SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ nhất: 14/9/2023

Câu 1. (5.0 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = \dfrac{2024}{2023} \\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + \dfrac{n^2}{a_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ có giới hạn hữu hạn.

b) Xét dãy số (c_n) xác định bởi $c_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{a_i}\right]$, (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x). Chứng minh rằng mỗi số nguyên dương đều xuất hiện trong dãy (c_n).

Câu 2. (5.0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = f^2(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC có trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Đường tròn đường kính AH và đường tròn (O) cắt nhau tại T khác A. AT cắt BC tại Q. NP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại R.

a) Chứng minh rằng QR vuông góc với OH.

b) Đường thẳng đối xứng với HM qua phân giác trong góc $\widehat{BHC}$ cắt đoạn thẳng BC tại I. Gọi K là hình chiếu của A trên HI. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIK tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 4. (5.0 điểm) Trên bàn có 99 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 4 và từ 6 đến 100. Hai bạn A và B luân phiên chơi trò chơi với luật như sau:

i) A là người thực hiện lượt chơi đầu tiên.

ii) Trong mỗi lượt chơi, người chơi nhặt ra khỏi bàn 2 tấm thẻ được đánh hai số nguyên liên tiếp nhau sao cho số bé hơn không chia hết cho 10 và giữ một tấm thẻ trên tay đồng thời bỏ đi tấm thẻ còn lại.

iii) Khi tới lượt chơi của mình, nếu người chơi không thể thực hiện được yêu cầu ii hoặc chọn được hai tấm thẻ nhưng tổng số của một trong hai tấm thẻ đó với một tấm thẻ tuỳ ý trên tay hai người chơi đang giữ bằng 101 thì là người thua cuộc.

Biết rằng hai người chơi có thể thấy được số ghi trên tất cả các tấm thẻ trên bàn và trong tay đối thủ. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng.

——— HẾT ———

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang và 3 câu)

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN
CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI
CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: 15/9/2023

Câu 5. (6.0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q với $p > q$ thoả mãn

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1} \in \mathbb{Z}.$$

Câu 6. (7.0 điểm) Cho đa thức bậc hai $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn $P(x) > 0, \forall x \geq 0$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho $(x+1)^m P(x)$ là đa thức với hệ số không âm.

Câu 7. (7.0 điểm) Cho tam giác ABC có các góc nhọn với $AB < AC$, gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C. Các đường thẳng EF và BC cắt nhau tại G. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, K là hình chiếu của H lên AG, N là trung điểm của đoạn EF, M là trung điểm của đoạn BC. Các đoạn thẳng AH và EF cắt nhau tại L, đường trung trực của đoạn LD cắt GH tại P.

a) Gọi I là giao điểm của HG và AM. Chứng minh rằng $HG \perp AM$ và các điểm L, I, D, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGI và DPL tiếp xúc nhau.

---------- **HẾT** ----------

thuvientoanhoc.com