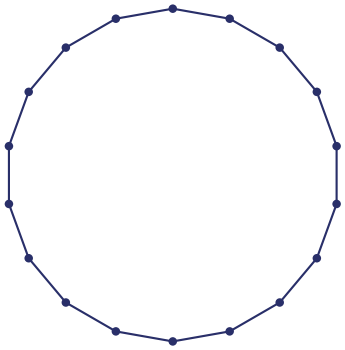

**Bài 32. TME** Một người đi ngẫu nhiên theo đường đi ngắn nhất từ $(0,0)$ đến $(6,6)$ trên lưới ô vuông. Gọi $P$ là xác suất để đường đi không đi qua điểm $K(3,3)$. Tính $T = 4620 \times P$.

**KẾT QUẢ**



**Bài 33. TME** Cho một đa giác đều gồm 18 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác cân (kể cả tam giác đều) mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T = 10N + 1680$.

**KẾT QUẢ**



**Bài 34. TME** Cho một đa giác đều gồm 18 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 18 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác cân. Tính $T = 6800 \times P$.

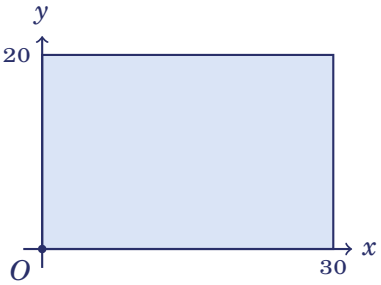
KẾT QUẢ




**Bài 35. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét miền hình chữ nhật giới hạn bởi $0 \le x \le 20$ và $0 \le y \le 10$ gồm 231 điểm nguyên. Gọi $N$ là số điểm nguyên thỏa mãn bất phương trình $x + 2y \le 20$. Tính $T = 10N + 1790$.

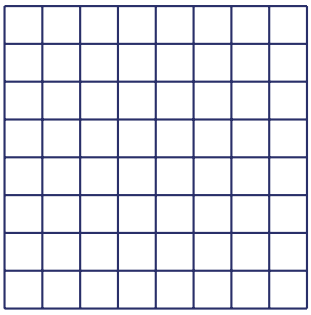
KẾT QUẢ

## Tổng hợp



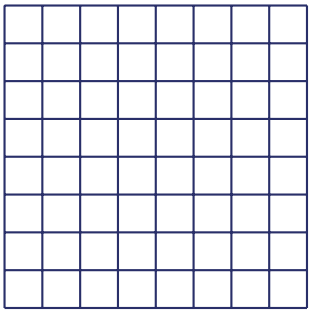

**Bài 36. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp 651 điểm nguyên trong hình chữ nhật $[0, 30] \times [0, 20]$. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn $x + 2y \le 30$. Tính $T = 6510 \times P$.

KẾT QUẢ



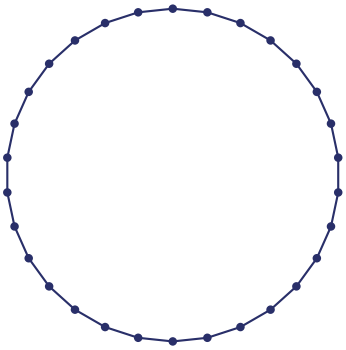
**Bài 37. TME** Xét lưới ô vuông kích thước $8 \times 8$ ô vuông của bàn cờ vua tiêu chuẩn (gồm 81 điểm nút). Hỏi có tất cả bao nhiêu hình vuông (kể cả hình vuông có cạnh song song lưới và hình vuông nghiêng) có 4 đỉnh là điểm nút của bàn cờ? Tính $T = 10N + 1600$, với $N$ là số hình vuông tìm được.

KẾT QUẢ



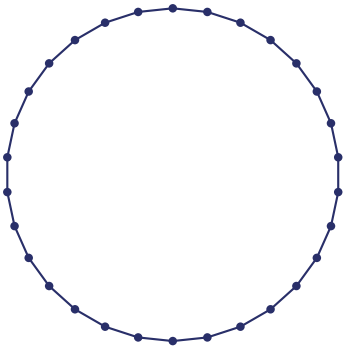
**Bài 38. TME** Bàn cờ vua kích thước $8 \times 8$ có tất cả 1296 hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật từ 1296 hình này. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn là một hình vuông thẳng. Tính $T = 10800 \times P$.

KẾT QUẢ



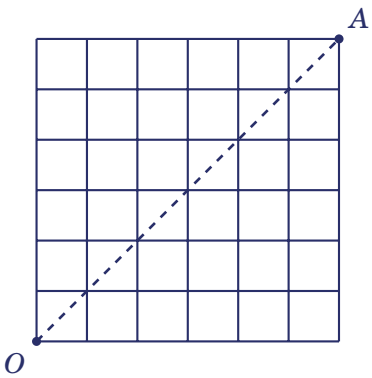
**Bài 39. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều và có ít nhất một góc bằng $36°$. Tính $T = 10N + 1400$.

KẾT QUẢ



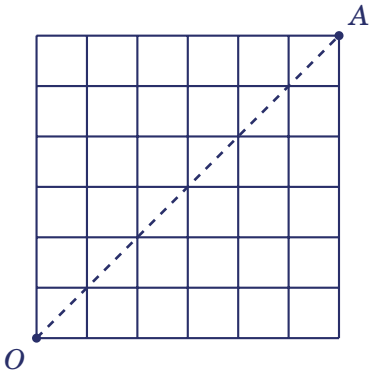
**Bài 40. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 30 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có ít nhất một góc bằng $36°$. Tính $T = 20300 \times P$.

KẾT QUẢ



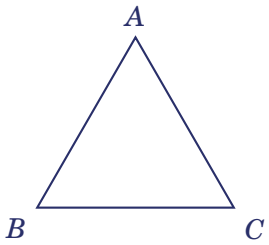

**Bài 41. TME** Một chất điểm di chuyển từ $(0, 0)$ đến $(6, 6)$ trên lưới ô vuông (chỉ đi sang phải hoặc lên trên). Biết chất điểm không bao giờ vượt qua đường chéo $y = x$ (luôn có $y \leq x$). Gọi $N$ là số đường đi thỏa mãn. Tính $T = 50N + 1400$.

KẾT QUẢ



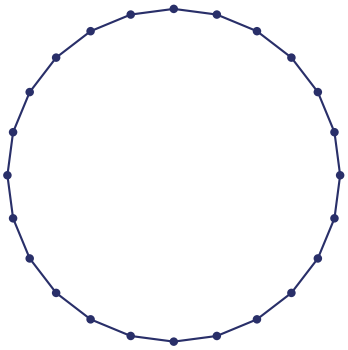

**Bài 42. TME** Chọn ngẫu nhiên một đường đi ngắn nhất từ $(0,0)$ đến $(6,6)$ trên lưới ô vuông. Gọi $P$ là xác suất để đường đi không bao giờ vượt qua đường chéo $y=x$. Tính $T=7000\times P$.

KẾT QUẢ



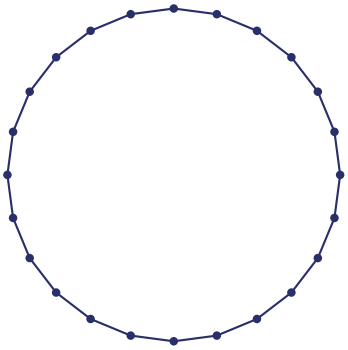

**Bài 43. TME** Một chú ếch ở đỉnh $A$ của một tam giác đều $ABC$. Mỗi bước, chú ếch nhảy sang một trong hai đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau là $\frac{1}{2}$. Gọi $P$ là xác suất để sau đúng 4 bước nhảy, chú ếch quay trở lại đỉnh $A$. Tính $T=27000\times P$.

KẾT QUẢ



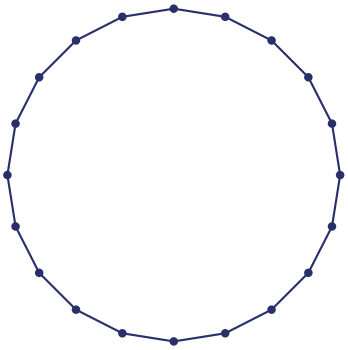
**Bài 44. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số hình chữ nhật có góc giữa hai đường chéo bằng $60^\circ$ mà cả 4 đỉnh đều là đỉnh của đa giác đều đã cho. Tính $T=100N+1200$.

KẾT QUẢ



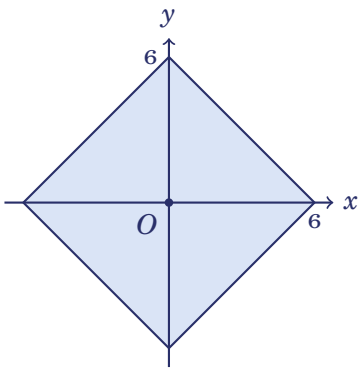
**Bài 45. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trong số tất cả các hình chữ nhật có đỉnh là đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để hình chữ nhật được chọn có góc giữa hai đường chéo bằng $60^\circ$. Tính $T=11000\times P$.

KẾT QUẢ



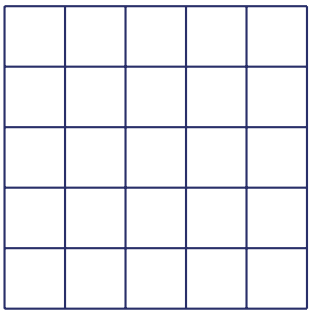
**Bài 46. TME** Cho một đa giác đều gồm 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có ít nhất một góc bằng $36°$. Tính $T = 10N + 1600$.

**KẾT QUẢ**



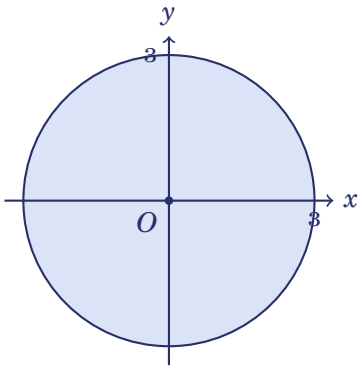

**Bài 47. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp 85 điểm nguyên trong miền hình thoi $|x| + |y| \leq 6$. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên trong miền đó. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn $|x| + |y| \leq 3$. Tính $T = 17000 \times P$.

**KẾT QUẢ**



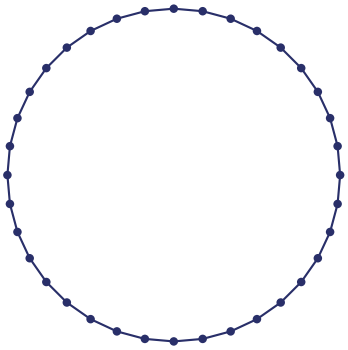
**Bài 48. TME** Xét lưới gồm 36 điểm nút của hình vuông kích thước $5 \times 5$ ô vuông. Gọi $N$ là số hình thang vuông có 4 đỉnh là điểm nút của lưới và có các cạnh đáy song song với trục $Ox$. Tính $T = 10N + 1200$.

**KẾT QUẢ**



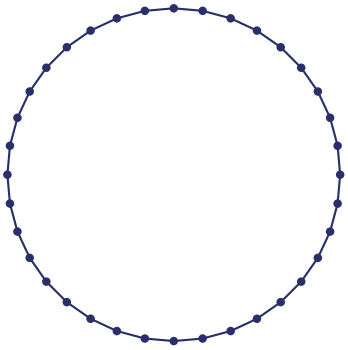

**Bài 49. TME** Xét tập hợp 49 điểm nguyên trong hình vuông $[-3, 3] \times [-3, 3]$. Lấy ngẫu nhiên một điểm. Gọi $P$ là xác suất để điểm được chọn nằm bên trong hoặc trên đường tròn $x^2 + y^2 \leq 9$. Tính $T = 4900 \times P$.

**KẾT QUẢ**



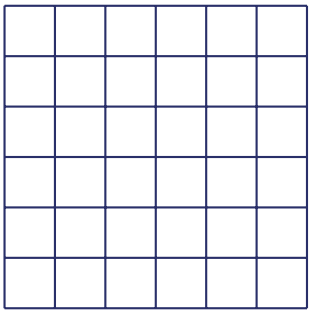
**Bài 50. TME** Cho một đa giác đều gồm 36 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác mà 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có 3 góc tỉ lệ với $1:2:3$ (tức các góc lần lượt là $30°, 60°, 90°$). Tính $T = 10N + 1840$.

KẾT QUẢ



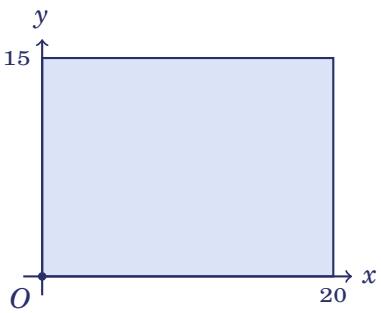
**Bài 51. TME** Cho một đa giác đều gồm 36 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 36 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có 3 góc tỉ lệ với $1:2:3$. Tính $T = 59500 \times P$.

KẾT QUẢ



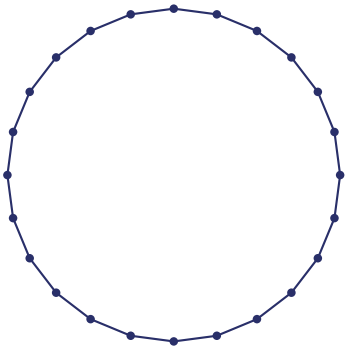
**Bài 52. TME** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét tập hợp các điểm nút của lưới ô vuông kích thước $6 \times 6$ ô vuông. Gọi $N$ là số hình bình hành có các đỉnh là điểm nút của lưới nhưng không phải là hình chữ nhật. Tính $N$.

KẾT QUẢ



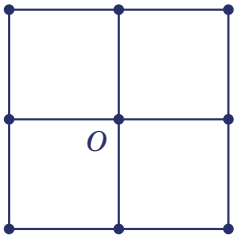

**Bài 53. TME** Xét tập hợp 336 điểm nguyên trong hình chữ nhật $[0, 20] \times [0, 15]$. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống thỏa mãn $3x + 4y \leq 60$. Tính $T = 5600 \times P$.

KẾT QUẢ



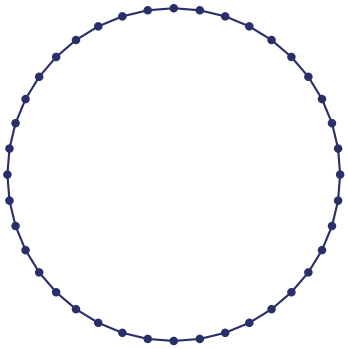
**Bài 54. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có ít nhất một góc nội tiếp bằng $60°$. Tính $T = 10N + 1200$.

**KẾT QUẢ**



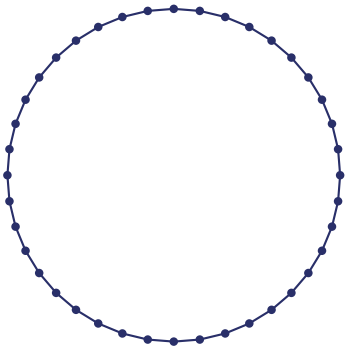

**Bài 55. TME** Một chú ếch bắt đầu ở tâm lá sen $(0, 0)$ của một cái ao hình vuông gồm 9 lá sen xếp thành lưới $3 \times 3$ với tọa độ các lá sen thuộc $\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$. Tại mỗi bước, chú ếch nhảy sang một đơn vị theo một trong bốn hướng Đông, Tây, Nam, Bắc với xác suất $\frac{1}{4}$. Nếu nhảy ra khỏi lưới $3 \times 3$ thì chú ếch rơi xuống nước và dừng lại. Gọi $P$ là xác suất để sau đúng 4 bước nhảy, chú ếch vẫn an toàn nằm trên một lá sen trong ao (không bị rơi xuống nước). Tính $T = 16000 \times P$.

**KẾT QUẢ**



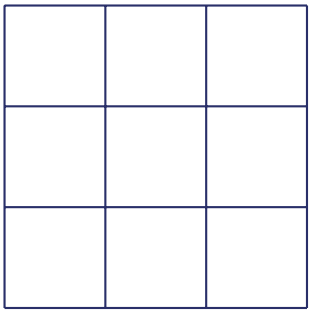
**Bài 56. TME** Cho một đa giác đều gồm 40 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho và có một góc lớn hơn $150°$. Tính $T = 10N + 1400$.

**KẾT QUẢ**



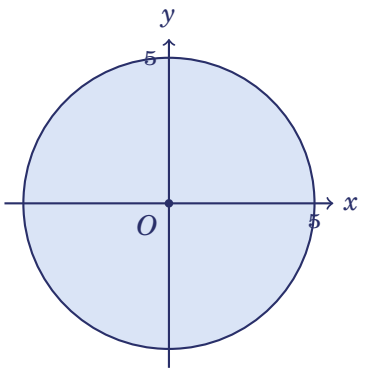
**Bài 57. TME** Cho một đa giác đều gồm 40 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh từ 40 đỉnh của đa giác đều. Gọi $P$ là xác suất để tam giác tạo thành có một góc lớn hơn $150°$. Tính $T = 24700 \times P$.

**KẾT QUẢ**



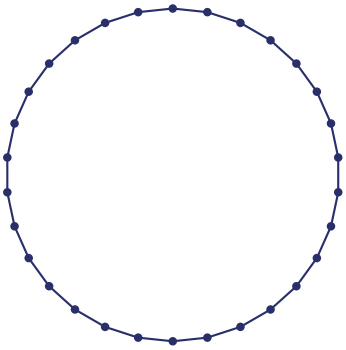
**Bài 58. TME** Một lưới ô vuông kích thước $3\times3$ gồm 9 ô vuông nhỏ. Người ta tô mỗi ô vuông bằng một trong 2 màu (đỏ hoặc xanh). Gọi $N$ là số cách tô màu sao cho không có 4 ô vuông nào ở 4 góc của một hình chữ nhật có cùng màu đỏ. Tính $T = 10N + 1500$.

**KẾT QUẢ**



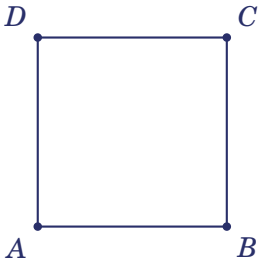

**Bài 59. TME** Xét tập hợp 121 điểm nguyên trong hình vuông $[-5,5]\times[-5,5]$. Một con châu chấu nhảy ngẫu nhiên đáp xuống một điểm nguyên. Gọi $P$ là xác suất để điểm đáp xuống nằm bên trong hoặc trên đường tròn $x^2+y^2\le 25$. Tính $T = 12100\times P$.

**KẾT QUẢ**



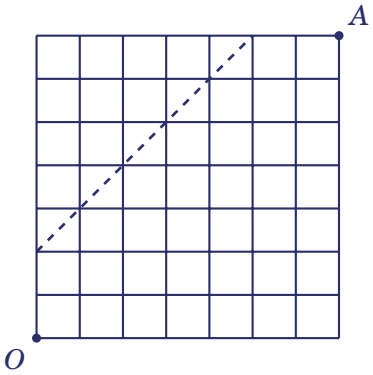
**Bài 60. TME** Cho một đa giác đều gồm 30 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tam giác nhọn mà cả 3 đỉnh đều là đỉnh của đa giác đều và cả ba góc nội tiếp đều có số đo là bội số nguyên của $12^\circ$. Tính $T = 20N + 1000$.

**KẾT QUẢ**



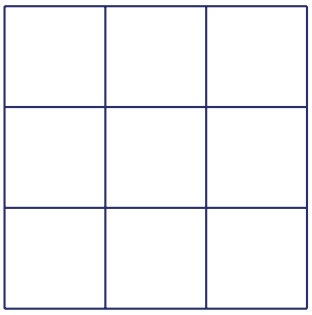

**Bài 61. TME** Một chú ếch bắt đầu ở đỉnh $A$ của hình vuông $ABCD$. Mỗi bước chú ếch nhảy sang một trong hai đỉnh kề với xác suất bằng nhau là $\frac{1}{2}$. Gọi $P$ là xác suất để sau đúng 6 bước nhảy, chú ếch dừng chân tại đỉnh đối diện $C$. Tính $T = 6400\times P$.

**KẾT QUẢ**



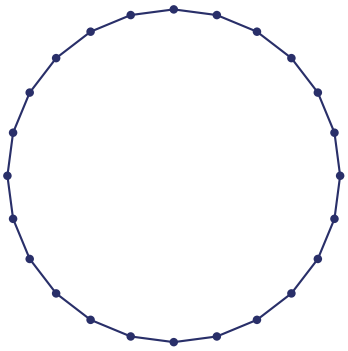

**Bài 62. TME** Một chất điểm di chuyển từ $(0,0)$ đến $(7,7)$ trên lưới ô vuông (chỉ đi sang phải hoặc lên trên). Gọi $N$ là số đường đi không bao giờ chạm vào đường thẳng $y = x + 2$. Tính $T = 10N + 1500$.

**KẾT QUẢ**



**Bài 63. TME** Thả một đoạn thẳng dài bằng nửa cạnh ô lên lưới ô vuông. Tâm đoạn phân bố đều trong một ô và hướng đoạn phân bố đều, độc lập với tâm. Gọi $P$ là xác suất đoạn thẳng cắt ít nhất một đường lưới. Tính $T = 10000P$ và làm tròn đến hàng đơn vị.

**KẾT QUẢ**



**Bài 64. TME** Cho một đa giác đều gồm 24 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm $O$. Gọi $N$ là số tứ giác lồi nội tiếp có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đều sao cho số đo 4 góc nội tiếp của tứ giác (xếp theo thứ tự tăng dần) tạo thành một cấp số cộng với công sai $d = 15°$. Tính $T = 10N + 1560$.

**KẾT QUẢ**

**HẾT**

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Định vị hình học nâng cao
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-16

# BUỔI 16. ĐỊNH VỊ HÌNH HỌC NÂNG CAO

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Các cấu hình có ô giao

– Nếu các đường qua tâm đều phải chứa cùng một số và mỗi số chỉ được dùng một lần, số đó nằm ở ô tâm. Trừ giá trị ô tâm khỏi tổng trên từng đường để đưa bài toán về ghép các cặp có cùng tổng.
– Với một tổng cố định, mỗi số chỉ ghép được với một số khác, nên các cặp phân biệt tự động rời nhau. Nếu có $m$ cặp và $k$ đường qua tâm, số cách là $C_m^k k!2^k$. Cộng theo các tổng có thể.
– **Chữ V, chữ T và hình thoi.** Sau khi bỏ ô chung, mỗi đường còn một cặp. Hai cặp phải có cùng tổng, nên mỗi bộ hai cặp cho $2! \cdot 2^2 = 8$ cách xếp.
– **Chữ H.** Gọi $u, v$ là hai ô giữa cột và $w$ là ô giữa thanh ngang. Chọn trước ba số này. Tổng chung là $S = u + v + w$. Hai cặp đầu mút của cột trái và cột phải phải có tổng lần lượt là $S - u$ và $S - v$. Chọn các cặp rời nhau từ những số còn lại rồi đổi chỗ hai đầu mỗi cột.

### 2 Lập phương, tứ diện và đa giác đều

– **Lập phương.** Chia tám đỉnh thành hai nhóm bốn đỉnh sao cho mỗi cạnh nối hai nhóm khác nhau. Điều kiện tổng trên mỗi cạnh là số lẻ buộc một nhóm nhận bốn số chẵn và nhóm kia nhận bốn số lẻ. Với một bộ số đã chọn, có $2(4!)^2$ cách xếp vào các đỉnh cố định.
– **Tứ diện.** Hai mặt có chung một cạnh. Lấy hiệu hai tổng mặt để suy ra hai đỉnh còn lại cùng số dư modulo 3. Làm tương tự cho các cặp mặt, ta được cả bốn đỉnh cùng số dư. Ngược lại, ba số cùng dư $r$ có tổng đồng dư với $3r = 0 \pmod 3$. Nếu lớp dư $r$ có $n_r$ số, số cách điền là $4! \sum_{r=0}^{2} C_{n_r}^4$.
– **Lục giác và bát giác đều.** Gom các cặp có cùng tổng rồi gán vào các cặp đỉnh đối diện. Mỗi bộ ba cặp cho $3! \cdot 2^3$ cách xếp trên lục giác. Mỗi bộ bốn cặp cho $4! \cdot 2^4$ cách trên bát giác.

### 3 Cấp số cộng trên các cạnh tam giác

– Gọi $a, b, c$ là ba số ở các đỉnh $A, B, C$. Các số tại trung điểm $M, N, P$ lần lượt là

$$\frac{b+c}{2}, \qquad \frac{c+a}{2}, \qquad \frac{a+b}{2}.$$

– Chọn ba số đỉnh cùng tính chẵn lẻ để các trung điểm nhận số nguyên. Kiểm tra cả sáu số thuộc tập cho trước và đôi một khác nhau. Với ba số đỉnh phân biệt, các trung điểm tự phân biệt. Một trung điểm trùng với đỉnh còn lại đúng khi ba số đỉnh lập thành cấp số cộng.
– Mỗi bộ ba số đỉnh hợp lệ có 3! cách gán vào các đỉnh. Sau khi gán, ba số trung điểm được xác định duy nhất.

### 4 Tam giác ma thuật

– Gọi $S$ là tổng chung trên mỗi cạnh. Cộng ba tổng cạnh, mỗi đỉnh được tính hai lần và mỗi trung điểm được tính một lần. Do đó, $3S$ bằng tổng sáu số cộng thêm tổng ba số đỉnh.
– Chọn ba số ở đỉnh và thử các giá trị $S$ có thể. Các số tại $M, N, P$ lần lượt bằng $S - b - c$, $S - c - a$, $S - a - b$. Chỉ giữ những cấu hình có đủ sáu số hợp lệ và phân biệt.


thuvientoanhoc.com

### 5 Ma phương cấp ba dùng chín số lập cấp số cộng

– Mỗi cấp số cộng gồm chín số phân biệt cho tám cách xếp ma phương. Chúng thu được bằng phép quay và đối xứng từ ma phương chuẩn dưới đây, sau khi thay mỗi số $i$ bằng số hạng thứ $i$ trong cấp số cộng.

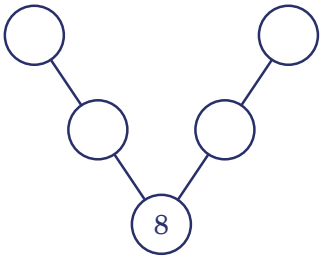
$$\begin{matrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}$$

– Với tập $\{1, 2, \dots, n\}$, cố định công sai dương $d$. Số đầu có $n - 8d$ cách chọn. Cộng theo $1 \le d \le \left\lfloor \dfrac{n-1}{8} \right\rfloor$ rồi nhân 8.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

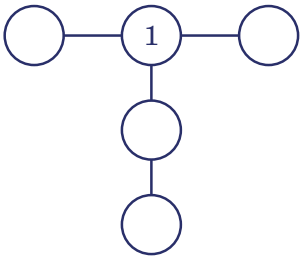
### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 15\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ V gồm một ô ở đỉnh góc và mỗi nhánh gồm hai ô thẳng hàng. Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 5 ô hình tròn sao cho ô ở đỉnh góc nhận số 8 và tổng ba số trên mỗi nhánh của chữ V đều bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



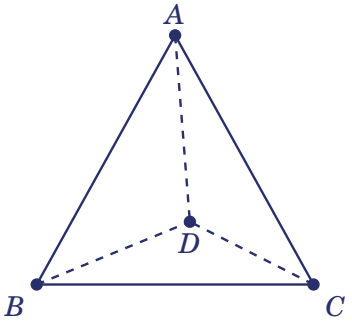

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 15\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ T (gồm một hàng ngang có 3 ô và một hàng dọc có 3 ô giao nhau tại ô giữa của hàng ngang và ô đỉnh của hàng dọc). Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 5 ô sao cho ô giao nhau nhận số 1 và tổng ba số trên hàng ngang bằng tổng ba số trên hàng dọc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



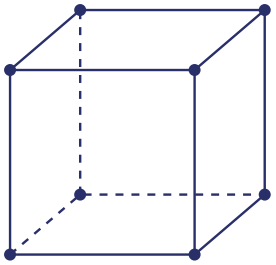

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 18\}$ và một khối tứ diện đều có 4 đỉnh phân biệt $A, B, C, D$. Người ta chọn ra 4 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 4 đỉnh của khối tứ diện sao cho mỗi đỉnh nhận đúng một số. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền sao cho tổng ba số ghi trên ba đỉnh của mỗi mặt tam giác của tứ diện đều là một số chia hết cho 3?



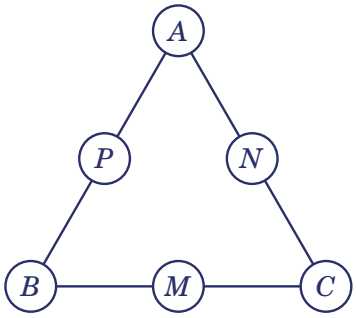

KẾT QUẢ

## Vận dụng



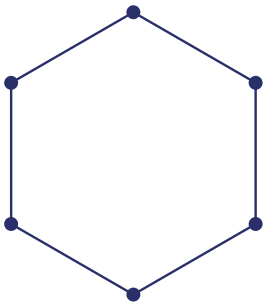
**Ví dụ 4. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,8\}$ và một khối lập phương gồm 8 đỉnh cố định trong không gian. Có tất cả bao nhiêu cách xếp 8 số này vào 8 đỉnh của hình lập phương sao cho hai đỉnh kề nhau trên mỗi cạnh bất kỳ luôn có tổng là một số lẻ?

**KẾT QUẢ**



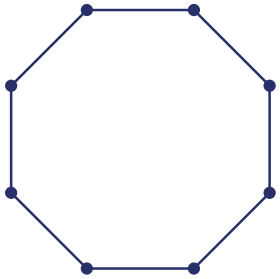

**Ví dụ 5. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,10\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 vị trí của một tam giác (gồm 3 đỉnh $A,B,C$ và 3 trung điểm $M,N,P$ trên các cạnh) sao cho tổng ba số trên mỗi cạnh của tam giác đều bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?

**KẾT QUẢ**



**Ví dụ 6. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,10\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 đỉnh của một lục giác đều cố định trên mặt phẳng sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của lục giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?

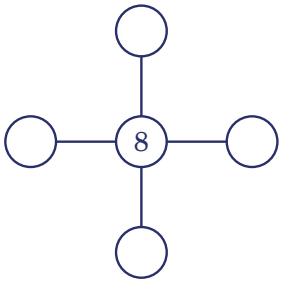
**KẾT QUẢ**



**Ví dụ 7. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,9\}$. Người ta chọn ra 8 số phân biệt từ $X$ để điền vào 8 đỉnh của một bát giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của bát giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?

**KẾT QUẢ**

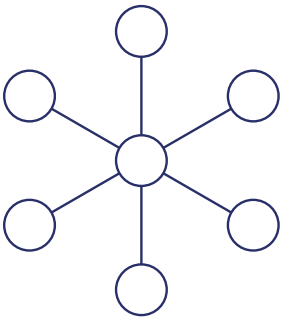
**Ví dụ 8. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,16\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ thập gồm một ô trung tâm và 4 ô ở 4 nhánh. Mỗi ô được chọn đúng một số từ tập $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho ô trung tâm nhận số 8 và tổng ba ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?




KẾT QUẢ

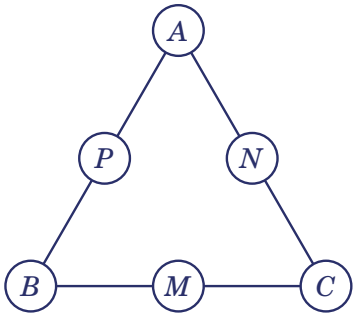
## Tổng hợp

**Ví dụ 9. TME** Cho tập $X=\{1,2,\ldots,14\}$ và 7 ô hình tròn được bố trí theo hình nan hoa bánh xe (gồm 1 ô trung tâm và 6 ô ở các nhánh tạo thành 3 đường thẳng hàng qua tâm). Mỗi ô được chọn đúng một số từ tập $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho cứ 3 ô tròn thẳng hàng đều chứa số 8 và tổng của 3 ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



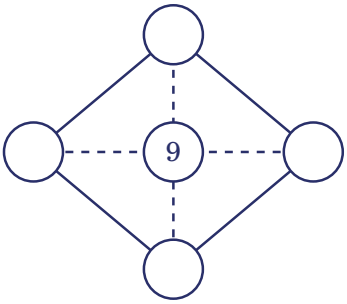
KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,11\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 vị trí của một tam giác (gồm 3 đỉnh $A,B,C$ và 3 trung điểm $M,N,P$ trên các cạnh) sao cho tổng ba số trên mỗi cạnh của tam giác đều bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



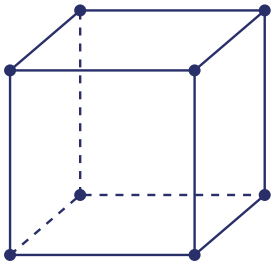

KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,17\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí tại 4 đỉnh của một hình thoi và 1 ô ở giao điểm của hai đường chéo. Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ $X$ để điền vào 5 ô sao cho ô giao điểm nhận số 9 và tổng ba số trên mỗi đường chéo đều bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



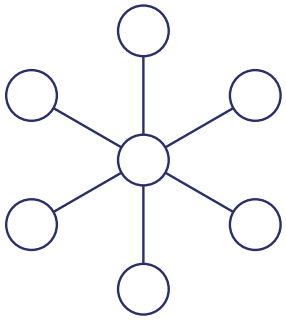

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,16\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một tập hợp con gồm 8 số phân biệt từ tập $X$ sao cho có thể sắp xếp 8 số đó vào 8 đỉnh của một hình lập phương để hai đỉnh kề nhau trên mỗi cạnh bất kỳ luôn có tổng là một số lẻ?



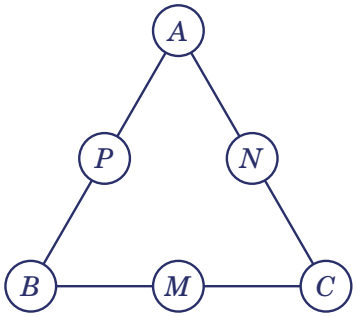
KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Cho tập $X=\{1,2,\ldots,15\}$ và 7 ô hình tròn bố trí theo hình nan hoa bánh xe (1 tâm, 3 đường qua tâm). Mỗi ô nhận đúng một số và các số được điền đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho cứ 3 ô tròn thẳng hàng đều chứa số 8 và tổng của 3 ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



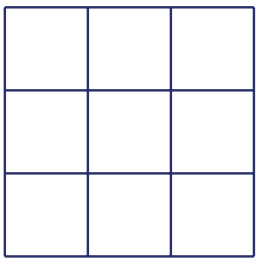
KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,20\}$ và 6 ô hình tròn $A,B,C,M,N,P$ (trong đó $A,B,C$ là 3 đỉnh của một tam giác và $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 ô sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác theo thứ tự luôn lập thành một cấp số cộng có công sai nguyên?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,65\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng ô vuông kích thước $3\times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau được chọn từ $X$ sao cho tổng 3 số ở mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau)?

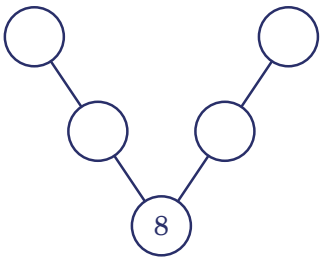


KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

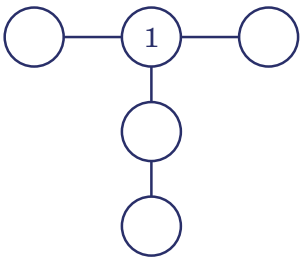
### Nhận dạng

**Bài 1. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,15\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ V gồm một ô ở đỉnh góc và mỗi nhánh gồm hai ô thẳng hàng. Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 5 ô hình tròn sao cho ô ở đỉnh góc nhận số 8 và tổng ba số trên mỗi nhánh của chữ V đều bằng 24. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



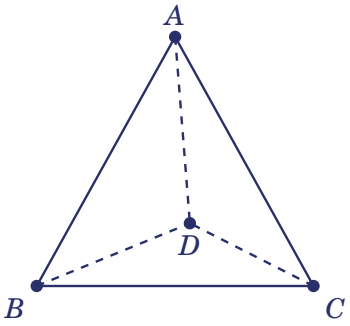

**KẾT QUẢ**

**Bài 2. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,13\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ T (gồm một hàng ngang có 3 ô và một hàng dọc có 3 ô giao nhau tại ô giữa của hàng ngang và ô đỉnh của hàng dọc). Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 5 ô sao cho ô giao nhau nhận số 1 và tổng ba số trên hàng ngang bằng tổng ba số trên hàng dọc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



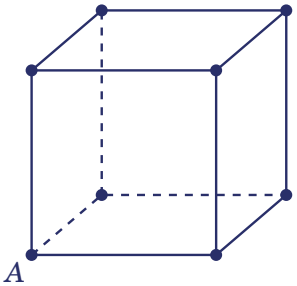

**KẾT QUẢ**

**Bài 3. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,15\}$ và một khối tứ diện đều có 4 đỉnh phân biệt $A,B,C,D$. Người ta chọn ra 4 số phân biệt từ tập $X$ để điền vào 4 đỉnh của khối tứ diện sao cho mỗi đỉnh nhận đúng một số. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền sao cho tổng ba số ghi trên ba đỉnh của mỗi mặt tam giác của tứ diện đều là một số chia hết cho 3?



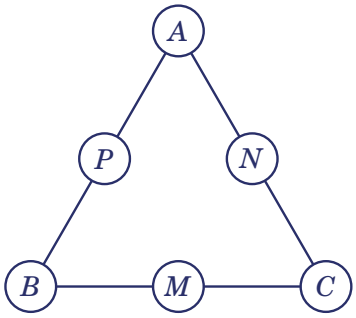

**KẾT QUẢ**

**Bài 4. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,8\}$ và một khối lập phương gồm 8 đỉnh cố định trong không gian. Có tất cả bao nhiêu cách xếp 8 số này vào 8 đỉnh của hình lập phương sao cho hai đỉnh kề nhau trên mỗi cạnh bất kỳ luôn có tổng là một số lẻ và số 1 được đặt ở đỉnh $A$?



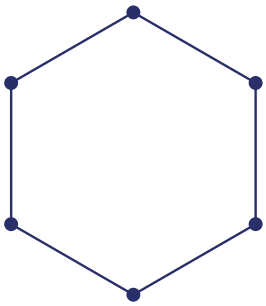

**KẾT QUẢ**

**Bài 5. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 vị trí của một tam giác (gồm 3 đỉnh $A, B, C$ và 3 trung điểm $M, N, P$ trên các cạnh) sao cho tổng ba số trên mỗi cạnh của tam giác đều bằng 16. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?




KẾT QUẢ

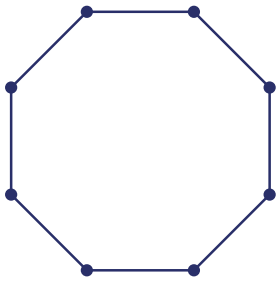
**Bài 6. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 đỉnh của một lục giác đều cố định trên mặt phẳng sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của lục giác đều bằng 11. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



KẾT QUẢ

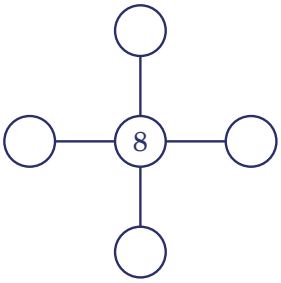
## Vận dụng

**Bài 7. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Người ta chọn ra 8 số phân biệt từ $X$ để điền vào 8 đỉnh của một bát giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của bát giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



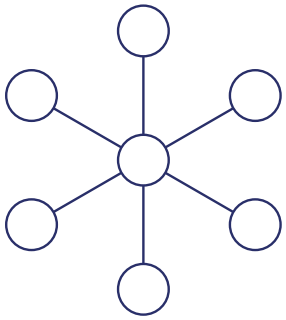
KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 16\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ thập gồm một ô trung tâm và 4 ô ở 4 nhánh. Mỗi ô được chọn đúng một số từ tập $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho ô trung tâm nhận số 8 và tổng ba ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng 25?



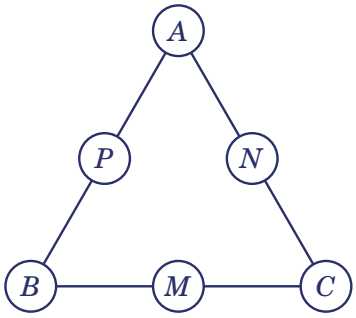

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Cho tập $X = \{1, 2, \ldots, 12\}$ và 7 ô hình tròn được bố trí theo hình nan hoa bánh xe (gồm 1 ô trung tâm và 6 ô ở các nhánh tạo thành 3 đường thẳng hàng qua tâm). Mỗi ô được chọn đúng một số từ tập $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho cứ 3 ô tròn thẳng hàng đều chứa số 8 và tổng của 3 ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



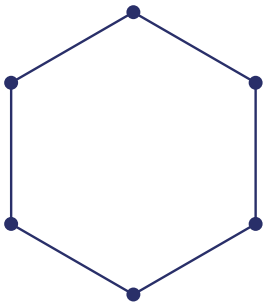
**KẾT QUẢ**

**Bài 10. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 vị trí của một tam giác (gồm 3 đỉnh $A, B, C$ và 3 trung điểm $M, N, P$ trên các cạnh) sao cho tổng ba số trên mỗi cạnh của tam giác đều bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



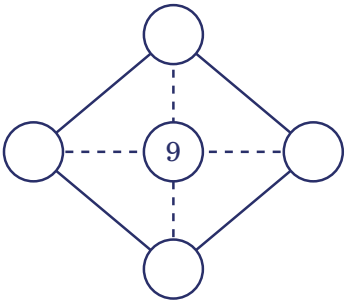

**KẾT QUẢ**

**Bài 11. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 đỉnh của một lục giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của lục giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



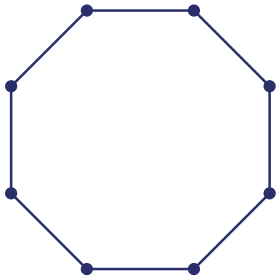
**KẾT QUẢ**

**Bài 12. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 17\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí tại 4 đỉnh của một hình thoi và 1 ô ở giao điểm của hai đường chéo. Người ta chọn ra 5 số phân biệt từ $X$ để điền vào 5 ô sao cho ô giao điểm nhận số 9 và tổng ba số trên mỗi đường chéo đều bằng 27. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



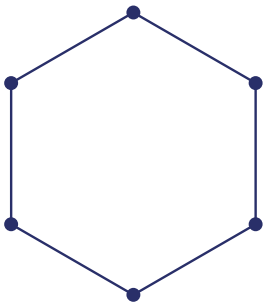

**KẾT QUẢ**

**Bài 13. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,10\}$. Người ta chọn ra 8 số phân biệt từ $X$ để điền vào 8 đỉnh của một bát giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của bát giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



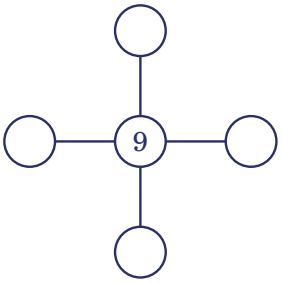
KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,12\}$. Người ta chọn ra 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 đỉnh của một lục giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của lục giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



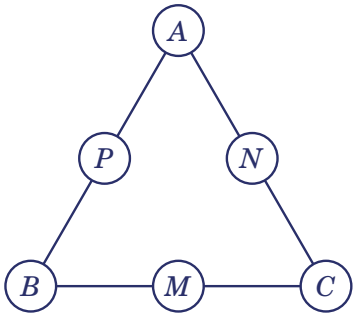
KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,18\}$ và 5 ô hình tròn bố trí hình chữ thập (1 tâm, 4 nhánh). Mỗi ô được chọn đúng một số từ $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho ô tâm nhận số 9 và tổng ba ô trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?




KẾT QUẢ

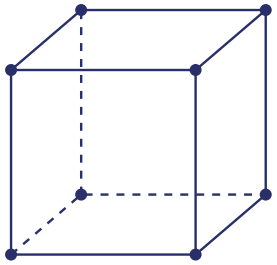
**Bài 16. TME** Cho tập hợp $X=\{1,2,\ldots,19\}$ và 6 ô hình tròn $A,B,C,M,N,P$ (trong đó $A,B,C$ là 3 đỉnh của một tam giác và $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 ô sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác theo thứ tự luôn lập thành một cấp số cộng có công sai nguyên?




KẾT QUẢ

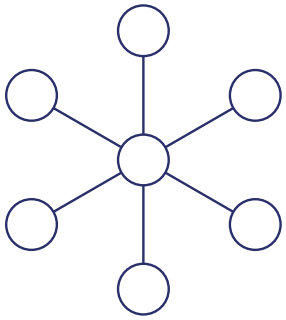
## Tổng hợp

**Bài 17. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 14\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một tập hợp con gồm 8 số phân biệt từ tập $X$ sao cho có thể sắp xếp 8 số đó vào 8 đỉnh của một hình lập phương để hai đỉnh kề nhau trên mỗi cạnh bất kỳ luôn có tổng là một số lẻ?



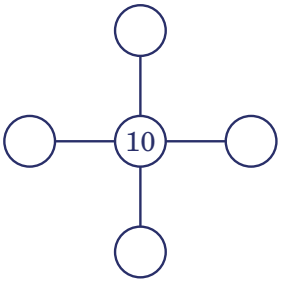
KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Cho tập $X = \{1, 2, \ldots, 15\}$ và 7 ô hình tròn bố trí theo hình nan hoa bánh xe (1 tâm, 3 đường qua tâm). Mỗi ô được chọn đúng một số từ tập $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho cứ 3 ô tròn thẳng hàng đều chứa số 8 và tổng của 3 ô tròn trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



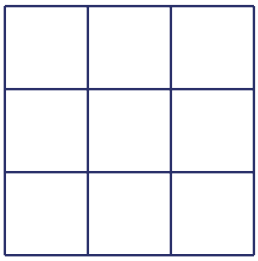
KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 19\}$ và 5 ô hình tròn bố trí hình chữ thập (1 tâm, 4 nhánh). Mỗi ô được chọn đúng một số từ $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho ô tâm nhận số 10 và tổng ba ô trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



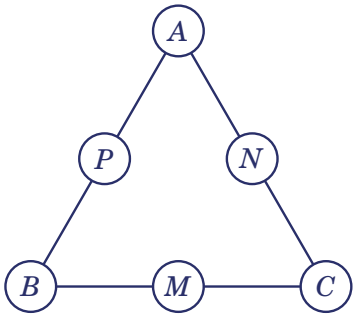

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 65\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng có công sai dương là số chẵn rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng ô vuông kích thước $3 \times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau được chọn từ $X$ sao cho tổng 3 số ở mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau)?



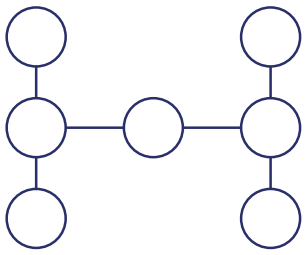
KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 18\}$ và 6 ô hình tròn $A, B, C, M, N, P$ (trong đó $A, B, C$ là 3 đỉnh của một tam giác và $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CA, AB$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 ô sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác theo thứ tự luôn lập thành một cấp số cộng có công sai nguyên?



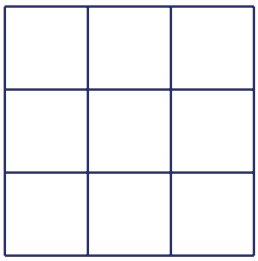

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$ và 7 ô hình tròn bố trí theo hình chữ $H$ (gồm 2 cột dọc mỗi cột 3 ô và 1 thanh ngang 3 ô nối hai ô tâm của hai cột dọc). Mỗi ô chọn đúng một số phân biệt từ $X$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho tổng 3 số trên cột dọc thứ nhất, tổng 3 số trên cột dọc thứ hai và tổng 3 số trên thanh ngang đều bằng nhau?



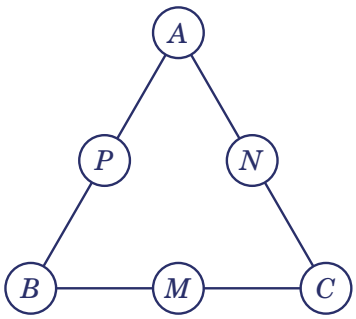
KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 73\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng $3 \times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau chọn từ $X$ sao cho tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng nhau)?



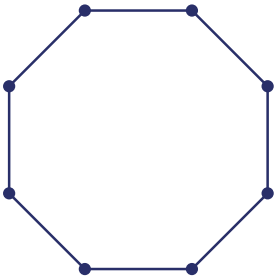
KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 21\}$ và 6 ô hình tròn $A, B, C, M, N, P$ (trong đó $A, B, C$ là 3 đỉnh của một tam giác và $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CA, AB$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn 6 số phân biệt từ $X$ để điền vào 6 ô sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác theo thứ tự luôn lập thành một cấp số cộng có công sai nguyên?



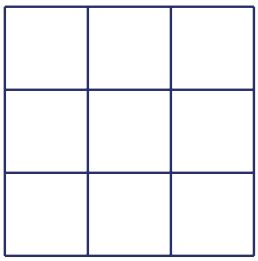

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$. Người ta chọn ra 8 số phân biệt từ $X$ để điền vào 8 đỉnh của một bát giác đều cố định sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện nhau qua tâm của bát giác luôn bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?



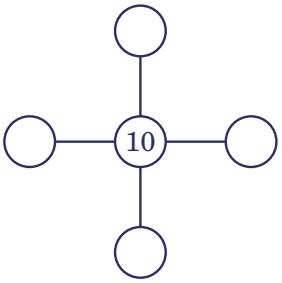
**KẾT QUẢ**

**Bài 26. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 81\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng $3 \times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau chọn từ $X$ sao cho tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng nhau)?



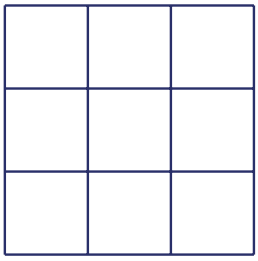
**KẾT QUẢ**

**Bài 27. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$ và 5 ô hình tròn bố trí hình chữ thập (1 tâm, 4 nhánh). Mỗi ô được chọn đúng một số từ $X$ sao cho các số đôi một khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp sao cho ô tâm nhận số 10 và tổng ba ô trên mỗi đường thẳng hàng đều bằng nhau?



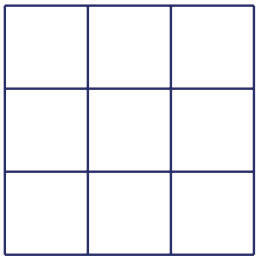

**KẾT QUẢ**

**Bài 28. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 89\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng $3 \times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau chọn từ $X$ sao cho tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng nhau)?



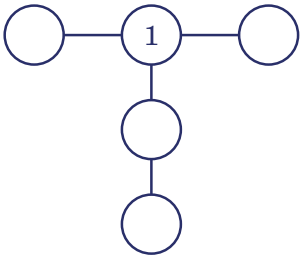
**KẾT QUẢ**

**Bài 29. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 97\}$. Chọn chín số đôi một khác nhau lập thành một cấp số cộng có công sai dương chia hết cho 3 rồi điền vào bảng. Hỏi có bao nhiêu cách lập ma phương cấp 3 (bảng $3 \times 3$ gồm 9 số đôi một khác nhau chọn từ $X$ sao cho tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng nhau)?



KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 16\}$ và 5 ô hình tròn được bố trí theo hình chữ T (gồm hàng ngang 3 ô và hàng dọc 3 ô giao nhau tại ô giữa hàng ngang và đỉnh hàng dọc). Người ta chọn 5 số phân biệt từ $X$ để điền vào 5 ô sao cho ô giao nhau nhận số 1 và tổng ba số trên hàng ngang bằng tổng ba số trên hàng dọc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn?




KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Bài toán tô màu
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-17

# BUỔI 17. BÀI TOÁN TÔ MÀU

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Xác định những cặp phải khác màu

– **Tô đỉnh.** Hai đỉnh phải khác màu nếu có cạnh nối chúng.
– **Tô mặt hoặc tô bản đồ.** Hai mặt phải khác màu nếu chung cạnh. Hai vùng phải khác màu nếu chung đường biên.
– **Tô ô vuông.** Đọc kỹ đề yêu cầu khác màu khi chung cạnh hay cả khi chung đỉnh.

Mỗi vị trí được tô đúng một màu. Các màu đã cho có thể được dùng lại ở những vị trí không bị ràng buộc.

### 2 Chu trình, hình chóp và các cặp đối diện

– **Chu trình.** Tô $n \geq 3$ đỉnh theo vòng kín bằng $k \geq 2$ màu có $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ cách. Nếu cắt một cạnh, đường đi còn $k(k-1)^{n-1}$ cách tô. Trừ các cách có hai đầu cùng màu để khép vòng.
– **Hình chóp hoặc vùng trung tâm.** Tô đỉnh chóp, mặt đáy hoặc vùng trung tâm trước tùy đề. Các vị trí bao quanh tạo thành một chu trình và chỉ còn $k-1$ màu.
– **Mặt lập phương và đỉnh bát diện.** Chia thành ba cặp đối diện.
Hai vị trí cùng cặp có thể cùng màu. Hai vị trí khác cặp luôn phải khác màu. Chọn số cặp dùng hai màu rồi gán các màu phân biệt vào các vị trí hoặc cặp đã gộp.

### 3 Tô bảng ô vuông

**Bảng $2 \times n$, chỉ xét cạnh chung.** Cột đầu có $k(k-1)$ cách tô.
Với cột trước đã tô, mỗi ô ở cột mới tránh màu của ô bên trái nó. Trong $(k-1)^2$ cặp màu, có $k-2$ cặp trùng màu.
Vậy mỗi cột mới có $k^2 - 3k + 3$ cách. Khi đề hỏi màu các ô cụ thể, giữ lại điều kiện đó trong lúc đếm từng cột.

**Bảng $m \times n$, xét cả đỉnh chung, dùng đúng bốn màu cho phép.** Mỗi khối $2 \times 2$ phải có đủ bốn màu.

– Mã hóa bốn màu bằng $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$, cộng từng tọa độ theo modulo 2. Trong mỗi khối $2 \times 2$, tổng bốn mã bằng $(0,0)$.
– Vì vậy, độ đổi màu ngang chỉ phụ thuộc cặp cột, độ đổi màu dọc chỉ phụ thuộc cặp hàng. Hai loại độ đổi phải khác $(0,0)$ và không được trùng nhau.
– Có ba độ đổi khác $(0,0)$. Do hai nhóm dùng các độ đổi rời nhau, ít nhất một nhóm chỉ dùng một giá trị. Đếm hai trường hợp rồi trừ phần trùng, thu được

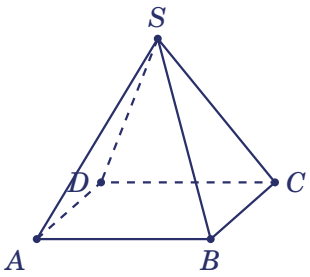
$$12(2^{m-1} + 2^{n-1} - 2), \qquad m, n \geq 2.$$

**Không gian mẫu.** Nếu mỗi vị trí chọn độc lập và đều trong $k$ màu, có $k^N$ kết quả với $N$ vị trí. Nếu chọn đều trong các cách tô hợp lệ, mẫu số là số cách tô hợp lệ.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

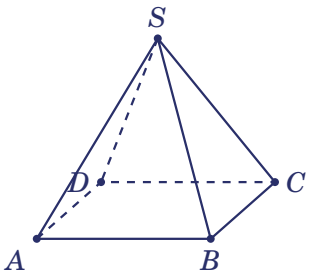
**Ví dụ 1. TME** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Người ta dùng 6 màu sơn khác nhau để sơn 5 đỉnh của hình chóp sao cho mỗi đỉnh được sơn đúng một màu và hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi một cạnh của hình chóp thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu các đỉnh của hình chóp?




**KẾT QUẢ**

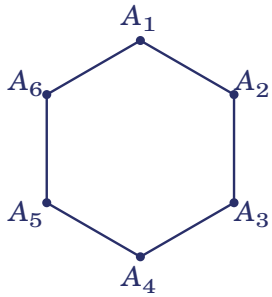
**Ví dụ 2. TME** Người ta sơn ngẫu nhiên 5 đỉnh của hình chóp tứ giác $S.ABCD$ bằng 6 màu sơn (mỗi đỉnh chọn ngẫu nhiên một trong 6 màu).

Gọi $P$ là xác suất để việc sơn màu thỏa mãn quy tắc: hai đỉnh bất kỳ nối với nhau bởi một cạnh thì có màu khác nhau. Tính $T = 6480 \cdot P$.




**KẾT QUẢ**

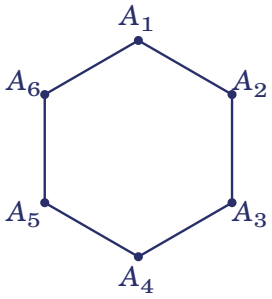
**Ví dụ 3. TME** Cho một đa giác đều 6 cạnh (lục giác đều) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Người ta dùng 5 màu sắc khác nhau để tô 6 đỉnh của đa giác sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ (nối bởi một cạnh của lục giác) có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đa giác?




**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 4. TME** Tô ngẫu nhiên 6 đỉnh của một lục giác đều bằng 5 màu độc lập (mỗi đỉnh có xác suất chọn từng màu là $\frac{1}{5}$).

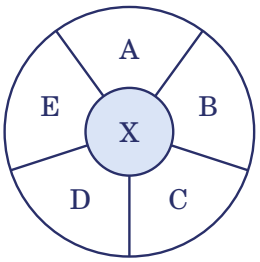
Gọi $P$ là xác suất để không có hai đỉnh kề nhau nào của lục giác có cùng màu. Tính $T = 12500 \cdot P$.




KẾT QUẢ

## Vận dụng

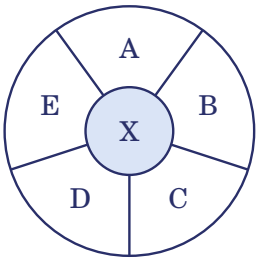
**Ví dụ 5. TME** Một bản đồ địa lý gồm 6 tỉnh: một tỉnh trung tâm $X$ tiếp giáp với toàn bộ 5 tỉnh còn lại $A$, $B$, $C$, $D$, $E$; 5 tỉnh này nằm vòng tròn bao quanh tỉnh $X$ và kề nhau theo chu trình $A$ - $B$ - $C$ - $D$ - $E$ - $A$. Người ta dùng 5 màu khác nhau để tô màu bản đồ sao cho hai tỉnh có chung đường biên giới thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu bản đồ?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Một bản đồ gồm vùng trung tâm $X$ và năm vùng $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ bao quanh theo thứ tự trên hình. $X$ tiếp giáp với cả năm vùng. Các vùng ngoài chỉ tiếp giáp hai vùng ngay bên cạnh. Chọn đều một cách tô hợp lệ bằng 5 màu, trong đó hai vùng chung đường biên khác màu.

Gọi $P$ là xác suất để $A$ và $C$ cùng màu. Tính $T = 8000 \cdot P$.




KẾT QUẢ

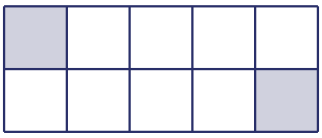
**Ví dụ 7. TME** Cho một bảng ô vuông kích thước $2 \times 6$ gồm 12 ô vuông đơn vị. Người ta dùng 3 màu sơn khác nhau để sơn các ô của bảng sao cho hai ô bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu bảng?



KẾT QUẢ

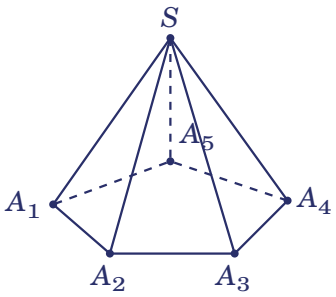
**Ví dụ 8. TME** Trong tập hợp tất cả các cách sơn màu bảng ô vuông kích thước $2 \times 5$ bằng 3 màu sao cho hai ô chung cạnh có màu khác nhau, người ta chọn ngẫu nhiên một cách sơn.

Gọi $P$ là xác suất để ô ở góc trên bên trái (1, 1) và ô ở góc dưới bên phải (2, 5) có cùng một màu. Tính $T = 8100 \cdot P$.



**KẾT QUẢ**

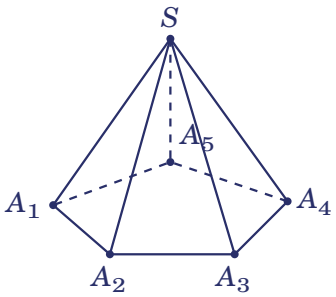
**Ví dụ 9. TME** Cho hình chóp ngũ giác $S.A_1A_2A_3A_4A_5$ gồm 6 mặt (1 mặt đáy ngũ giác và 5 mặt bên tam giác). Người ta dùng 6 màu sơn khác nhau để sơn 6 mặt của hình chóp sao cho mỗi mặt sơn một màu và hai mặt bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu các mặt của hình chóp?




**KẾT QUẢ**

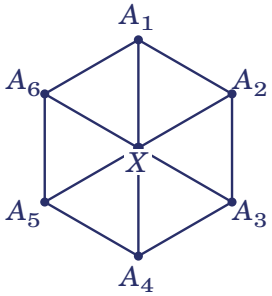
**Ví dụ 10. TME** Dùng 6 màu tô 6 mặt của hình chóp ngũ giác $S.A_1A_2A_3A_4A_5$, mỗi mặt một màu và hai mặt chung cạnh khác màu. Chọn đều một cách tô hợp lệ.

Gọi $P$ là xác suất để hai mặt bên $SA_1A_2$ và $SA_3A_4$ cùng màu. Tính $T = 10200 \cdot P$.




**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 11. TME** Một mạng viễn thông 5G gồm một trạm phát sóng trung tâm tiếp xúc phủ sóng với một cụm gồm 6 trạm vệ tinh xung quanh tạo thành chu trình lục giác khép kín. Để tránh can nhiễu đồng kênh, quy chuẩn kỹ thuật bắt buộc hai trạm có vùng phủ sóng tiếp giáp nhau không được phép sử dụng cùng một tần số vô tuyến. Nhà mạng có 5 dải tần số khả dụng để cấp phát cho 7 trạm phát sóng. Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án cấp phát tần số hợp lệ?

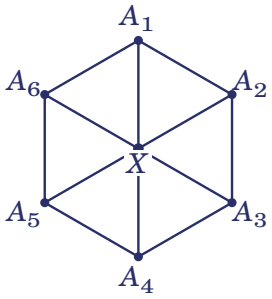



**KẾT QUẢ**


thuvientoanhoc.com

**Ví dụ 12. TME** Một trạm trung tâm và sáu trạm vệ tinh có quan hệ tiếp giáp như hình, mỗi đoạn nối biểu thị một cặp trạm tiếp giáp. Mỗi trạm chọn độc lập và đều một trong 5 dải tần.

Gọi $P$ là xác suất để không có hai trạm tiếp giáp nào trùng tần số. Tính $T = 62500 \cdot P$.

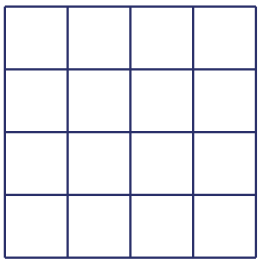



**KẾT QUẢ**

## Tổng hợp

**Ví dụ 13. TME** Cho một bảng ô vuông kích thước $4 \times 4$ gồm 16 ô vuông đơn vị và cho bốn màu sơn. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô.

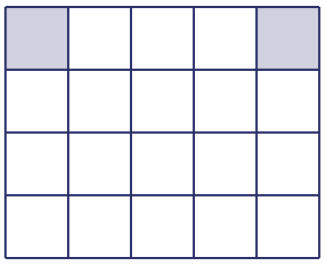
Gọi $S$ là tổng số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Tính $T = 20 \cdot S$.



**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 14. TME** Chọn đều một cách tô bảng $4 \times 5$ bằng bốn màu sao cho hai ô chung đỉnh hoặc chung cạnh khác màu.

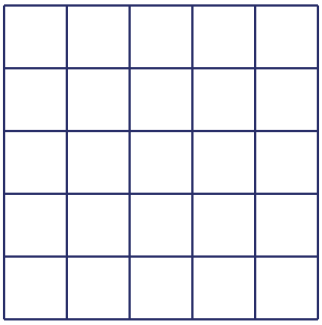
Gọi $P$ là xác suất để hai ô góc ở hai đầu hàng trên cùng màu. Tính $T = 5500 \cdot P$.



**KẾT QUẢ**

**Ví dụ 15. TME** Cho bảng $5 \times 5$ gồm 25 ô vuông đơn vị và cho bốn màu. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kì có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô (không tính đến thứ tự tô màu các ô).

Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Giá trị của $9S$ bằng bao nhiêu?

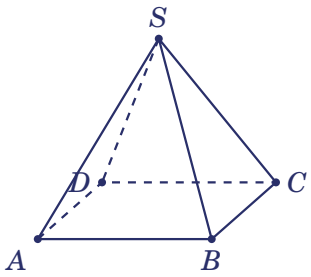


**KẾT QUẢ**

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

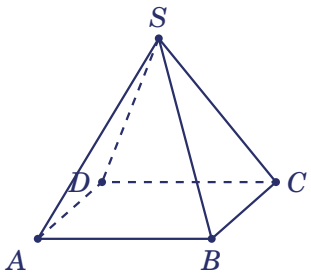
**Bài 1. TME** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Người ta dùng 6 màu sơn khác nhau để sơn 5 đỉnh của hình chóp sao cho mỗi đỉnh sơn một màu và hai đỉnh bất kỳ nối với nhau bởi một cạnh của hình chóp thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu 5 đỉnh của hình chóp?




KẾT QUẢ

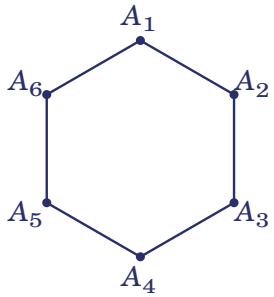
**Bài 2. TME** Sơn ngẫu nhiên 5 đỉnh của hình chóp tứ giác $S.ABCD$ bằng 6 màu sơn (mỗi đỉnh chọn ngẫu nhiên một trong 6 màu).

Gọi $P$ là xác suất để hai đỉnh bất kỳ nối với nhau bởi một cạnh của hình chóp có màu khác nhau. Tính $T = 6480 \cdot P$.

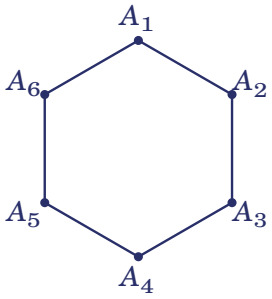



KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho đa giác đều gồm 6 đỉnh $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Người ta dùng 5 màu sắc khác nhau để tô 6 đỉnh của đa giác sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ (nối bởi một cạnh của đa giác) có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đa giác?



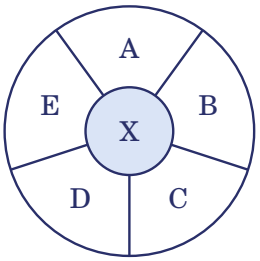

KẾT QUẢ




**Bài 4. TME** Tô ngẫu nhiên 6 đỉnh của một lục giác đều bằng 5 màu sắc độc lập (mỗi đỉnh có xác suất chọn từng màu là $\frac{1}{5}$).

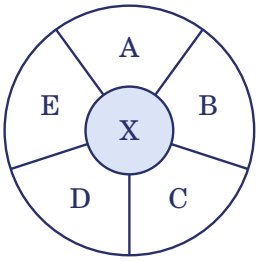
Gọi $P$ là xác suất để không có hai đỉnh kề nhau nào của lục giác có cùng màu. Tính $T = 12500 \cdot P$.

KẾT QUẢ




**Bài 5. TME** Một bản đồ địa lý gồm 6 vùng đất: một vùng đất trung tâm tiếp giáp với toàn bộ 5 vùng đất còn lại; 5 vùng đất này bao quanh trung tâm và tiếp giáp nhau theo một chu trình tròn khép kín. Người ta dùng 5 màu sơn khác nhau để tô màu bản đồ sao cho hai vùng đất tiếp giáp nhau thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu bản đồ?

KẾT QUẢ



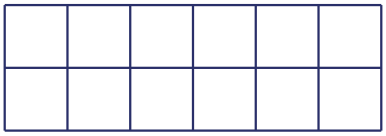

**Bài 6. TME** Một bản đồ gồm một vùng trung tâm tiếp giáp cả năm vùng ngoài. Năm vùng ngoài xếp thành vòng và chỉ tiếp giáp hai vùng ngay bên cạnh. Mỗi vùng chọn độc lập và đều một trong 5 màu.

Gọi $P$ là xác suất để hai vùng chung đường biên luôn khác màu. Tính $T = 25000 \cdot P$.

KẾT QUẢ

## Vận dụng

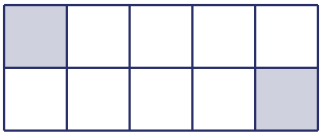
**Bài 7. TME** Cho bảng ô vuông kích thước $2 \times 6$ gồm 12 ô vuông đơn vị. Người ta dùng 3 màu sơn khác nhau để sơn các ô của bảng sao cho hai ô bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu bảng?



KẾT QUẢ

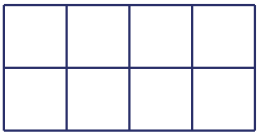
**Bài 8. TME** Trong tập hợp tất cả các cách sơn màu bảng ô vuông kích thước $2 \times 5$ bằng 3 màu sao cho hai ô chung cạnh có màu khác nhau, người ta chọn ngẫu nhiên một cách sơn.

Gọi $P$ là xác suất để ô ở góc (1, 1) và ô ở góc (2, 5) được sơn cùng một màu. Tính $T = 8100 \cdot P$.



KẾT QUẢ

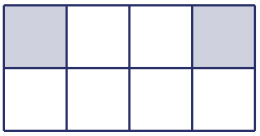
**Bài 9. TME** Cho bảng ô vuông kích thước $2 \times 4$ gồm 8 ô vuông đơn vị. Người ta dùng 4 màu sắc khác nhau để sơn các ô của bảng sao cho hai ô bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu bảng?



KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Trong tập hợp 4116 cách sơn màu bảng ô vuông kích thước $2 \times 4$ bằng 4 màu sao cho hai ô chung cạnh có màu khác nhau, người ta chọn ngẫu nhiên một cách sơn.

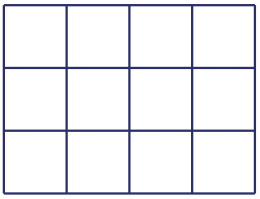
Gọi $P$ là xác suất để ô (1, 1) và ô (1, 4) có cùng một màu. Tính $T = 34300 \cdot P$.



KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Cho bảng ô vuông kích thước $3 \times 4$ gồm 12 ô vuông đơn vị và cho bốn màu. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô.

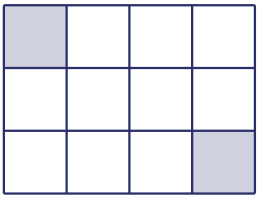
Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Tính $T = 15 \cdot S$.



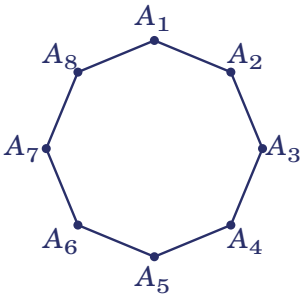
KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Trong tập hợp tất cả các cách tô màu hợp lệ của bảng $3 \times 4$ bằng 4 màu (hai ô chung đỉnh hoặc chung cạnh khác màu), người ta chọn ngẫu nhiên một cách tô.

Gọi $P$ là xác suất để ô ở góc (1, 1) và ô ở góc đối diện (3, 4) được tô cùng một màu. Tính $T = 6000 \cdot P$.

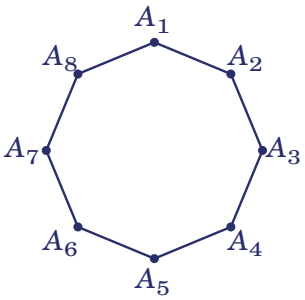


KẾT QUẢ




**Bài 13. TME** Cho một đa giác đều gồm 8 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Người ta dùng 4 màu sắc khác nhau để tô 8 đỉnh của đa giác sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ (nối bởi một cạnh của đa giác) có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đa giác?

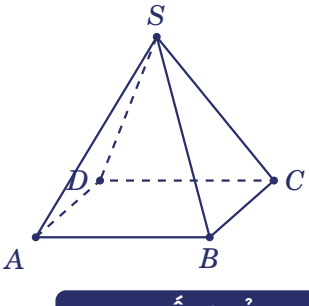
KẾT QUẢ




**Bài 14. TME** Tô ngẫu nhiên 8 đỉnh của một bát giác đều bằng 4 màu sắc độc lập (mỗi đỉnh chọn ngẫu nhiên một trong 4 màu).

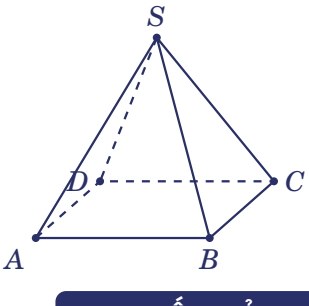
Gọi $P$ là xác suất để không có hai đỉnh kề nhau nào của bát giác có cùng màu. Tính $T = 16384 \cdot P$.

KẾT QUẢ




**Bài 15. TME** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ gồm 5 mặt (1 mặt đáy vuông và 4 mặt bên tam giác). Người ta dùng 6 màu sơn khác nhau để sơn 5 mặt của hình chóp sao cho mỗi mặt sơn một màu và hai mặt bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu 5 mặt của hình chóp?

KẾT QUẢ

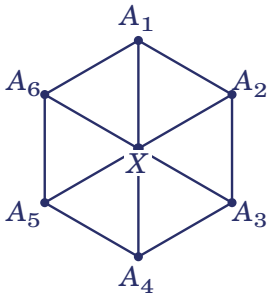



**Bài 16. TME** Trong tập hợp 1560 cách sơn màu 5 mặt của hình chóp tứ giác $S.ABCD$ bằng 6 màu, người ta chọn ngẫu nhiên một cách sơn.

Gọi $P$ là xác suất để hai mặt bên đối diện $SAB$ và $SCD$ được sơn cùng một màu. Tính $T = 5200 \cdot P$.

KẾT QUẢ

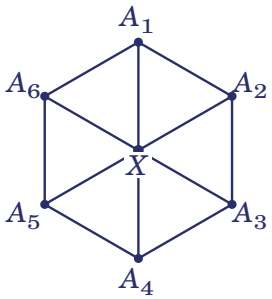
**Bài 17. TME** Một mạng viễn thông thế hệ mới gồm một trạm trung tâm tiếp xúc phủ sóng với 6 trạm vệ tinh xung quanh tạo thành chu trình lục giác khép kín. Để tránh can nhiễu sóng vô tuyến, hai trạm có vùng phủ sóng tiếp giáp nhau không được phép sử dụng cùng một tần số. Nhà mạng có 5 dải tần số khả dụng để cấp phát cho 7 trạm phát sóng. Hỏi có tất cả bao nhiêu phương án cấp phát tần số hợp lệ?




KẾT QUẢ

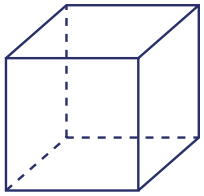
**Bài 18. TME** Một mạng gồm một trạm trung tâm và sáu trạm vệ tinh có quan hệ tiếp giáp như hình. Mỗi trạm chọn độc lập và đều một trong 5 dải tần.

Gọi $P$ là xác suất để các trạm tiếp giáp có tần số khác nhau. Tính $T = 62500 \cdot P$.




KẾT QUẢ

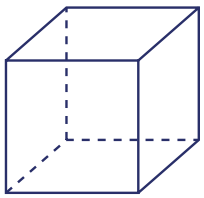
**Bài 19. TME** Cho một hình lập phương có 6 mặt được đánh số cố định từ Mặt 1 đến Mặt 6. Người ta dùng 6 màu sơn khác nhau để sơn 6 mặt của hình lập phương sao cho mỗi mặt sơn một màu và hai mặt bất kỳ có chung cạnh thì có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sơn màu 6 mặt của hình lập phương?



KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Sơn ngẫu nhiên 6 mặt của một hình lập phương cố định bằng 6 màu sơn (mỗi mặt chọn ngẫu nhiên một trong 6 màu). Mỗi vị trí chọn độc lập và đều trong các màu đã cho.

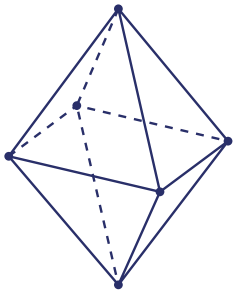
Gọi $P$ là xác suất để hai mặt bất kỳ có chung cạnh của hình lập phương luôn có màu khác nhau. Tính $T = 97200 \cdot P$.



KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Cho hình bát diện đều gồm 6 đỉnh cố định. Người ta dùng 5 màu sơn khác nhau để sơn 6 đỉnh của hình bát diện đều sao cho hai đỉnh bất kỳ nối với nhau bởi một cạnh thì có màu khác nhau.

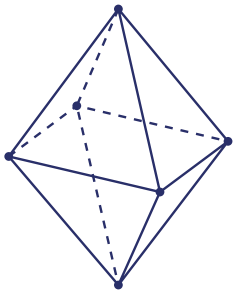
Gọi $S$ là tổng số cách sơn màu thỏa mãn điều kiện trên. Tính $T = 5 \cdot S$.



KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Sơn ngẫu nhiên 6 đỉnh cố định của hình bát diện đều bằng 5 màu sơn. Mỗi vị trí chọn độc lập và đều trong các màu đã cho.

Gọi $P$ là xác suất để hai đỉnh bất kỳ nối với nhau bởi một cạnh của bát diện đều luôn có màu khác nhau. Tính $T = 31250 \cdot P$.

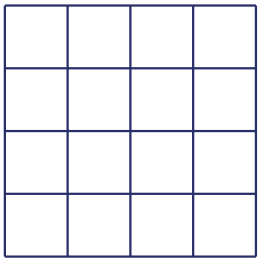


KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 23. TME** Cho một bảng ô vuông kích thước $4 \times 4$ gồm 16 ô vuông đơn vị và cho bốn màu sơn. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu.

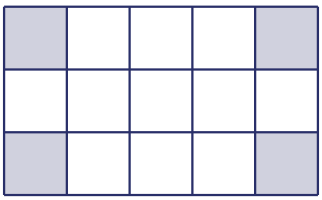
Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt. Tính $T = 25 \cdot S$.



KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Chọn đều một cách tô bảng $3 \times 5$ bằng bốn màu sao cho hai ô chung đỉnh hoặc chung cạnh khác màu.

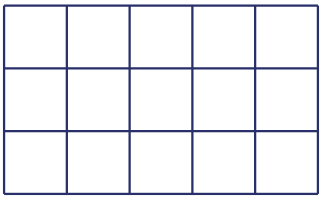
Gọi $P$ là xác suất để bốn ô góc dùng đúng hai màu. Tính $T = 5400 \cdot P$.



KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Cho bảng ô vuông kích thước $3 \times 5$ gồm 15 ô vuông đơn vị và cho bốn màu sơn. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu.

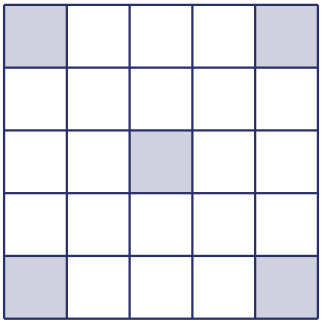
Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt. Tính $T = 15 \cdot S$.



KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Cho bảng $5 \times 5$ gồm 25 ô vuông đơn vị và cho bốn màu sơn. Trong tập hợp tất cả các cách tô màu bảng thỏa mãn điều kiện "hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu", người ta chọn ngẫu nhiên một cách tô.

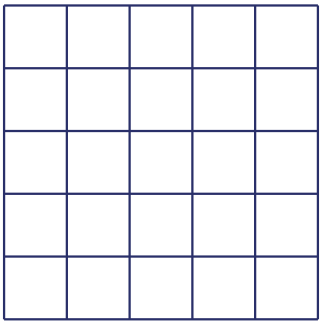
Gọi $P$ là xác suất để ô trung tâm của bảng (ô (3, 3)) và cả 4 ô ở 4 góc của bảng đều được tô cùng một màu. Tính $T = 6500 \cdot P$.



KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Cho bảng $5 \times 5$ gồm 25 ô vuông đơn vị và cho bốn màu. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kì có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Thêm điều kiện hai ô ở hai đầu của hàng trên cùng phải được tô khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô (không tính đến thứ tự tô màu các ô).

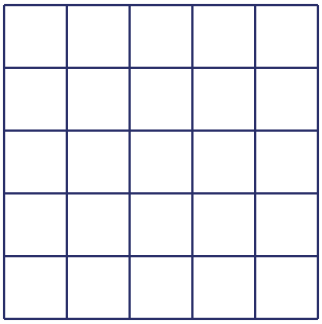
Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Giá trị của $9S$ bằng bao nhiêu?



KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Trong tập hợp 360 cách tô màu hợp lệ của bảng $5 \times 5$ bằng bốn màu sơn (hai ô chung đỉnh hoặc chung cạnh khác màu), người ta chọn ngẫu nhiên một cách tô.

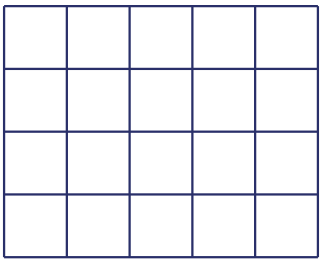
Gọi $P$ là xác suất để Màu 1 (màu đỏ) xuất hiện trên đúng 8 ô vuông của bảng. Tính $T = 15000 \cdot P$.



KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Cho bảng ô vuông kích thước $4 \times 5$ gồm 20 ô vuông đơn vị và cho bốn màu sơn. Người ta tô mỗi ô trong bảng bởi một trong bốn màu đã cho sao cho hai ô bất kỳ có chung đỉnh hoặc chung cạnh thì khác màu. Hai cách tô màu bảng được gọi là giống nhau nếu mỗi ô của bảng có cùng màu ở cả hai cách tô.

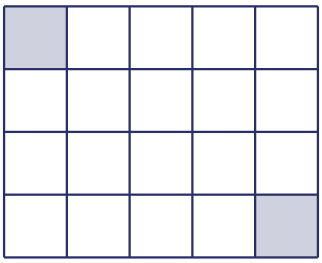
Gọi $S$ là số cách tô màu bảng phân biệt thỏa mãn điều kiện trên. Tính $T = 15 \cdot S$.



KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Trong tập hợp 264 cách tô màu hợp lệ của bảng $4 \times 5$ bằng 4 màu (hai ô chung đỉnh hoặc chung cạnh khác màu), người ta chọn ngẫu nhiên một cách tô.

Gọi $P$ là xác suất để ô ở góc (1, 1) và ô ở góc đối diện (4, 5) có cùng màu. Tính $T = 11000 \cdot P$.



KẾT QUẢ

HẾT


thuvientoanhoc.com

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Truy hồi trong bài toán đếm
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-18

# BUỔI 18. KĨ NĂNG TRUY HỒI TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Lập công thức truy hồi

1. **Chọn trạng thái.** Gọi $a_n$ là số cách hoặc xác suất cần tìm ở bước $n$.
2. **Chia trường hợp.** Xét bước cuối hoặc cấu hình đầu tiên. Các trường hợp phải rời nhau và bao quát mọi khả năng.
3. **Đặt giá trị ban đầu.** Tính trực tiếp các trường hợp nhỏ rồi dùng truy hồi để tính tiếp.

**Ví dụ nhanh.** Leo $n$ bậc, mỗi bước lên một hoặc hai bậc.
Bước cuối xuất phát từ bậc $n-1$ hoặc $n-2$, nên $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$.
Có $a_0 = a_1 = 1$, trong đó $a_0$ đếm cách đứng yên. Suy ra $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

### 2 Nhận dạng theo cấu hình đầu hoặc bước cuối

– **Lát bảng** $2 \times n$. Cột đầu có một viên đặt dọc hoặc hai viên đặt ngang.
Phần còn lại tương ứng với bảng $2 \times (n-1)$ hoặc $2 \times (n-2)$.
– **Chuỗi bit và tập con.** Với chuỗi tránh 00, đuôi là 1 hoặc 10 khi độ dài từ 2 trở lên. Với tập con tránh hai số liên tiếp, xét có chọn phần tử cuối hay không.
Nếu các vị trí tạo vòng, chọn một vị trí làm mốc để tách trường hợp và kiểm tra cả cặp nối hai đầu.
– **Tháp Hà Nội.** Chuyển $n-1$ đĩa sang cọc phụ, chuyển đĩa lớn nhất, rồi chuyển lại $n-1$ đĩa. Số bước tối thiểu thỏa $H_n = 2H_{n-1} + 1$, $H_0 = 0$.
– **Hoán vị sai chỗ.** Với $D_n$ là số hoán vị không giữ nguyên vị trí nào, $D_0 = 1$, $D_1 = 0$ và $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ khi $n \geq 2$.
– **Chia miền.** Khi thêm một đường thẳng hoặc mặt phẳng, đếm số miền mà các giao tuyến hoặc giao điểm tạo ra trên đối tượng vừa thêm.

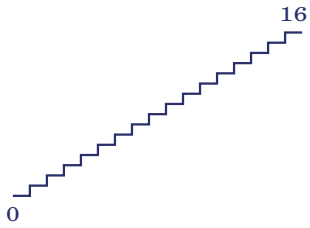
### 3 Truy hồi theo vị trí và theo cấu hình con

– **Bước nhảy trên đồ thị.** Với mỗi đỉnh $v$, cộng số đường đến các đỉnh kề ở bước trước để tính số đường đến $v$ ở bước này.
Nếu tính xác suất, nhân từng số hạng với xác suất chuyển tương ứng rồi mới cộng. Chỉ gộp các đỉnh khi chúng có cùng quy luật chuyển giữa các nhóm.
– **Dừng ở mốc.** Để chạm đích lần đầu ở bước $n$, chỉ chuyển vào đích ở bước cuối. Với xác suất chạm một trong hai mốc, đặt giá trị biên 0 và 1 theo mốc cần đạt.
– **Tam giác hóa và đường đi Catalan.** Cố định một cạnh của đa giác, chọn đỉnh thứ ba của tam giác chứa cạnh đó. Nhân số cách của hai phần còn lại rồi cộng theo các đỉnh đã chọn.
Đa giác lồi $n+2$ đỉnh và đường đi từ $(0,0)$ đến $(n,n)$ bằng bước phải, bước lên, không vượt lên trên $y = x$, cùng có $\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ cách.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

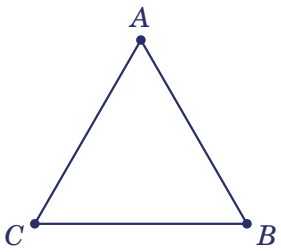
**Ví dụ 1. TME** Một robot tự hành thực hiện bài kiểm tra leo cầu thang gồm 16 bậc. Ở mỗi bước di chuyển, robot chỉ có thể bước lên đúng 1 bậc hoặc nhảy vọt lên 2 bậc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để robot leo từ sàn nhà lên đến đúng bậc thứ 16?




KẾT QUẢ

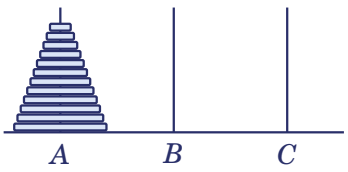
**Ví dụ 2. TME** Một con ếch đồ chơi chỉ nhảy vào các đỉnh của một tam giác đều $ABC$. Mỗi lần di chuyển, con ếch bắt buộc phải nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong hai đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch xuất phát từ đỉnh $B$ và thực hiện liên tiếp 11 lần nhảy. Biết xác suất để sau 11 lần nhảy con ếch quay trở về đúng đỉnh $B$ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a+b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Trong trò chơi Tháp Hà Nội kinh điển, có 3 chiếc cọc $A, B, C$ và 12 chiếc đĩa có kích thước đôi một khác nhau được xếp chồng lên nhau ở cọc $A$ theo thứ tự từ lớn đến nhỏ (đĩa lớn ở dưới, đĩa nhỏ ở trên). Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa từ cọc này sang cọc khác và không bao giờ được đặt đĩa lớn hơn lên trên đĩa nhỏ hơn. Hỏi số lần chuyển đĩa tối thiểu để di chuyển toàn bộ 12 chiếc đĩa từ cọc $A$ sang cọc $C$ là bao nhiêu?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 4. TME** Một bộ tạo mã nhị phân ngẫu nhiên tạo ra một chuỗi bit gồm 12 ký tự (mỗi ký tự chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 với xác suất bằng nhau $\frac{1}{2}$). Các bit được sinh độc lập. Tính xác suất để chuỗi bit được tạo ra không chứa hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau. Biết xác suất đó được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

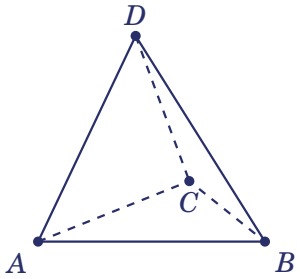
Tính $a+b$.

KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

## Vận dụng

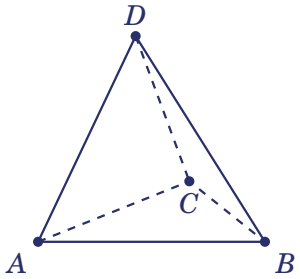
**Ví dụ 5. TME** Một con ếch chỉ nhảy vào các đỉnh của tứ diện $ABCD$ và có thể di chuyển tự do giữa các đỉnh với nhau, mỗi lần di chuyển đều phải từ đỉnh này di chuyển tới đỉnh khác. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách để con ếch di chuyển từ đỉnh $C$ sau khi nhảy liên tiếp 9 lần qua các đỉnh và kết thúc tại đỉnh $A$?




KẾT QUẢ

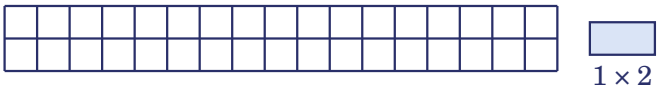
**Ví dụ 6. TME** Một con ếch đồ chơi nhảy ngẫu nhiên trên các đỉnh của tứ diện $ABCD$, mỗi bước nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong ba đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch bắt đầu từ đỉnh $C$ và thực hiện đúng 8 lần nhảy liên tiếp. Biết xác suất để sau 8 lần nhảy con ếch quay trở về đúng đỉnh $C$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Một lối đi bộ trong công viên có kích thước $2 \times 17$ mét cần được lát kín hoàn toàn bằng các viên đá hoa cương có kích thước $1 \times 2$ mét. Các viên đá có thể được lát dọc hoặc lát ngang nhưng không được chồng lấn lên nhau và không được cắt gọt. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để lát kín toàn bộ lối đi bộ nói trên? Các mép viên lát nằm trên các đường lưới đơn vị như hình.





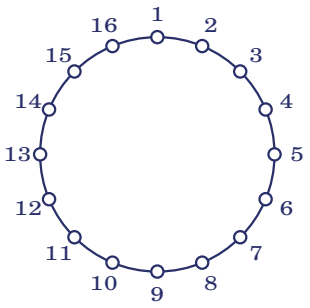

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Trong một buổi họp mặt cuối năm, có 7 người bạn tham gia một trò chơi bốc thăm đổi quà bí mật. Mỗi người mang theo đúng một món quà được đóng gói giống nhau. Ban tổ chức xáo trộn ngẫu nhiên cả 7 món quà rồi phát ngẫu nhiên lại cho 7 người, mỗi người nhận đúng 1 món quà. Tính xác suất để trong 7 người đó, có đúng 1 người nhận được đúng món quà do chính mình chuẩn bị. Biết xác suất được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

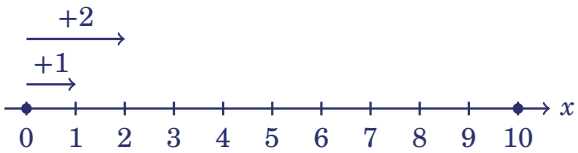
**Ví dụ 9. TME** Một chuỗi vòng tròn phong thủy gồm 16 hạt đá quý được kết liền nhau thành vòng khép kín. Người nghệ nhân dự định gắn các hạt đá màu đen hoặc màu trắng vào từng vị trí sao cho trên toàn bộ vòng tròn không có bất kỳ hai hạt đá màu đen nào nằm ở hai vị trí kề nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp màu các hạt đá trên vòng tròn thỏa mãn điều kiện đó? Các vị trí được đánh số cố định như hình.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Một robot thăm dò di chuyển dọc theo trục số, bắt đầu từ điểm gốc $O$ (tọa độ $x=0$). Tại mỗi bước, robot tung một đồng xu cân đối: nếu xuất hiện mặt ngửa thì tiến lên 1 đơn vị (+1), nếu xuất hiện mặt sấp thì nhảy vọt lên 2 đơn vị (+2). Gọi $P_n$ là xác suất để robot đặt chân lên đúng tọa độ $x=n$ trong hành trình của mình. Tính xác suất $P_{10}$ robot đặt chân lên tọa độ $x=10$. Biết $P_{10}=\dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và phân số tối giản).

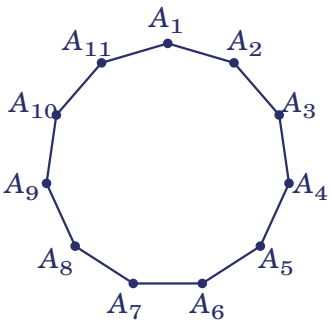
Tính $a+b$.




KẾT QUẢ

## Tổng hợp

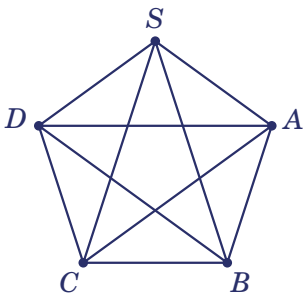
**Ví dụ 11. TME** Cho một đa giác lồi gồm 11 đỉnh $A_1,A_2,\ldots,A_{11}$. Người ta muốn kẻ các đường chéo không cắt nhau bên trong đa giác để phân chia toàn bộ đa giác lồi này thành đúng 9 hình tam giác. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phân chia đa giác thỏa mãn điều kiện trên?




KẾT QUẢ

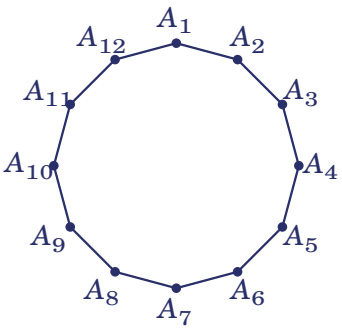
**Ví dụ 12. TME** Một hạt vi mô chuyển động trên đồ thị đầy đủ gồm năm đỉnh $S, A, B, C, D$. Mỗi bước, hạt nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong bốn đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Hạt xuất phát từ $S$. Xác suất để hạt trở về $S$ sau đúng 7 bước là phân số tối giản $\frac{a}{b}$.

Tính $a+b$.




KẾT QUẢ

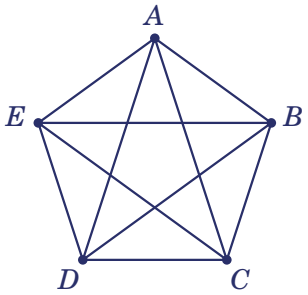
**Ví dụ 13. TME** Có bao nhiêu cách tô màu các đỉnh của một đa giác đều 12 cạnh (chu trình $C_{12}$) bằng 3 màu đỏ, xanh, vàng sao cho bất kỳ hai đỉnh kề nhau nào của đa giác cũng được tô bởi hai màu khác nhau?




KẾT QUẢ

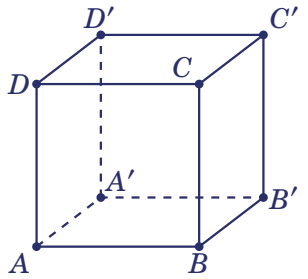
**Ví dụ 14. TME** Một con ếch di chuyển ngẫu nhiên trên 5 đỉnh $\{A, B, C, D, E\}$ của một khu vườn. Tại mỗi bước ở các đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$, con ếch nhảy sang một trong 4 đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau $\frac{1}{4}$. Tuy nhiên, đỉnh $E$ là một hố nước sâu (trạng thái hấp thụ): nếu con ếch nhảy vào đỉnh $E$ thì nó sẽ bị kẹt lại vĩnh viễn và trò chơi kết thúc. Con ếch bắt đầu từ đỉnh $A$. Tính xác suất để con ếch rơi vào hố nước $E$ ở đúng lần nhảy thứ 6. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a+b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một con ếch di chuyển trên các đỉnh của một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ gồm 8 đỉnh. Ở mỗi bước, từ đỉnh hiện tại, con ếch chỉ nhảy sang một trong 3 đỉnh kề với nó dọc theo các cạnh của hình lập phương. Con ếch xuất phát từ đỉnh $A$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để sau đúng 8 lần nhảy, con ếch quay trở về đúng đỉnh $A$?

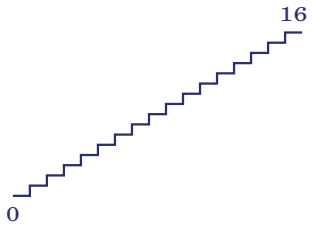



KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận dạng

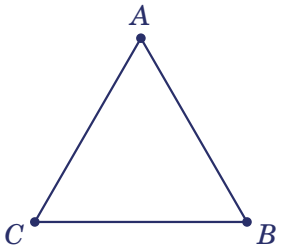
**Bài 1. TME** Một robot phục vụ trong nhà hàng di chuyển lên một tầng lầu qua cầu thang gồm 16 bậc. Ở mỗi nhịp di chuyển, robot chỉ có thể bước lên đúng 1 bậc hoặc bước sải 2 bậc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để robot bước từ chân cầu thang lên đến đúng bậc thứ 16?




KẾT QUẢ

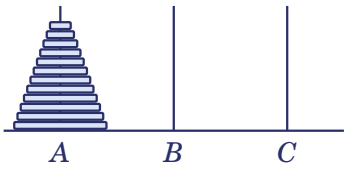
**Bài 2. TME** Một con ếch nhảy ngẫu nhiên trên các đỉnh của tam giác đều $ABC$, mỗi lần nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong hai đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch bắt đầu từ đỉnh $B$ và nhảy liên tiếp 11 lần. Biết xác suất để sau 11 lần nhảy con ếch quay về lại đúng đỉnh $B$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a+b$.




KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Trong bài toán Tháp Hà Nội nổi tiếng, có 12 chiếc đĩa có đường kính đôi một khác nhau được xếp chồng lên nhau ở cọc thứ nhất theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên đĩa lớn. Hỏi số lần chuyển đĩa tối thiểu khi có ba cọc, mỗi lượt chỉ chuyển một đĩa trên cùng và không đặt đĩa lớn lên đĩa nhỏ để đưa toàn bộ 12 chiếc đĩa sang cọc thứ ba là bao nhiêu?



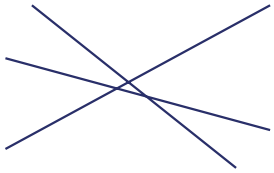

KẾT QUẢ

**Bài 4. TME** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 12 lần liên tiếp. Các lần gieo độc lập. Tính xác suất để trong chuỗi kết quả thu được không có bất kỳ hai lần xuất hiện mặt sấp ($S$) nào nằm ở hai lần gieo liên tiếp nhau. Biết xác suất này có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a+b$.

KẾT QUẢ

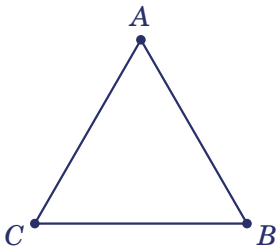
**Bài 5. TME** Trên một mặt phẳng bảng vẽ kỹ thuật, người ta kẻ 60 đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường thẳng nào song song với nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy tại một điểm. Hỏi 60 đường thẳng đó chia mặt phẳng thành tất cả bao nhiêu miền rời nhau?



KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Một con ếch đồ chơi nhảy giữa ba đỉnh của tam giác đều $ABC$. Mỗi bước di chuyển, con ếch nhảy sang một trong hai đỉnh còn lại với xác suất như nhau. Con ếch xuất phát từ đỉnh $A$ và nhảy đúng 12 lần liên tiếp. Biết xác suất để ở lần nhảy thứ 12 con ếch đặt chân lên đỉnh $B$ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

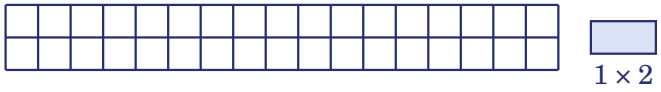
Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

## Vận dụng

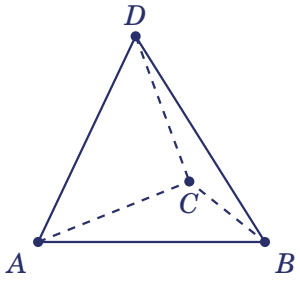
**Bài 7. TME** Một sân khấu biểu diễn hình chữ nhật có kích thước $2 \times 17$ mét cần được lát kín hoàn toàn bằng các tấm ván gỗ có kích thước $1 \times 2$ mét. Các tấm ván có thể đặt theo chiều dọc hoặc chiều ngang nhưng không được xếp đè lên nhau và không được cắt rời. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lát kín sân khấu? Các mép viên lát nằm trên các đường lưới đơn vị như hình.




KẾT QUẢ

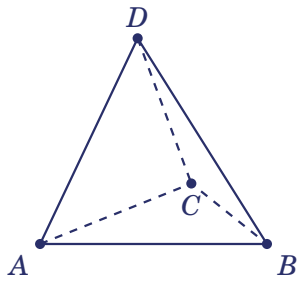
**Bài 8. TME** Một con ếch di chuyển ngẫu nhiên trên các đỉnh của tứ diện $ABCD$, mỗi bước nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong ba đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch xuất phát từ đỉnh $C$ và nhảy liên tiếp 8 lần. Tính xác suất để sau 8 lần nhảy con ếch quay trở về đúng đỉnh $C$. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Một con ếch chỉ nhảy vào các đỉnh của tứ diện $ABCD$ và có thể di chuyển tự do giữa các đỉnh với nhau, mỗi lần di chuyển đều phải từ đỉnh này di chuyển tới đỉnh khác. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách để con ếch di chuyển từ đỉnh $C$ sau khi nhảy liên tiếp 8 lần qua các đỉnh và kết thúc tại đỉnh $A$?




KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một hệ thống viễn thông tạo ngẫu nhiên một chuỗi bit nhị phân độ dài 13 (mỗi ký tự chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 với xác suất $\frac{1}{2}$). Các bit được sinh độc lập. Tính xác suất để chuỗi bit thu được không chứa hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Cho tập hợp các số tự nhiên $X = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập hợp con của $X$ (tính cả tập hợp rỗng) sao cho trong mỗi tập hợp con đó không chứa bất kỳ hai số tự nhiên nào liên tiếp nhau?

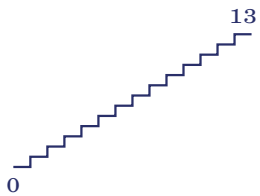
KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một nhóm gồm 7 người bạn tham gia một buổi trao đổi quà tặng ngẫu nhiên. Mỗi người mang đến đúng 1 gói quà được dán nhãn tên của mình. Toàn bộ 7 gói quà được thu lại, xáo trộn đều rồi phát ngẫu nhiên cho 7 người, mỗi người nhận đúng 1 gói quà. Tính xác suất để có đúng 1 người nhận lại đúng gói quà của chính mình. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

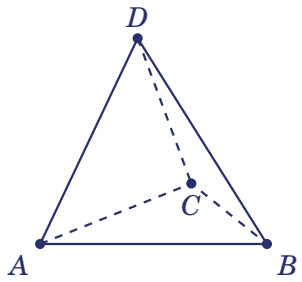
**Bài 13. TME** Một vận động viên điền kinh leo một cầu thang dốc gồm 13 bậc. Ở mỗi bước nhảy, vận động viên có thể bước lên 1 bậc, nhảy qua 2 bậc hoặc sải bước mạnh lên 3 bậc một lúc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để vận động viên nhảy từ mặt đất lên đến đúng bậc thứ 13 của cầu thang?




KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Một con ếch đồ chơi nhảy ngẫu nhiên trên 4 đỉnh của tứ diện $ABCD$, mỗi bước nhảy từ đỉnh hiện tại sang một trong 3 đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch xuất phát từ đỉnh $C$ và thực hiện liên tiếp 9 lần nhảy. Biết xác suất để sau 9 lần nhảy con ếch đến đúng đỉnh $A$ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $b - 3a$.



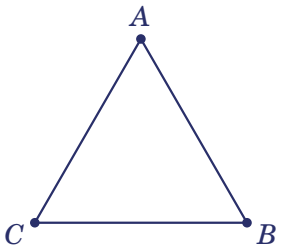

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Một nhân viên bưu tá chuẩn bị phát 7 lá thư riêng biệt cho 7 khách hàng khác nhau. Do sơ suất, người này đã bỏ ngẫu nhiên 7 lá thư vào 7 phong bì ghi sẵn địa chỉ của 7 khách hàng đó. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bỏ thư sao cho không có bất kỳ lá thư nào được bỏ đúng phong bì của người nhận tương ứng?

KẾT QUẢ

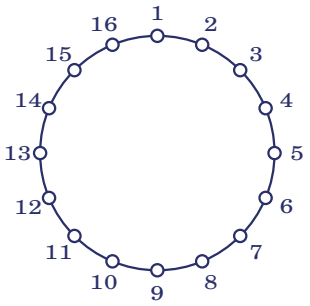
**Bài 16. TME** Một con ếch nhảy ngẫu nhiên giữa 3 đỉnh của tam giác đều $ABC$, mỗi bước nhảy sang một trong hai đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau. Con ếch bắt đầu từ đỉnh $A$ và thực hiện đúng 12 lần nhảy liên tiếp. Biết xác suất để sau 12 lần nhảy con ếch quay trở về đúng đỉnh $A$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

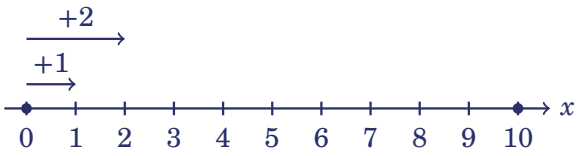
**Bài 17. TME** Một vòng đeo tay phong thủy gồm 16 viên ngọc được xâu khép kín thành vòng tròn. Người thợ kim hoàn muốn đính các viên ngọc màu đen hoặc màu trắng vào từng vị trí sao cho trên toàn bộ vòng tròn không có bất kỳ hai viên ngọc màu đen nào nằm cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bố trí màu cho các viên ngọc trên chiếc vòng? Các vị trí được đánh số cố định như hình.




KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một robot di chuyển trên trục tọa độ $Ox$ bắt đầu từ gốc $O$ ($x = 0$). Tại mỗi bước, robot tiến lên 1 đơn vị với xác suất $\frac{1}{2}$ hoặc nhảy vọt lên 2 đơn vị với xác suất $\frac{1}{2}$. Tính xác suất để trong hành trình của mình, robot đặt chân lên đúng tọa độ $x = 10$. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

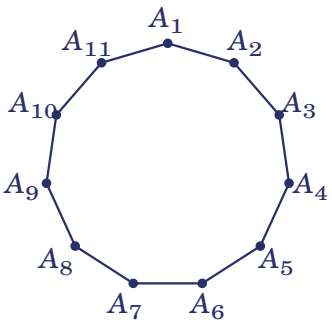
Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

## Tổng hợp

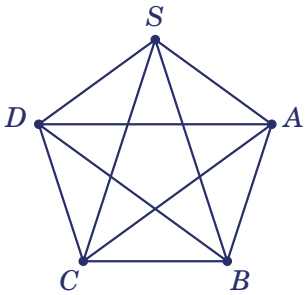
**Bài 19. TME** Cho một đa giác lồi gồm 11 đỉnh. Người ta phân chia đa giác lồi này thành đúng 9 hình tam giác bằng cách kẻ các đường chéo không cắt nhau bên trong đa giác. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phân chia đa giác lồi nói trên?




KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Một hạt vi mô di chuyển ngẫu nhiên trên 5 đỉnh của một đồ thị đầy đủ $K_5$ (gồm 5 đỉnh đôi một nối với nhau). Tại mỗi bước, hạt nhảy sang một trong 4 đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau $\frac{1}{4}$. Hạt xuất phát từ đỉnh $S$ và nhảy đúng 7 lần liên tiếp. Biết xác suất để sau 7 lần nhảy hạt quay trở về đúng đỉnh $S$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

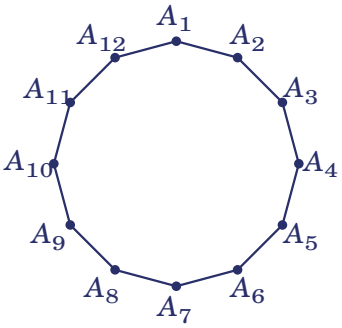
Tính $a + b$.




KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

**Bài 21. TME** Một bảng quảng cáo có hình dạng đa giác đều 12 cạnh (chu trình $C_{12}$). Người ta dùng 3 màu sơn đỏ, vàng, xanh để tô màu cho 12 đỉnh của bảng quảng cáo sao cho bất kỳ hai đỉnh nào được nối với nhau bởi một cạnh cũng có màu khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu cho 12 đỉnh của bảng quảng cáo?



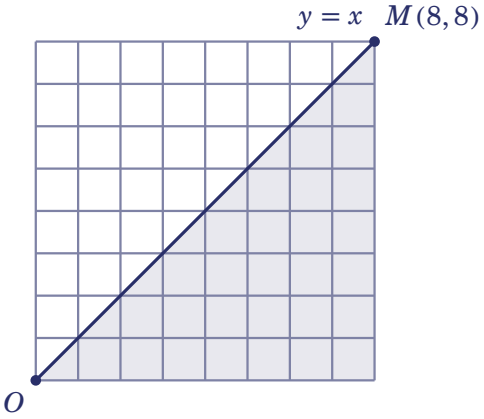

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Một nhóm gồm 8 học sinh cùng tham gia trò chơi đổi hộp quà bí mật. Mỗi bạn mang theo đúng một hộp quà của mình. Ban tổ chức thu gom lại cả 8 hộp quà rồi phát ngẫu nhiên cho 8 bạn, mỗi bạn nhận đúng một hộp. Tính xác suất để có đúng 2 bạn nhận lại chính hộp quà mà mình đã mang đến. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $50a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Trên một mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét lưới ô vuông kích thước $8 \times 8$ từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(8,8)$. Một robot di chuyển từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(8,8)$ bằng các bước đi sang phải 1 đơn vị $(+1,0)$ hoặc đi lên trên 1 đơn vị $(0,+1)$ sao cho robot không bao giờ đi lên phía trên đường thẳng $y = x$ (tức là tại mọi vị trí (x, y) trên đường đi luôn có $x \geq y$). Hỏi có tất cả bao nhiêu đường đi hợp lệ?




KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Một thiết bị tạo tín hiệu số ngẫu nhiên phát ra một chuỗi nhị phân độ dài 12 (mỗi ký tự nhận giá trị 0 hoặc 1 với xác suất bằng nhau $\frac{1}{2}$). Các bit được sinh độc lập. Tính xác suất để chuỗi tín hiệu phát ra không chứa bất kỳ ba chữ số 0 nào đứng liền kề nhau (cụm "000"). Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

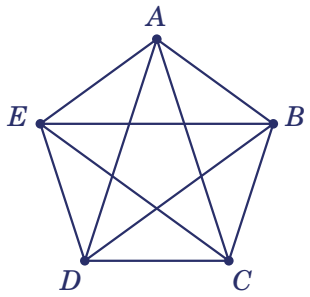
Tính $a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Trong không gian, cho 25 mặt phẳng phân biệt sao cho hai mặt phẳng bất kỳ cắt nhau theo một đường thẳng, ba mặt phẳng bất kỳ có đúng một điểm chung và không có bốn mặt phẳng nào đi qua cùng một điểm. Hỏi chúng chia không gian thành bao nhiêu miền?

KẾT QUẢ

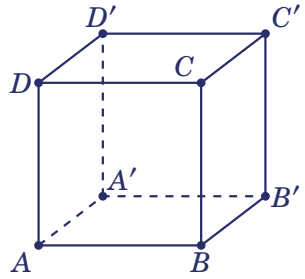
**Bài 26. TME** Một robot di chuyển ngẫu nhiên trên 5 đỉnh $\{A, B, C, D, E\}$ của một mạng lưới thông tin liên kết đầy đủ. Tại mỗi bước ở các đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$, robot nhảy sang một trong 4 đỉnh còn lại với xác suất bằng nhau $\frac{1}{4}$. Tuy nhiên, đỉnh $E$ là một trạm kiểm soát an ninh (trạng thái hấp thụ): nếu robot đi vào trạm $E$ thì robot sẽ bị giữ lại và hành trình kết thúc ngay lập tức. Robot bắt đầu từ đỉnh $A$. Tính xác suất để robot bị giữ lại tại trạm $E$ ở đúng lần di chuyển thứ 6. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).




Tính $a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một con ếch di chuyển trên 8 đỉnh của một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Ở mỗi bước, con ếch chỉ nhảy sang một trong 3 đỉnh kề với đỉnh hiện tại dọc theo các cạnh của hình lập phương. Con ếch xuất phát từ đỉnh $A$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để sau đúng 8 lần nhảy, con ếch quay trở về đúng đỉnh $A$?

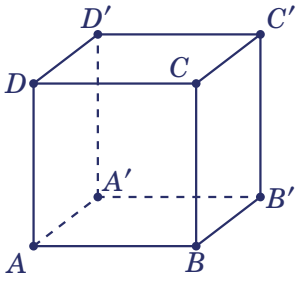



KẾT QUẢ


thuvientoanhoc.com

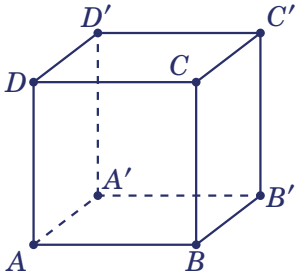
**Bài 28. TME** Một con ếch đồ chơi nhảy ngẫu nhiên trên 8 đỉnh của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Từ một đỉnh bất kỳ, con ếch nhảy sang một trong 3 đỉnh kề theo cạnh của lập phương với xác suất bằng nhau $\frac{1}{3}$. Con ếch bắt đầu từ đỉnh $A$ và nhảy đúng 6 lần. Tính xác suất để sau 6 lần nhảy con ếch đến đúng đỉnh $C$. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một con ếch nhảy trên các đỉnh của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ gồm 8 đỉnh. Mỗi bước, con ếch chỉ nhảy sang một trong 3 đỉnh kề với đỉnh hiện tại theo cạnh của lập phương. Con ếch bắt đầu hành trình từ đỉnh $A$ và thực hiện liên tiếp 9 lần nhảy. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách di chuyển để sau 9 lần nhảy, con ếch đặt chân đến đúng đỉnh $C'$ (đỉnh đối diện với đỉnh $A$ qua tâm của khối lập phương)?




KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Một người tham gia một trò chơi cược chuỗi với số vốn ban đầu là 3 triệu đồng, đặt mục tiêu tích lũy đủ 7 triệu đồng để dừng cuộc chơi. Các ván độc lập. Ở mỗi ván cược, người này thắng với xác suất $\frac{2}{3}$ (nhận thêm 1 triệu đồng) và thua với xác suất $\frac{1}{3}$ (mất 1 triệu đồng). Cuộc chơi kết thúc ngay khi người này đạt mốc 7 triệu đồng hoặc mất toàn bộ số tiền (phá sản). Tính xác suất để người chơi hoàn thành mục tiêu 7 triệu đồng mà không bị phá sản. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Kĩ năng gộp biến cố
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-19

# BUỔI 19. KĨ NĂNG GỘP BIẾN CỐ

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Gộp khối và gộp theo thuộc tính

– **Gộp khối.** Nếu $k$ trong $n$ đối tượng phân biệt phải đứng liền nhau, xem nhóm đó là một khối. Xếp $n-k+1$ đơn vị rồi xếp bên trong khối, được $(n-k+1)!k!$ cách. Trên bàn tròn, với $m$ đơn vị phân biệt, có $(m-1)!$ cách nếu các phép quay được xem là một. Nếu ghế có đánh số và có ít nhất hai đơn vị, nhân thêm số ghế.
– **Gộp theo số dư.** Chia tập số thành các lớp dư. Chẳng hạn, ba số có tổng chia hết cho 3 khi ba số dư giống nhau hoặc lần lượt là $0,1,2$. Tính số cách trong mỗi kiểu rồi cộng.
– **Ghép cặp đối xứng.** Nếu tập có một phần tử lẻ cố định, thao tác thêm hoặc bỏ phần tử ấy ghép mỗi tập con có tổng chẵn với đúng một tập con có tổng lẻ.

### 2 Gộp lượt thành vòng đấu

– **Nhận diện vòng lặp.** Chọn một nhóm lượt sao cho khi chưa phân thắng thua, trò chơi trở lại đúng trạng thái ban đầu với cùng luật xác suất. Gọi $u,v$ là xác suất hai bên thắng trong một vòng. Khi $u+v>0$, xác suất bên thứ nhất thắng chung cuộc là $\dfrac{u}{u+v}$.
– **Hai người luân phiên.** Nếu $A$ đi trước, các lượt độc lập và xác suất thành công mỗi lượt lần lượt là $p_A,p_B$, thì $u=p_A$ và $v=(1-p_A)p_B$. Với ba người, xác suất người thứ ba thắng trong vòng là $(1-p_A)(1-p_B)p_C$.
– **Thắng cách biệt hai điểm.** Từ thế hòa, gộp hai ván độc lập thành một vòng. Hai ván cùng thắng hoặc cùng thua cho kết quả chung cuộc. Một thắng, một thua đưa trận đấu về thế hòa.
– **Rút không hoàn lại.** Thành phần hộp thay đổi sau mỗi lượt, nên cần cập nhật số vật còn lại. Nếu ai rút bi đỏ đầu tiên thì thắng, có thể gộp theo vị trí xuất hiện của viên đỏ đầu tiên.

### 3 Gộp các trường hợp trong xác suất có điều kiện

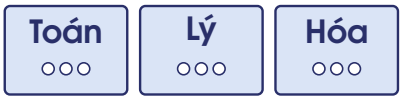
– Nếu các biến cố $H_i$ xung khắc đôi một và cùng có $P(A\mid H_i)=p$, thì với $H=\bigcup_i H_i$ có xác suất dương, ta có $P(A\mid H)=p$. Khi tính xác suất toàn phần, nhóm này đóng góp $pP(H)$.
– **Truy nguyên nguồn gốc.** Xác suất cần tìm là $P(H\mid A)=\dfrac{P(H)P(A\mid H)}{P(A)}$. Tính mẫu số theo các nguồn có thể tạo ra kết quả quan sát.
– **Đổi cửa.** Trong trò chơi $n$ cửa, cửa ban đầu có xác suất trúng $\dfrac{1}{n}$. Nếu người dẫn luôn mở $k$ cửa không có thưởng và người chơi đổi đều sang một trong $n-1-k$ cửa còn lại, xác suất thắng khi đổi là $\dfrac{n-1}{n(n-1-k)}$.
– **Gộp theo trạng thái.** Khi bit đi qua nhiều trạm, chỉ cần xét số lần bị đảo là chẵn hay lẻ. Khi rút đến viên đen thứ $r$ ở lượt $k$, gộp theo hai điều kiện: có đúng $r-1$ viên đen trong $k-1$ lượt đầu và lượt $k$ rút được viên đen.


thuvientoanhoc.com

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Có 3 học sinh chuyên Toán, 3 học sinh chuyên Lý và 3 học sinh chuyên Hóa cùng tham gia một buổi chụp ảnh kỷ yếu. Người thợ ảnh yêu cầu xếp 9 học sinh này thành một hàng ngang sao cho các bạn học sinh cùng một lớp chuyên luôn đứng liền kề nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu của người thợ ảnh?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi gieo xúc xắc luân phiên bằng một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Mỗi lượt một người gieo 1 lần. Ai gieo được mặt 6 chấm trước sẽ là người chiến thắng và cuộc chơi kết thúc ngay lập tức. An là người được quyền gieo trước. Tính xác suất để An là người chiến thắng cuộc chơi. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất này có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $200a + b$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Cho tập hợp các số tự nhiên $S = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một bộ gồm 3 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3?

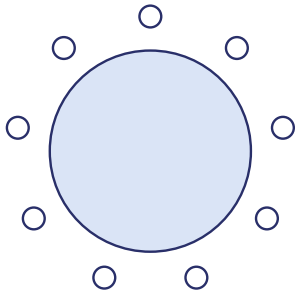
KẾT QUẢ

### Vận dụng

**Ví dụ 4. TME** Hai xạ thủ chuyên nghiệp $X$ và $Y$ thi đấu bắn súng đối kháng. Mỗi lượt thi đấu, một xạ thủ bắn 1 phát đạn. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ $X$ là 0,7; xác suất bắn trúng bia của xạ thủ $Y$ là 0,6. Hai người luân phiên bắn súng, xạ thủ $X$ được quyền bắn trước. Ai bắn trúng bia trước là người giành chiến thắng chung cuộc. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất để xạ thủ $X$ thắng cuộc có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Có 5 bạn nam và 4 bạn nữ cùng tham gia một buổi tiệc trà. Ban tổ chức chuẩn bị một chiếc bàn tròn gồm 9 chiếc ghế không đánh số. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp 9 bạn ngồi vào bàn tròn sao cho 5 bạn nam luôn ngồi ở 5 chiếc ghế liền kề nhau? Hai cách xếp chỉ khác nhau bởi phép quay được tính là một.



KẾT QUẢ

**Ví dụ 6. TME** Một chiếc hộp kín đựng 7 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen có kích thước và khối lượng như nhau. Người ta rút ngẫu nhiên từng viên bi một không hoàn lại ra khỏi hộp cho đến khi rút được viên bi màu đen thứ 3 thì dừng lại. Tính xác suất để quá trình rút bi dừng lại ở đúng lần rút thứ 6. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Từ tập hợp các chữ số thập phân $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số được lập có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Một nhà máy điện tử có 3 dây chuyền $D_1, D_2, D_3$ cùng sản xuất một linh kiện vi xử lý. Dây chuyền $D_1$ áp dụng công nghệ mới, sản xuất 40% sản lượng của nhà máy với tỉ lệ sản phẩm lỗi chỉ là 1%. Hai dây chuyền $D_2$ và $D_3$ cùng áp dụng công nghệ cũ, sản xuất lần lượt 35% và 25% sản lượng của nhà máy với cùng tỉ lệ sản phẩm lỗi là 5%. Lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ kho của nhà máy và kiểm tra thấy nó bị lỗi. Tính xác suất để linh kiện lỗi đó do dây chuyền $D_1$ sản xuất. Biết xác suất có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

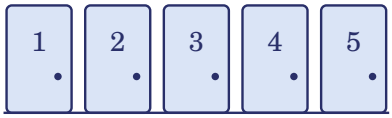
KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 9. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 36\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Trong một trò chơi truyền hình có 5 cánh cửa được đóng kín và đánh số từ 1 đến 5. Phía sau 1 cánh cửa có một chiếc xe hơi phần thưởng đắt giá, phía sau 4 cánh cửa còn lại là 4 con dê. Vị trí ô tô phân bố đều trên các cửa. Người chơi chọn cửa số 1. Người dẫn chương trình (người biết chính xác vị trí chiếc xe hơi) mở 2 cánh cửa có dê trong 4 cánh cửa còn lại (từ cửa 2 đến cửa 5). Sau đó, người dẫn chương trình đưa ra đề nghị cho người chơi đổi lựa chọn sang một cửa chọn đều trong hai cửa chưa mở ngoài cửa ban đầu. Tính xác suất để người chơi trúng chiếc xe hơi nếu đồng ý đổi lựa chọn. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $1000a + 100b$.




KẾT QUẢ

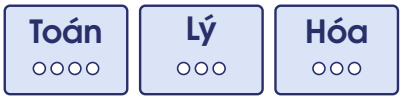
**Ví dụ 11. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 13\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập hợp con của $X$ sao cho tổng tất cả các phần tử trong tập hợp con đó là một số lẻ?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Một túi vải đựng 6 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh có kích thước giống hệt nhau. Hai bạn An và Bình chơi một trò chơi rút bi không hoàn lại. An rút trước, sau đó đến Bình, rồi luân phiên nhau mỗi lần rút 1 viên bi. Ai rút được viên bi màu đỏ trước tiên sẽ là người chiến thắng cuộc chơi. Tính xác suất để An giành chiến thắng. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $5a + b$.

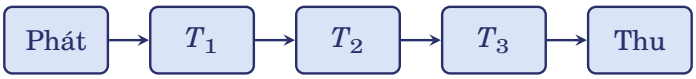
KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Trên một giá sách có 4 cuốn sách Toán khác nhau, 3 cuốn sách Vật lý khác nhau và 3 cuốn sách Hóa học khác nhau. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp cả 10 cuốn sách đó thành một hàng ngang trên giá sao cho các cuốn sách cùng một môn học luôn đứng liền nhau?




KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Một tín hiệu số nhị phân (gồm các bit 0 hoặc 1) được truyền từ trạm phát qua 3 trạm chuyển tiếp liên tiếp $T_1, T_2, T_3$ rồi đến trạm thu. Tại mỗi trạm chuyển tiếp, do ảnh hưởng của nhiễu đường truyền, bit tín hiệu bị đảo ngược (từ 0 thành 1 hoặc từ 1 thành 0) với xác suất p = 0,1; và được giữ nguyên vẹn với xác suất 0,9. Quá trình nhiễu tại các trạm là độc lập nhau. Tính xác suất để bit tín hiệu nhận được ở trạm thu trùng khớp chính xác với bit tín hiệu gốc phát đi từ trạm phát. Biết xác suất có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

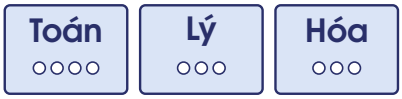
**Ví dụ 15. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 42\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một tập con gồm 3 phần tử phân biệt của $S$ sao cho tổng của 3 phần tử đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

## C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

### Nhận dạng

**Bài 1. TME** Có 4 học sinh chuyên Toán, 3 học sinh chuyên Vật lý và 3 học sinh chuyên Hóa học cùng tham gia một buổi chụp ảnh lưu niệm. Người hướng dẫn yêu cầu xếp 10 học sinh này thành một hàng ngang sao cho các bạn học sinh cùng một lớp chuyên luôn đứng liền kề nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp thỏa mãn?




KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi gieo xúc xắc luân phiên bằng một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Mỗi lượt một người gieo 1 lần. Ai gieo được mặt 5 chấm hoặc 6 chấm trước sẽ thắng và cuộc chơi kết thúc ngay lập tức. An là người được quyền gieo trước. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất để An chiến thắng cuộc chơi có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $400a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Cho tập hợp các số tự nhiên $S = \{1, 2, 3, \ldots, 27\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một bộ gồm 3 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

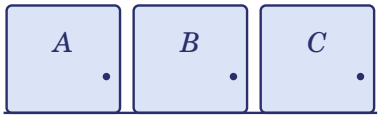
**Bài 4. TME** Hai bạn Nam và Việt chơi trò tung đồng xu luân phiên bằng một đồng xu cân đối đồng chất (mặt ngửa xuất hiện với xác suất $\frac{1}{2}$). Mỗi lượt một bạn tung 1 lần, Nam tung trước. Ai tung được mặt ngửa trước sẽ là người chiến thắng và trò chơi dừng lại. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất Nam thắng cuộc là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Từ tập hợp các chữ số $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số có đúng 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

KẾT QUẢ

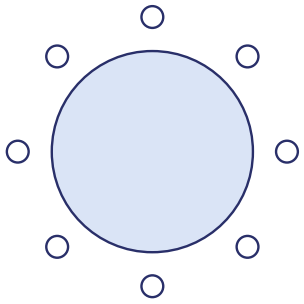
**Bài 6. TME** Trong một gameshow truyền hình có 3 cánh cửa $A, B, C$ đóng kín, phía sau 1 cánh cửa có một chiếc xe hơi đắt giá, phía sau 2 cánh cửa còn lại là 2 con dê. Giả sử vị trí ô tô phân bố đều trên ba cửa và người chơi chọn cửa $A$. Người dẫn chương trình (biết rõ vị trí ô tô) luôn mở một cửa có dê trong hai cửa còn lại, chọn đều nếu cả hai đều có dê. Lần này người dẫn mở cửa $B$. Sau đó người dẫn chương trình hỏi người chơi có muốn đổi sang cánh cửa $C$ hay không. Tính xác suất người chơi trúng ô tô nếu đồng ý đổi cửa. Biết xác suất có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $2000a + 100b$.




KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 7. TME** Có 4 bạn nam và 4 bạn nữ cùng tham gia một buổi tiệc sinh nhật. Ban tổ chức chuẩn bị một chiếc bàn tròn gồm 8 chiếc ghế không đánh số. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp 8 bạn ngồi vào bàn tròn sao cho 4 bạn nam luôn ngồi ở 4 chiếc ghế liền kề nhau? Hai cách xếp chỉ khác nhau bởi phép quay được tính là một.



KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Hai xạ thủ $X$ và $Y$ thi đấu bắn súng đối kháng. Mỗi lượt một xạ thủ bắn 1 phát đạn. Xác suất bắn trúng của $X$ là 0,8; của $Y$ là 0,5. Hai người luân phiên bắn súng, $X$ bắn trước. Ai bắn trúng bia trước là người chiến thắng chung cuộc. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất để $X$ thắng cuộc có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $200a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 33\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một bộ gồm 3 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một hộp kín đựng 8 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen có kích thước như nhau. Người ta rút ngẫu nhiên từng viên bi một không hoàn lại ra khỏi hộp cho đến khi rút được viên bi màu đen thứ 3 thì dừng lại. Tính xác suất để quá trình rút bi dừng lại ở đúng lần rút thứ 5. Biết xác suất đó là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $20a + b$.

KẾT QUẢ

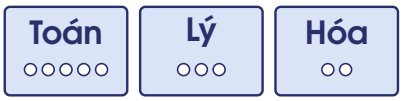
**Bài 11. TME** Từ tập hợp các chữ số $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số được lập có đúng 1 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn?

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một nhà máy điện tử có 3 dây chuyền $D_1, D_2, D_3$ cùng sản xuất linh kiện. Dây chuyền $D_1$ sản xuất 40% sản lượng với tỉ lệ lỗi 2%. Hai dây chuyền $D_2$ và $D_3$ cùng áp dụng công nghệ cũ, sản xuất lần lượt 35% và 25% sản lượng với cùng tỉ lệ lỗi là 5%. Lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ kho và thấy nó bị lỗi. Tính xác suất để linh kiện lỗi đó do dây chuyền $D_1$ sản xuất. Biết xác suất có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

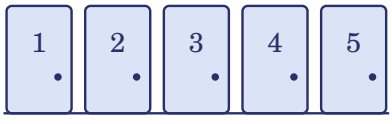
KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Trên một giá sách có 5 cuốn sách Toán khác nhau, 3 cuốn sách Vật lý khác nhau và 2 cuốn sách Hóa học khác nhau. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp cả 11 cuốn sách đó thành một hàng ngang sao cho các cuốn sách cùng một môn học luôn đứng liền kề nhau?




KẾT QUẢ

**Bài 14. TME** Trong một trò chơi truyền hình có 5 cánh cửa đóng kín, phía sau 1 cánh cửa có một chiếc xe hơi đắt giá, 4 cánh cửa còn lại là 4 con dê. Vị trí ô tô phân bố đều trên các cửa. Người chơi chọn cửa số 1. Người dẫn chương trình (biết rõ vị trí xe) mở 1 cửa có dê trong 4 cửa còn lại. Sau đó người dẫn chương trình cho người chơi đổi sang một cửa chọn đều trong ba cửa chưa mở ngoài cửa ban đầu. Tính xác suất để người chơi trúng xe hơi nếu đổi cửa. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $100a + 100b$.




KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập hợp con của $X$ sao cho tổng tất cả các phần tử trong tập hợp con đó là một số lẻ?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Hai người $A$ và $B$ chơi trò tung đồng xu luân phiên. $A$ tung một đồng xu có xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,6; $B$ tung đồng xu có xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,5. $A$ được quyền tung trước. Ai tung được mặt ngửa trước là người thắng cuộc. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất $A$ thắng cuộc là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

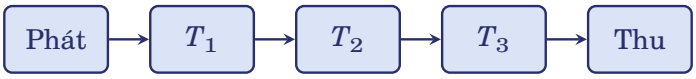
KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 17. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 3 số được chọn là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Một tín hiệu số nhị phân được truyền từ trạm phát qua 3 trạm chuyển tiếp liên tiếp $T_1, T_2, T_3$ rồi đến trạm thu. Tại mỗi trạm chuyển tiếp, bit tín hiệu bị đảo ngược với xác suất p = 0,2 và giữ nguyên với xác suất 0,8. Nhiễu ở các trạm độc lập nhau. Tính xác suất để bit tín hiệu ở trạm thu trùng khớp chính xác với bit gốc phát đi. Biết xác suất có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $20a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Một nhóm học sinh gồm 3 bạn nam và 5 bạn nữ cùng xếp thành một hàng dọc để vào lớp học. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp hàng dọc sao cho 3 bạn nam luôn đứng liền kề nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Một túi vải đựng 5 viên bi đỏ và 7 viên bi xanh giống hệt nhau. Hai bạn An và Bình chơi rút bi không hoàn lại, An rút trước rồi luân phiên mỗi lần 1 viên bi. Ai rút được bi đỏ trước sẽ thắng cuộc. Biết xác suất để An thắng cuộc là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $20a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 45\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một tập con gồm 3 phần tử phân biệt của $S$ sao cho tổng của 3 phần tử đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 22. TME** Tỉ lệ người mắc một căn bệnh trong cộng đồng dân cư là 1%. Một xét nghiệm y tế chẩn đoán bệnh có độ nhạy 95% (xác suất người có bệnh cho kết quả dương tính là 0,95) và độ đặc hiệu 90% (xác suất người không bệnh cho kết quả âm tính là 0,90). Một người được chọn ngẫu nhiên đi xét nghiệm và nhận kết quả dương tính. Tính xác suất người này thực sự mắc bệnh. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 14\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập hợp con của $X$ sao cho tổng tất cả các phần tử trong tập hợp con đó là một số lẻ?

KẾT QUẢ

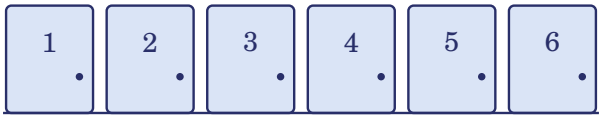
**Bài 24. TME** Ba xạ thủ $A, B, C$ thi đấu bắn súng đối kháng luân phiên theo thứ tự $A$ bắn trước, sau đó đến $B$, rồi đến $C$, rồi lặp lại. Xác suất bắn trúng bia của $A, B, C$ lần lượt là 0,5; 0,4 và 0,3. Ai bắn trúng bia trước là người chiến thắng và cuộc thi kết thúc ngay. Các lượt thử độc lập. Biết xác suất $A$ thắng cuộc là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $10a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 120\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một cặp gồm 2 số phân biệt từ tập $S$ sao cho tổng của 2 số được chọn là một số chia hết cho 5?

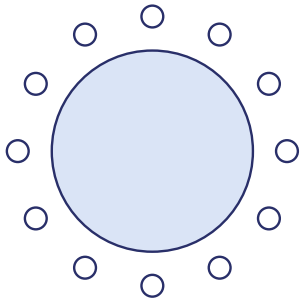
KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Trong một trò chơi lớn có 6 cánh cửa đóng kín, phía sau 1 cánh cửa có một chiếc xe hơi phần thưởng, 5 cánh cửa còn lại là 5 con dê. Vị trí ô tô phân bố đều trên các cửa. Người chơi chọn cửa số 1. Người dẫn chương trình (biết rõ vị trí ô tô) mở ngẫu nhiên 3 cánh cửa có dê trong 5 cánh cửa còn lại. Sau đó người dẫn chương trình cho người chơi quyền đổi sang một cửa chọn đều trong hai cửa chưa mở ngoài cửa ban đầu. Tính xác suất để người chơi trúng chiếc xe hơi nếu đồng ý đổi lựa chọn. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $1000a + 100b$.




KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Có 6 cặp vợ chồng (gồm 6 người chồng và 6 người vợ, tổng cộng 12 người) cùng ngồi quanh một chiếc bàn tròn có 12 ghế không đánh số. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho mỗi cặp vợ chồng luôn ngồi ở hai chiếc ghế liền kề nhau? Hai cách xếp chỉ khác nhau bởi phép quay được tính là một.



KẾT QUẢ

**Bài 28. TME** Một căn bệnh hiếm có tỉ lệ người mắc trong cộng đồng là 1%. Một phương pháp xét nghiệm có độ nhạy 90% (xác suất người có bệnh cho kết quả dương tính là 0,9) và độ đặc hiệu 90% (xác suất người không bệnh cho kết quả âm tính là 0,9). Một người thực hiện xét nghiệm này 2 lần độc lập có điều kiện theo tình trạng mắc bệnh hoặc không mắc bệnh và cả 2 lần đều cho kết quả dương tính. Tính xác suất người này thực sự mắc bệnh. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $200a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 48\}$. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một tập con gồm 3 phần tử phân biệt của tập $S$ sao cho tổng của 3 phần tử đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Hai đại kiện tướng cờ vua $A$ và $B$ thi đấu loạt ván chớp quyết định. Mỗi ván cờ, xác suất $A$ thắng là 0,6; xác suất $B$ thắng là 0,4 (không có ván hòa). Các ván độc lập. Cuộc thi kết thúc ngay khi có một kỳ thủ dẫn trước đối thủ đúng 2 điểm (2 ván thắng cách biệt), và kỳ thủ đó giành chiến thắng chung cuộc. Tính xác suất để kỳ thủ $A$ giành chiến thắng chung cuộc. Biết xác suất là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ nguyên dương. Tính $200a + b$.

KẾT QUẢ

HẾT

CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT
Từ cơ bản đến nâng cao

PHẦN III. BÀI TOÁN CHUYÊN SÂU & NÂNG CAO

TME LUYỆN THI TOÁN THPT – ĐGNL
Bốc bi và chuyển vật
Thời lượng: 90 phút
Mã đề: XS-III-20

# BUỔI 20. BÀI TOÁN BỐC BI VÀ CHUYỂN VẬT

## A LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### 1 Chọn vật theo màu hoặc theo số

– **Theo màu.** Nếu chọn $k$ viên từ hộp có $a$ bi đỏ, $b$ bi xanh và $c$ bi vàng, đặt $x,y,z$ là số bi lấy theo từng màu. Với mỗi bộ $x+y+z=k$ thỏa đề, có $C_a^x C_b^y C_c^z$ cách. Muốn đủ ba màu, yêu cầu $x,y,z\geq 1$.
– **Tổng chia hết.** Phân nhóm theo số dư. Chẳng hạn, chọn ba thẻ có tổng chia hết cho 3 thì ba số dư hoặc giống nhau, hoặc lần lượt là $0,1,2$. Nếu ba nhóm có kích thước $n_0,n_1,n_2$, số cách là $C_{n_0}^3+C_{n_1}^3+C_{n_2}^3+n_0n_1n_2$.
– **Tích chia hết.** Với tích chia hết cho 6 hoặc 10, đếm bù các bộ thiếu một trong hai thừa số nguyên tố cần có. Cộng lại phần giao vì phần này đã bị trừ hai lần.
– **Có hoàn lại.** Khi xác suất rút bi đỏ mỗi lượt là $p$ và các lượt độc lập, xác suất đúng $r$ lượt đỏ trong $k$ lượt là $C_k^r p^r(1-p)^{k-r}$.

### 2 Chuyển vật một chiều

– Hộp I có $R_1$ bi đỏ trong $N_1$ viên. Khi chuyển $k$ viên sang hộp II, gọi $H_i$ là biến cố chuyển đúng $i$ bi đỏ. Khi đó
$$P(H_i)=\frac{C_{R_1}^i C_{N_1-R_1}^{k-i}}{C_{N_1}^k}.$$
– **Rút nhiều viên.** Cập nhật thành phần hộp II theo từng $H_i$, rồi tính $P(A)=\sum_i P(H_i)P(A\mid H_i)$.
– **Rút đúng một viên.** Nếu hộp II ban đầu có $R_2$ bi đỏ trong $N_2$ viên, xác suất rút đỏ là $\dfrac{R_2+k\dfrac{R_1}{N_1}}{N_2+k}$.
Tử số là số bi đỏ trung bình sau khi chuyển. Với chuỗi chuyển từng viên, áp dụng lần lượt theo thứ tự các hộp.

### 3 Trao đổi, truy nguồn và thời điểm dừng

– **Trao đổi đồng thời.** Lấy vật từ thành phần ban đầu của hai hộp ở mỗi lượt. Số bi đỏ giữ nguyên nếu hai hộp gửi đi cùng số bi đỏ. Với nhiều lượt, cập nhật trạng thái sau mỗi lượt.
– **Chuyển rồi trả lại.** Tính lượt trả theo thành phần hộp nhận sau khi đã chuyển, kể cả các viên vừa đến.
– **Truy nguồn.** Gọi $E$ là kết quả quan sát và $K$ là biến cố về nguồn gốc hoặc thành phần vật đã chuyển. Tính $P(K\mid E)=\dfrac{P(K\cap E)}{P(E)}$.
– **Dừng ở lần rút thứ $k$.** Muốn gặp bi đỏ thứ $m$ đúng ở lần $k$, cần có đúng $m-1$ bi đỏ trong $k-1$ lần đầu và lần $k$ rút được bi đỏ. Tính xác suất của giai đoạn đầu bằng tổ hợp, rồi nhân với tỉ lệ bi đỏ còn lại.

## B VÍ DỤ MINH HỌA

### Nhận dạng

**Ví dụ 1. TME** Một hộp kín đựng 7 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Người ta bốc ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bốc sao cho trong 4 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 2. TME** Một hộp đựng 8 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu xanh. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi rút ra có đúng 2 viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.

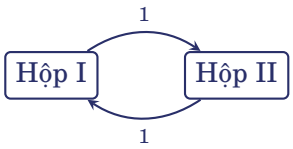
KẾT QUẢ

**Ví dụ 3. TME** Một hộp chứa 70 chiếc thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 70. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách rút sao cho tổng hai số ghi trên hai thẻ được rút ra là một số chẵn?

KẾT QUẢ

### Vận dụng

**Ví dụ 4. TME** Hộp I đựng 4 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Hộp II đựng 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 1 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II và 1 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp I. Tính xác suất để số bi đỏ trong hộp I sau khi trao đổi không thay đổi so với ban đầu. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 5. TME** Một hộp kín chứa 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 5 viên bi từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho số viên bi màu đỏ được chọn bằng đúng số viên bi màu xanh được chọn?

KẾT QUẢ

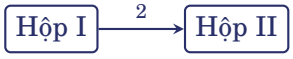
**Ví dụ 6. TME** Một hộp chứa 30 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 30. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất để tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ được rút ra là một số chia hết cho 3. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

**Ví dụ 7. TME** Một hộp chứa 9 viên bi màu đỏ, 8 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu vàng. Người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lấy sao cho số viên bi màu đỏ được lấy ra nhiều hơn số viên bi màu xanh?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 8. TME** Hộp I chứa 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 5 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I chuyển sang hộp II, lắc đều, sau đó từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II là viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.



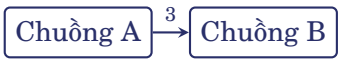

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Ví dụ 9. TME** Một hộp chứa 25 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 25. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách rút sao cho tích ba số ghi trên ba tấm thẻ được rút ra là một số chia hết cho 6?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 10. TME** Có hai chuồng dê $A$ và $B$. Chuồng $A$ ban đầu có 9 con dê trắng và 8 con dê đen. Chuồng $B$ ban đầu có 5 con dê trắng và 6 con dê đen. Người ta bắt ngẫu nhiên đồng thời 3 con dê từ chuồng $A$ chuyển sang chuồng $B$. Sau đó, từ chuồng $B$ bắt ngẫu nhiên 2 con dê ra kiểm tra. Biết rằng cả 2 con dê bắt ra đều là dê trắng. Tính xác suất để cả 2 con dê trắng đó đều là dê chuyển từ chuồng $A$ sang. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $20a + b$.

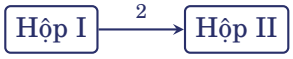



KẾT QUẢ

**Ví dụ 11. TME** Một hộp chứa 10 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 10 viên bi màu xanh cũng được đánh số từ 1 đến 10 (tổng cộng có 20 viên bi). Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 viên bi được chọn có đủ cả hai màu và 4 số ghi trên 4 viên bi đó đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 12. TME** Hộp I chứa 7 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 6 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó từ hộp II lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi thì thấy cả hai viên đều có màu đỏ. Tính xác suất để cả 2 viên bi đã chuyển từ hộp I sang hộp II đều là bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 13. TME** Cho một hộp chứa 36 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 36. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Ví dụ 14. TME** Có ba chiếc hộp I, II, III. Hộp I chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Hộp II chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Hộp III chứa 7 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, lắc đều rồi lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp III. Cuối cùng, từ hộp III lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp III là viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

**Ví dụ 15. TME** Một hộp chứa 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 tấm thẻ từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho tích của 4 số ghi trên 4 tấm thẻ được chọn là một số chia hết cho 10?

KẾT QUẢ

# C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

## Nhận dạng

**Bài 1. TME** Một hộp kín đựng 8 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Người ta bốc ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bốc sao cho trong 4 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu?

KẾT QUẢ

**Bài 2. TME** Một hộp đựng 9 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi rút ra có đúng 2 viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 3. TME** Một hộp chứa 72 chiếc thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 72. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách rút sao cho tổng hai số ghi trên hai thẻ được rút ra là một số chẵn?

KẾT QUẢ

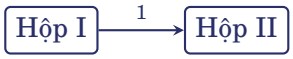
**Bài 4. TME** Một hộp chứa 10 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất để tích hai số ghi trên hai tấm thẻ rút ra là một số chẵn. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

KẾT QUẢ

**Bài 5. TME** Hộp I chứa 6 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 8 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I và 2 viên bi từ hộp II. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lấy sao cho trong 4 viên bi lấy ra có đúng 2 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh?

KẾT QUẢ

**Bài 6. TME** Hộp I chứa 4 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 5 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp I chuyển sang hộp II, sau đó từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II là viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.



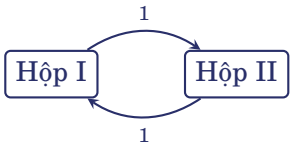

KẾT QUẢ

## Vận dụng

**Bài 7. TME** Một hộp kín chứa 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 5 viên bi từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho số viên bi màu đỏ được chọn bằng đúng số viên bi màu xanh được chọn?

KẾT QUẢ

**Bài 8. TME** Hộp I đựng 5 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh. Hộp II đựng 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 1 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II và 1 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp I. Tính xác suất để số bi đỏ trong hộp I sau khi trao đổi không thay đổi so với ban đầu. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 9. TME** Cho một hộp chứa 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 10. TME** Một hộp chứa 27 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 27. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất để tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ được rút ra là một số chia hết cho 3. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 11. TME** Một hộp chứa 8 viên bi màu đỏ, 8 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu vàng. Người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lấy sao cho số viên bi màu đỏ được lấy ra nhiều hơn số viên bi màu xanh?

KẾT QUẢ

**Bài 12. TME** Một hộp chứa 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ hộp. Tính xác suất để tổng hai số ghi trên hai chiếc thẻ rút ra là một số chia hết cho 5. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

KẾT QUẢ

**Bài 13. TME** Một hộp chứa 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm thẻ ra khỏi hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách rút sao cho tích ba số ghi trên ba tấm thẻ được rút ra là một số chia hết cho 6?

KẾT QUẢ

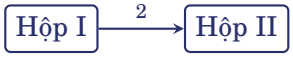
**Bài 14. TME** Một hộp đựng 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Người ta thực hiện rút ngẫu nhiên 3 lần liên tiếp, mỗi lần rút ra đúng 1 viên bi, ghi lại màu rồi bỏ hoàn lại viên bi đó vào hộp trước khi rút lần tiếp theo. Tính xác suất để trong 3 lần rút có đúng 2 lần rút được viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.

KẾT QUẢ

**Bài 15. TME** Một hộp chứa 11 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 11 và 11 viên bi màu xanh cũng được đánh số từ 1 đến 11. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 viên bi từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 viên bi được chọn có đủ cả hai màu và 4 số ghi trên 4 viên bi đó đôi một khác nhau?

KẾT QUẢ

**Bài 16. TME** Hộp I chứa 8 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 5 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I chuyển sang hộp II, lắc đều, sau đó từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II là viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.



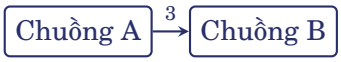

KẾT QUẢ

## Tổng hợp

**Bài 17. TME** Cho một hộp chứa 33 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 33. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 18. TME** Có hai chuồng dê $A$ và $B$. Chuồng $A$ ban đầu có 8 con dê trắng và 9 con dê đen. Chuồng $B$ ban đầu có 5 con dê trắng và 6 con dê đen. Người ta bắt ngẫu nhiên đồng thời 3 con dê từ chuồng $A$ chuyển sang chuồng $B$. Sau đó, từ chuồng $B$ bắt ngẫu nhiên 2 con dê ra kiểm tra. Biết rằng cả 2 con dê bắt ra đều là dê trắng. Tính xác suất để cả 2 con dê trắng đó đều là dê chuyển từ chuồng $A$ sang. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $20a + b$.

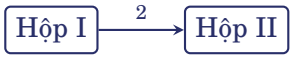



KẾT QUẢ

**Bài 19. TME** Cho một hộp chứa 39 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 39. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 20. TME** Hộp I chứa 7 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 5 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó từ hộp II lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi thì thấy cả hai viên đều có màu đỏ. Tính xác suất để cả 2 viên bi đã chuyển từ hộp I sang hộp II đều là bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 21. TME** Cho một hộp chứa 42 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 42. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

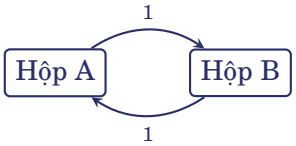
**Bài 22. TME** Một hộp chứa 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Người ta rút ngẫu nhiên từng viên bi một không hoàn lại cho đến khi rút được viên bi màu đỏ thứ 3 thì dừng lại. Tính xác suất để quá trình rút bi dừng lại ở đúng lần rút thứ 5. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

KẾT QUẢ

**Bài 23. TME** Cho một hộp chứa 48 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 48. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng ba số ghi trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3?

KẾT QUẢ

**Bài 24. TME** Hộp $A$ chứa 2 viên bi màu đỏ, hộp $B$ chứa 2 viên bi màu xanh. Ở mỗi bước, người ta lấy ngẫu nhiên đồng thời 1 viên bi từ hộp $A$ và 1 viên bi từ hộp $B$ để tráo đổi cho nhau. Quá trình trao đổi được thực hiện trong 3 bước liên tiếp. Tính xác suất để sau 3 bước trao đổi, trong hộp $A$ có đúng 1 viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.




KẾT QUẢ

**Bài 25. TME** Cho một hộp chứa 120 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 120. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 2 tấm thẻ phân biệt từ hộp sao cho tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ đó là một số chia hết cho 5?

KẾT QUẢ

**Bài 26. TME** Có ba chiếc hộp I, II, III. Hộp I chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Hộp II chứa 7 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp III chứa 7 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, lắc đều rồi lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp III. Cuối cùng, từ hộp III lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp III là viên bi màu đỏ. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $10a + b$.




KẾT QUẢ

**Bài 27. TME** Một hộp chứa 8 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 5 viên bi từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho trong 5 viên bi được chọn có đủ cả ba màu và số viên bi màu đỏ nhiều hơn tổng số viên bi màu xanh và màu vàng cộng lại?

KẾT QUẢ

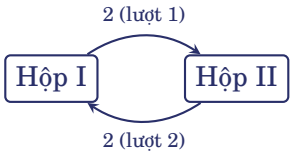
**Bài 28. TME** Trong một hộp kín có 4 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Người ta rút ngẫu nhiên từng viên bi một không hoàn lại cho đến khi trong hộp không còn viên bi màu đỏ nào thì dừng lại. Tính xác suất để quá trình rút bi dừng lại ở đúng lần rút thứ 6. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $1000a + 100b$.

KẾT QUẢ

**Bài 29. TME** Một hộp chứa 21 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 21. Người ta chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 tấm thẻ từ hộp. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn sao cho tích của 4 số ghi trên 4 tấm thẻ được chọn là một số chia hết cho 10?

KẾT QUẢ

**Bài 30. TME** Hộp I chứa 5 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Hộp II chứa 4 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó từ hộp II lấy ngẫu nhiên 2 viên bi bỏ ngược lại về hộp I. Tính xác suất để số viên bi màu đỏ trong mỗi hộp sau cả hai lần chuyển bi không thay đổi so với ban đầu. Viết xác suất dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với $a, b$ là các số nguyên dương. Tính $100a + b$.




KẾT QUẢ

HẾT


thuvientoanhoc.com