SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

MÃ ĐỀ THI 1212

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LẦN 10 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 26/11/2026
(Đề gồm 08 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120^0. Biết $|\vec{u}|=10, |\vec{v}|=6$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}-\vec{v}$ bằng

A. $\sqrt{46}$. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 14.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;1)$ và B là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{10}$.

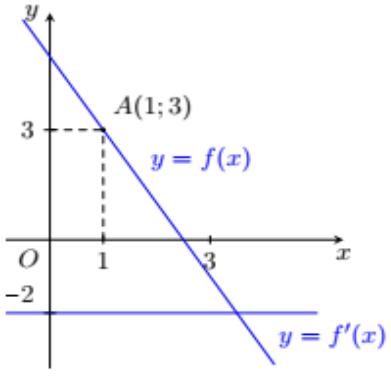
Câu 4: Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$ là

A. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x\neq k2\pi(k\in\mathbb{Z})$. **C.** $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x\neq k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)$; $\overrightarrow{AC}=(3;\ -4;\ 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. 22. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $2\sqrt{22}$.

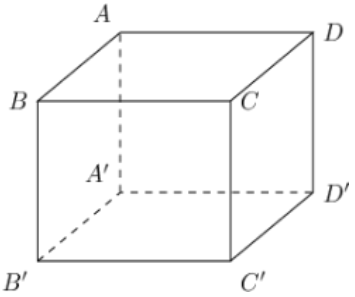
Câu 6: Cho đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là hai đường thẳng như hình vẽ. Biết đồ thị $y=f'(x)$ là đường thẳng $y=-2$ và đồ thị $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;3)$. Tính $f(-3)$.



A. -3. **B.** -11. **C.** 11. **D.** 3

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

thuvientoanhoc.com



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Câu 8: Tìm hiểu thời gian xem tivi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (giờ)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Số học sinh	8	16	4	2	2

Thời gian xem tivi trung bình trong tuần trước của các bạn học sinh này (làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. $5,50$. **B.** $6,50$. **C.** $9,00$. **D.** $8,44$

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=2$, công sai $d=-5$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

A. -410. **B.** -205. **C.** 245. **D.** -230.

Câu 10: Thống kê số tiền mua sắm online của một số khách hàng nữ trong một khu chung cư, được bảng sau:

Số tiền mua sắm online (triệu đồng)	[0,5;1,5)	[1,5;2,5)	[2,5;3,5)	[3,5;4,5)	[4,5;5,5)
Số người	10	17	19	31	7

75% khách hàng nữ mua sắm với số tiền không vượt quá bao nhiêu triệu đồng?

A. $3,70$. **B.** $4,05$. **C.** $4,31$. **D.** $3,82$.

Câu 11: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về tinh giản biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2020 – 2026 (sau 6 năm) với mục tiêu: tổng số biên chế năm 2026 giảm 9,9% so với tổng số biên chế hiện có của năm 2020. Việc tinh giản được thực hiện theo phương thức "ra 2 vào 1" (nghĩa là trong cùng một năm, số lượng tuyển dụng mới bằng đúng một nửa số lượng người rời khỏi biên chế). Giả sử tỷ lệ người rời khỏi biên chế hàng năm so với tổng biên chế của năm đó là một hằng số không đổi. Tính tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm so với tổng biên chế của năm đó (kết quả làm tròn đến 0,01%).

A. 1,72%. **B.** 2,06%. **C.** 1,13%. **D.** 1,85%.

Câu 12: Một nhóm gồm 2 người đàn ông, 3 người phụ nữ và 4 trẻ em. Chọn ngẫu nhiên 4 người từ nhóm người đã cho. Xác suất để 4 người được chọn có cả đàn ông, phụ nữ và trẻ em bằng

A. $\frac{8}{21}$. **B.** $\frac{4}{7}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Câu 13: Số nghiệm thuộc khoảng $(0;10\pi)$ của phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos 4x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. 82. **B.** 60. **C.** 40. **D.** 80.

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên một khoảng chứa 2, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=6$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=-2$. Biết rằng tồn tại hai số thực a,b sao cho $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)+5}-a}{g(x)-1}=b$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

thuvientoanhoc.com

Câu 15: Một tứ diện đều có cạnh bằng 6. Hai điểm M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt cầu nội tiếp của tứ diện. Điểm P là điểm di động trên bề mặt tứ diện đều. Khi đoạn thẳng MN đạt độ dài lớn nhất, giá trị lớn nhất của $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ bằng bao nhiêu?

A. 15. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;6;3)$, $B(4;4;5)$. Hai điểm M, N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=7\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{30}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{82}$.

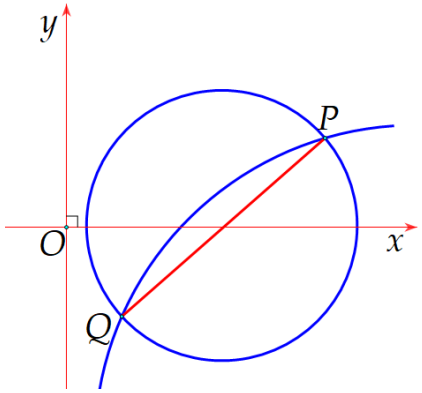
Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+4}{bx+c}$ $(a,c\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{N}^*)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-1
		$-\infty$			

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3;5]$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 18: Với số thực $a>1$, gọi P, Q là hai giao điểm của đồ thị $y=\log_a x$ và đường tròn $(C):\left(x-\dfrac{13}{5}\right)^2+y^2=\dfrac{169}{25}$. Biết đoạn thẳng PQ là một đường kính của đường tròn (C). Khi đó



A. $a\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **C.** $a\in\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{15}{2}\right)$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 4, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=16\sqrt{6}$. **B.** $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=16\sqrt{3}$.

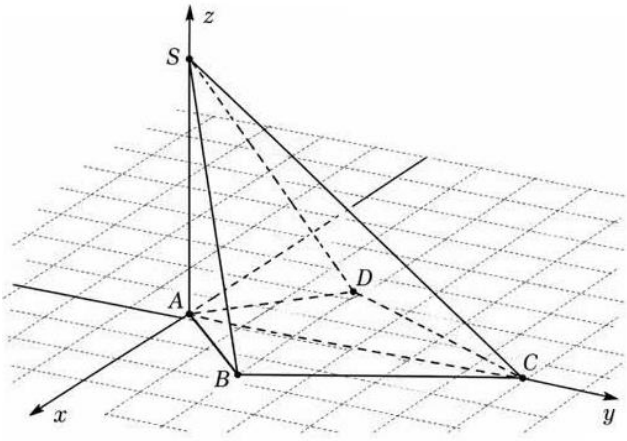
Câu 20: Tám học sinh gồm bốn cặp anh chị em sinh đôi được xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Có bao nhiêu cách xếp sao cho có đúng hai cặp sinh đôi mà hai người trong mỗi cặp đứng cạnh nhau, còn hai cặp sinh đôi kia thì hai người trong mỗi cặp không đứng cạnh nhau?

A. 5760 **B.** 8064 **C.** 1344 **D.** 17280

thuvientoanhoc.com

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, với $A(0;0;0)$, $B(2;2;0)$, $C(0;6;0)$, $D(-2;2;0)$ và $S(0;0;6)$. Điểm Q di động trên đoạn SC.



a) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng 24.

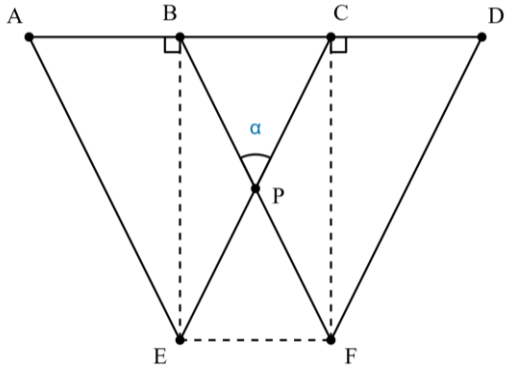
b) Cạnh ngắn nhất của khối chóp có độ dài $2\sqrt{2}$.

c) Góc BCS thỏa mãn $\cos BCS = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

d) Khi Q di động trên đoạn SC, diện tích tam giác BDQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$ tại điểm Q thỏa mãn $SQ = 2QC$.

Câu 2: Một ô tô đứng trước một bức tường thẳng và giữ nguyên vị trí khi chuyển từ đèn chiếu gần sang đèn chiếu xa. Gọi E, F là vị trí hai đèn; B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên tường. Đặt $EB = FC = h$ (mét)

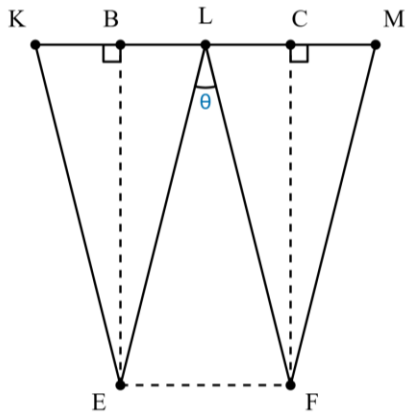
Khi bật đèn chiếu gần (Hình 1), hai vùng sáng được mô hình hóa bởi hai tam giác cân bằng nhau EAC và FBD, có các đáy AC, BD nằm trên tường. Các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên tường và $AB = BC = CD = 2$ (mét). Gọi P là giao điểm của EC và FB, đặt $\alpha = BPC$.



Hình 1. Đèn chiếu gần

Khi bật đèn chiếu xa (hình 2), hai vùng sáng được mô hình hóa bởi hai tam giác cân bằng nhau EKL và FLM, có các đáy KL, LM nằm trên tường; các điểm K, L, M theo thứ tự trên tường. Đặt $\theta = ELF$.

thuvientoanhoc.com



Hình 2. Đèn chiếu xa

Biết α, θ đều là góc nhọn. Khi chuyển sang đèn chiếu xa, tổng độ rộng vùng được chiếu sáng trên tường giảm đi $\frac{1}{3}$ so với khi chiếu gần, tức là $KM = \frac{2}{3}AD$.

a) Tổng độ rộng vùng được chiếu sáng trên tường khi bật đèn chiếu gần là $AD = 4$ (mét).

b) Hai góc α, θ thỏa mãn $\tan\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}$.

c) Hai góc α, θ thỏa mãn $\tan\alpha > 2\tan\theta$.

d) Cho biết $\tan(\alpha - \theta) = \frac{33}{56}$. Khi đó khoảng cách từ mỗi đèn xe đến bức tường là $h = 3$(mét).

Câu 3: Kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.
Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên như sau:

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Học sinh trường A	4	5	3	4	2
Học sinh trường B	2	5	4	3	1

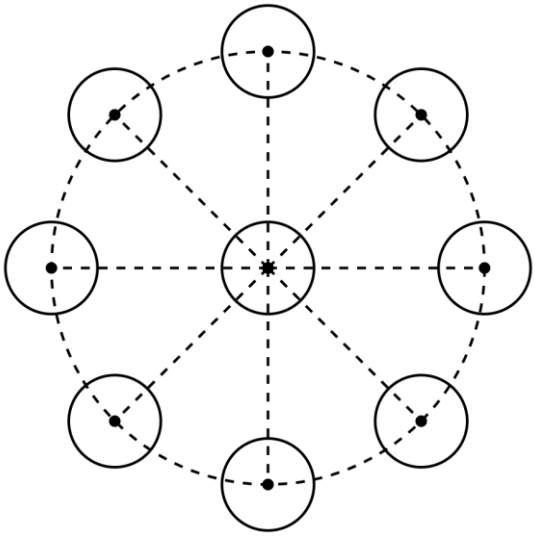
a) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường A là $6,1$.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B làm tròn đến hàng phần trăm là $1,23$.

c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường A có điểm trung bình đồng đều hơn.

Câu 4: Cho tập hợp $X = \{1;2;3;\ldots;15\}$ và chín ô hình tròn được bố trí như hình dưới đây



Chọn ngẫu nhiên chín số khác nhau từ X rồi xếp ngẫu nhiên vào chín ô, mỗi ô chứa đúng một số. Mọi cách xếp đều có khả năng xảy ra như nhau.

thuvientoanhoc.com

Bốn đường kính trong hình xác định bốn hàng, mỗi hàng gồm ô ở tâm và hai ô đối diện. Các vị trí được xem là phân biệt; hai cách xếp thu được từ nhau bằng phép quay hoặc phép đối xứng vẫn được tính là hai cách xếp khác nhau.

Gọi A là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15"; B là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15 và có tổng bằng nhau"; C là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15 và tổng các số trên mỗi hàng đều là số chẵn".

a) Xác suất để số 15 được chọn vào chín ô là $\frac{3}{5}$.

b) $P(A)=\frac{1}{9}$.

c) $P(C)=\frac{8}{1287}$.

d) $P(B)=\frac{17}{45045}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{2x^2+3x+5}{x+1}$ có đồ thị (G) và đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=5$ có tâm I. Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (G).

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $4\sqrt{2}-1$.

c) Tích khoảng cách từ I đến hai đường tiệm cận của (G) bằng $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

d) Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N. Khi điểm P di động trên (C) và khác M,N, diện tích tam giác PMN có giá trị lớn nhất bằng $\frac{42+7\sqrt{85}}{17}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2$, $AD=5$, $SA=SB$, $SC=SD$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Biết tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng 7. Gọi N, M lần lượt là trung điểm của AB, CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$

a) $SN\perp SM$.

b) $SN.SM=10$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng 8.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khi đó $\cos\varphi=\frac{120}{169}$.

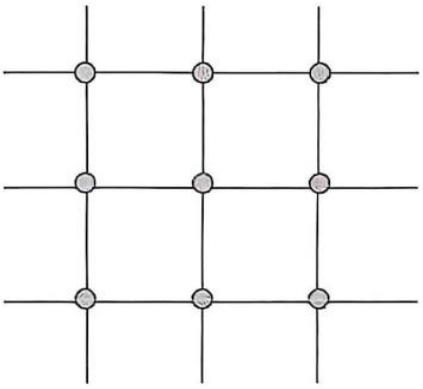
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một công ty sản xuất ghế gỗ để xuất khẩu. Qua phân tích hoạt động sản xuất, công ty xác định rằng nếu chi phí sản xuất mỗi chiếc ghế là x USD thì số lượng ghế xuất khẩu là $Q(x)=-x^2+100x-1600$ (trăm chiếc), với $20<x<80$. Toàn bộ số ghế này được đối tác mua với giá cố định 120 USD/chiếc. Ngoài chi phí sản xuất, công ty phải nộp thuế xuất khẩu a USD/chiếc và không phát sinh chi phí nào khác. Theo chính sách hỗ trợ doanh nghiệp, mức thuế xuất khẩu được lựa chọn sao cho lợi nhuận của công ty bằng hai lần tổng tiền thuế phải nộp. Hỏi mức thuế a bằng bao nhiêu USD/chiếc để lợi nhuận của công ty lớn nhất? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)*

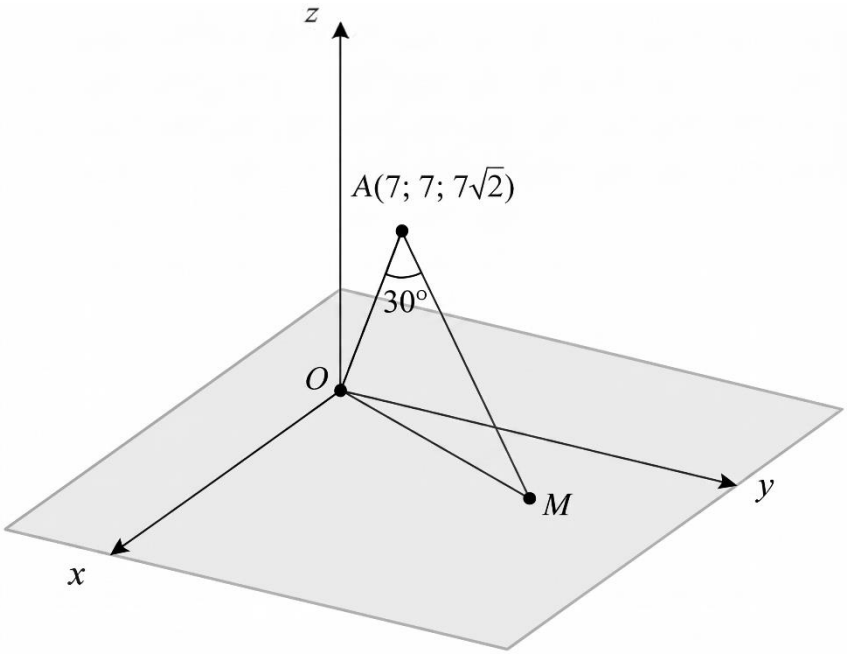
Câu 2: Cho một mạng điểm ô vuông 3×3 như hình vẽ bên dưới. Lần lượt chọn ngẫu nhiên ba điểm A,B,C phân biệt trên mạng điểm. Biết xác suất để $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\le 0$ bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1$.

Tính $26m+11n$.

thuvientoanhoc.com



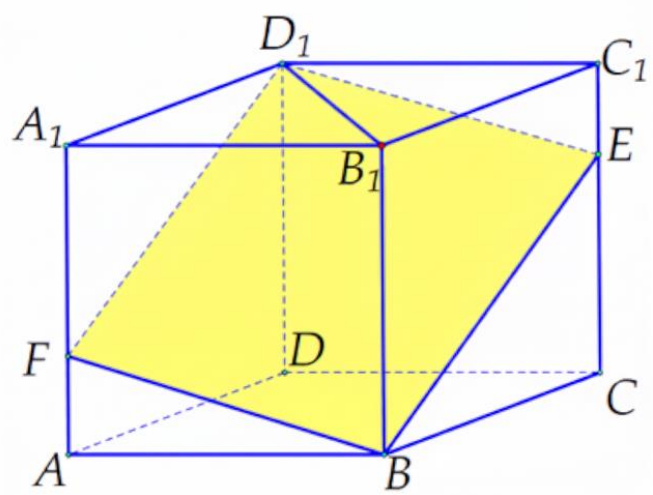
Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một thiết bị quan sát được đặt cố định tại điểm $A\left(7;7;7\sqrt{2}\right)$. Một robot AI (coi như là một chất điểm) có vị trí $M\left(x;y;0\right)$ đang di chuyển trên mặt phẳng (Oxy). Để kiểm chứng khả năng tính toán của robot AI, người ta đưa ra câu lệnh AI (Prompt AI) yêu cầu robot phải di chuyển để tìm được vị trí sao cho biểu thức $Q=\left(x-y-6\right)\left(x+y+10\right)$ đạt được giá trị lớn nhất, đồng thời trong suốt quá trình di chuyển, robot AI luôn phải giữ góc giữa hai tia AO và AM bằng 30° và đảm bảo điều kiện $x+y\geq 0$. Giả sử sau một thời gian di chuyển, robot AI đã tìm được một vị trí $M_o\left(a;b;0\right)$ thỏa mãn yêu cầu của Prompt AI và giá trị lớn nhất của biểu thức Q là Q_0. Khi đó $(a-b).Q_0$ bằng bao nhiêu?



Câu 4: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số nguyên. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M\left(x_1;y_1\right)$ và $N\left(x_2;y_2\right)$ thỏa mãn $x_1y_1=x_2y_2=6$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của c có thể xảy ra. Tính tổng bình phương các phần tử trong S.

Câu 5: Như hình vẽ, trong hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB=6, AD=7, AA_1=9$

thuvientoanhoc.com

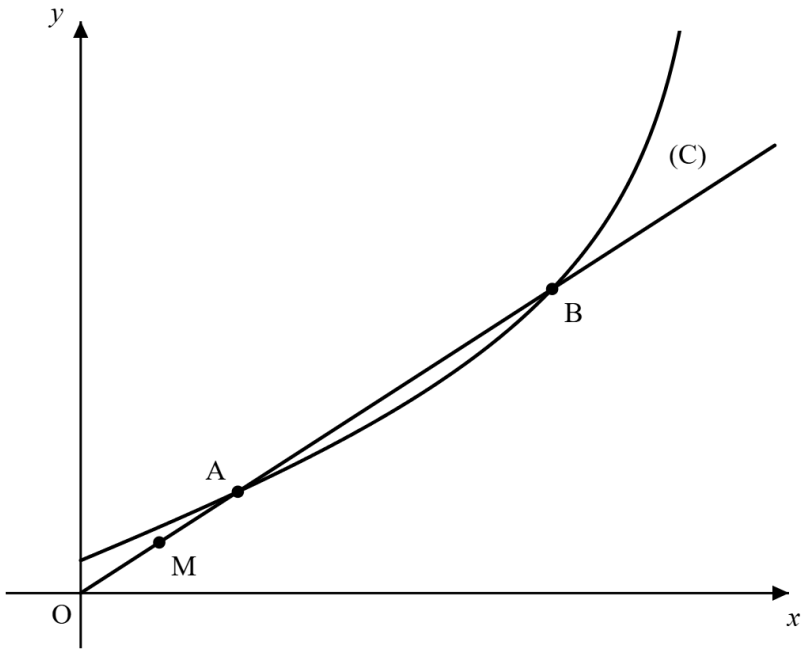


Điểm E là một điểm di động trên cạnh CC_1. Mặt phẳng BED_1 cắt cạnh AA_1 tại điểm F.

Giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác BED_1F bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường cong (C): $y=\log_2\left(\dfrac{5x+15}{12-5x}\right), 0<x<\dfrac{12}{5}$.

Một chất điểm M xuất phát từ O và chuyển động thẳng đều theo một tia nằm trong góc phần tư thứ nhất. Tia này cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B, trong đó M đi qua A trước khi đi qua B. Thời gian tính từ lúc xuất phát đến khi M tới B gấp ba lần thời gian tính từ lúc xuất phát đến khi M tới A.



Biết hệ số góc của tia chuyển động bằng $\dfrac{p}{q}$, trong đó p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $12p+2026q$.

----------HẾT----------

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

(ĐÁP ÁN)

KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 10 NĂM HỌC 2026 – 2027

MÔN: TOÁN

I. ĐÁP ÁN ĐỀ CHẤM BÀI MÃ ĐỀ 1212

Câu hỏi	Đáp án
PHẦN I	
1	**D**
2	**D**
3	**C**
4	**D**
5	**B**
6	**C**
7	**B**
8	**D**
9	**B**
10	**B**
11	**A**
12	**B**
13	**D**
14	**C**
15	**D**
16	**A**
17	**A**
18	**C**
19	**A**
20	**B**
PHẦN II	
1	**ĐĐĐĐ**
2	**SĐĐĐ**
3	**ĐSĐS**
4	**ĐSĐS**
5	**SĐSĐ**
6	**ĐSĐS**
PHẦN III	
1	**25,2**
2	**1187**
3	**605**
4	**976**
5	**31,6**
6	**6138**

thuvientoanhoc.com

THANG ĐIỂM CHẤM

PHẦN I. Gồm 20 câu TNKQ 4 lựa chọn, mỗi câu được 0,4 điểm. Tổng điểm: 8,0 điểm.
PHẦN II. Gồm 6 câu dạng đúng sai, mỗi câu có 4 ý, điểm tối đa là 1,2 điểm/ câu.
Tổng điểm: 7,2 điểm
Đúng 1 ý /câu được 0,12 điểm
Đúng 2 ý/câu được 0,3 điểm
Đúng 3 ý/câu được 0,6 điểm
Đúng 4 ý/câu được 1,2 điểm
PHẦN III. Gồm 6 câu hỏi trả lời ngắn, mỗi câu 0,8 điểm. Tổng điểm: 4,8 điểm.

II. ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120^0. Biết $|\vec{u}|=10, |\vec{v}|=6$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}-\vec{v}$ bằng

A. $\sqrt{46}$. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 14.

Lời giải

Ta có

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=|\vec{u}|^2-2.\vec{u}.\vec{v}+|\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2.|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)+|\vec{v}|^2=10^2-2.10.6.\cos 120°+6^2=196.$$

Vậy: $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{196}=14$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)(x-4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=4\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;1)$ và B là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Vì B là điểm đối xứng với A qua trục Oy nên $B(3;2;-1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=(6;0;-2)$.

Vậy $AB=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Câu 4: Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$ là

thuvientoanhoc.com

A. $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$. **C.** $x \neq k\pi$. **D.** $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

ĐKXĐ của hàm số đã cho là: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq k\pi\\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

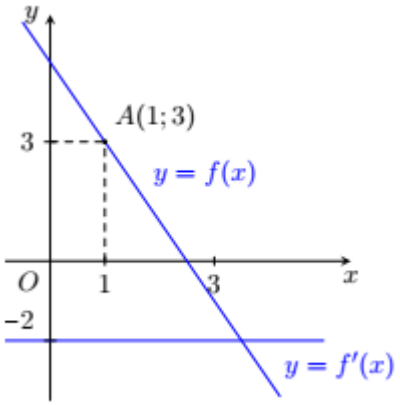
Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)$; $\overrightarrow{AC}=(3;\ -4;\ 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. 22. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $2\sqrt{22}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=(2;-3;3) \Rightarrow AM=\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{22}$

Câu 6: Cho đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là hai đường thẳng như hình vẽ. Biết đồ thị $y=f'(x)$ là đường thẳng $y=-2$ và đồ thị $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;3)$. Tính $f(-3)$.



A. -3. **B.** -11. **C.** 11. **D.** 3

Lời giải

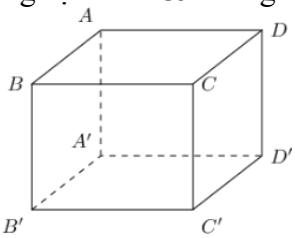
Vì đồ thị $y=f'(x)$ là đường thẳng $y=-2$ nên $f'(x)=-2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ là một đường thẳng có hệ số góc bằng -2, suy ra $f(x)=-2x+m$

Vì đồ thị $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;3)$ nên $f(1)=3 \Rightarrow m=5 \Rightarrow f(x)=-2x+5$

Do đó $f(-3)=-2\cdot(-3)+5=11$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Câu 8: Tìm hiểu thời gian xem tivi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (giờ)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Số học sinh	8	16	4	2	2

Thời gian xem tivi trung bình trong tuần trước của các bạn học sinh này (làm tròn đến hàng phần trăm) là

thuvientoanhoc.com

A. $5,50$. **B.** $6,50$. **C.** $9,00$. **D.** $8,44$

Lời giải

Trong mỗi khoảng thời gian, giá trị đại diện trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Thời gian (giờ)	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
Số học sinh	8	16	4	2	2

Tổng số học sinh là $n=32$. Thời gian xem tivi trung bình của nhóm học sinh đó là

$$\overline{X}=\frac{8.2,5+16.7,5+4.12,5+2.17,5+2.22,5}{32}\approx 8,44\,(h)$$

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=2$, công sai $d=-5$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

A. -410. **B.** -205. **C.** 245. **D.** -230.

Lời giải

Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng đó là $S_{10}=\frac{10\left[2.2+9.(-5)\right]}{2}=-205$.

Câu 10: Thống kê số tiền mua sắm online của một số khách hàng nữ trong một khu chung cư, được bảng sau:

Số tiền mua sắm online (triệu đồng)	$[0,5;1,5)$	$[1,5;2,5)$	$[2,5;3,5)$	$[3,5;4,5)$	$[4,5;5,5)$
Số người	10	17	19	31	7

75% khách hàng nữ mua sắm với số tiền không vượt quá bao nhiêu triệu đồng?

A. $3,70$. **B.** $4,05$. **C.** $4,31$. **D.** $3,82$.

Lời giải

Tổng số khách hàng là: $10+17+19+31+7=84$.

Gọi $x_1;x_2;...;x_{84}$ lần lượt là số tiền mua hàng được xếp theo thứ tự không giảm. Ta có $x_1;...;x_{10}\in[0,5;1,5)$; $x_{11};...;x_{27}\in[1,5;2,5)$; $x_{28};...;x_{46}\in[2,5;3,5)$; $x_{47};...;x_{77}\in[3,5;4,5)$; $x_{78};...;x_{84}\in[4,5;5,5)$. Do đó đối với dãy số liệu $x_1;x_2;...;x_{84}$ thì

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1;x_2;...;x_{84}$ là $\frac{1}{2}(x_{42}+x_{43})\in[2,5;3,5)$. Do đó

$$Q_2=u_m+\frac{\frac{n}{2}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)=2,5+\frac{\frac{84}{2}-27}{19}.1,0\simeq 3,29.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu là $x_{64}\in[3,5;4,5)$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3=u_m+\frac{\frac{3n}{4}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)=3,5+\frac{\frac{3\times 84}{4}-46}{31}.1,0\simeq 4,05$.

Câu 11: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về tinh giản biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2020 – 2026 (sau 6 năm) với mục tiêu: tổng số biên chế năm 2026 giảm 9,9% so với tổng số biên chế hiện có của năm 2020. Việc tinh giản được thực hiện theo phương thức "ra 2 vào 1" (nghĩa là trong cùng một năm, số lượng tuyển dụng mới bằng đúng một nửa số lượng người rời khỏi biên chế). Giả sử tỷ lệ người rời khỏi biên chế hàng năm so với tổng biên chế của năm đó là một hằng số không đổi. Tính tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm so với tổng biên chế của năm đó (kết quả làm tròn đến 0,01%).

A. 1,72%. **B.** 2,06%. **C.** 1,13%. **D.** 1,85%.

Lời giải

Gọi N_0 là tổng biên chế năm 2020 và r là tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm so với tổng biên chế của năm đó ($r>0$). Theo cơ chế "ra 2 vào 1", tỷ lệ người rời khỏi biên chế hàng năm là $2r$.

Sau mỗi năm, biên chế giảm ròng một tỷ lệ bằng $2r-r=r$, tức là $N_{k+1}=N_k(1-r)$.

thuvientoanhoc.com

Sau 6 năm (từ 2020 đến 2026), tổng số biên chế giảm $9,9\%$ nên:

$N_6 = N_0(1-r)^6 = (1-0,099)N_0 = 0,901N_0 \Rightarrow r \approx 0,017225 \approx 1,72\%$

Câu 12: Một nhóm gồm 2 người đàn ông, 3 người phụ nữ và 4 trẻ em. Chọn ngẫu nhiên 4 người từ nhóm người đã cho. Xác suất để 4 người được chọn có cả đàn ông, phụ nữ và trẻ em bằng

A. $\frac{8}{21}$. **B.** $\frac{4}{7}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Không gian mẫu : $n(\Omega) = C_9^4 = 126$

Gọi A là biến cố : 4 người được **chọn có cả đàn ông, phụ nữ và trẻ em**

- Chọn 1 đàn ông, 1 phụ nữ và 2 trẻ em: $C_2^1.C_3^1.C_4^2 = 36$
- Chọn 1 đàn ông, 2 phụ nữ và 1 trẻ em: $C_2^1.C_3^2.C_4^1 = 24$
- Chọn 2 đàn ông, 1 phụ nữ và 1 trẻ em: $C_2^2.C_3^1.C_4^1 = 12$

Áp dụng quy tắc cộng $\Rightarrow n(A) = 72 \Rightarrow P(A) = \frac{72}{126} = \frac{4}{7}$

Câu 13: Số nghiệm thuộc khoảng $(0;10\pi)$ của phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos 4x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. 82. **B.** 60. **C.** 40. **D.** 80.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{\pi}{3}\cos 4x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \cos 4x = \pm\frac{1}{2} + 6k.$

Vì $-1 \le \cos 4x \le 1$ nên $|\pm\frac{1}{2} + 6k| \le 1 \Rightarrow k = 0$

Với $k = 0$, ta thu được: $\left[\begin{array}{l} \cos 4x = \frac{1}{2} \\ \cos 4x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos^2 4x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 8x = -\frac{1}{2}.$

Đặt $t = 8x$. Khi $x \in (0;10\pi)$ thì $t \in (0;80\pi)$.

Khoảng $(0;80\pi)$ có độ dài $80\pi = 40 \times 2\pi$, gồm đúng 40 chu kỳ tuần hoàn cơ sở của hàm số $\cos t$.

Trong mỗi chu kỳ, phương trình $\cos t = -\frac{1}{2}$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

Tại hai đầu mút $t = 0$ và $t = 80\pi$, $\cos t = 1 \ne -\frac{1}{2}$ nên không có nghiệm nào rơi vào mút.

Vậy số nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;10\pi)$ là: $40 \times 2 = 80.$

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên một khoảng chứa 2, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2} = 6$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2} = -2$. Biết rằng tồn tại hai số thực a,b sao cho $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)+5}-a}{g(x)-1} = b$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1$.

thuvientoanhoc.com

Theo đề bài, giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-a}{g(x)-1}=b$ nên $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{f(x)+5}-a\right)=0.$

Do đó $3-a=0\Rightarrow a=3.$

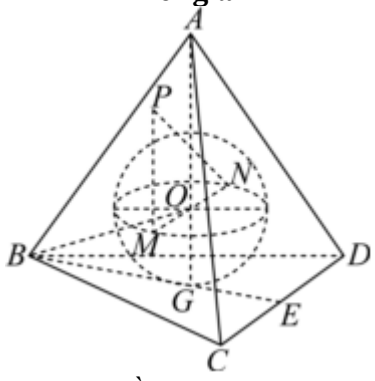
Với $a=3$, ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-3}{g(x)-1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{\left(g(x)-1\right)\left(\sqrt{f(x)+5}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\dfrac{f(x)-4}{x-2}}{\dfrac{g(x)-1}{x-2}}.\dfrac{1}{\sqrt{f(x)+5}+3}\right)=\dfrac{6}{-2}.\dfrac{1}{3+3}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}.$ Vậy $a+b=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}.$

Câu 15: Một tứ diện đều có cạnh bằng 6. Hai điểm M,N là hai điểm bất kỳ trên mặt cầu nội tiếp của tứ diện. Điểm P là điểm di động trên bề mặt tứ diện đều. Khi đoạn thẳng MN đạt độ dài lớn nhất, giá trị lớn nhất của $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ bằng bao nhiêu?

A. 15. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải



Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện đều $ABCD, G$ là trọng tâm tam giác BCD, E là trung điểm của CD. Nối AG, BE thì $O\in AG$. Nối BO thì $AO=BO$.

Vì cạnh tứ diện đều bằng 6 nên $BG=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.6=2\sqrt{3}.$

Do đó $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}.$

Gọi bán kính mặt cầu nội tiếp là r. Khi đó

$(AG-r)^2=r^2+BG^2\Rightarrow(2\sqrt{6}-r)^2=r^2+12\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

Khi MN là đường kính của mặt cầu nội tiếp thì MN lớn nhất, khi đó

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0},\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-r^2=-\dfrac{3}{2}.$

Suy ra $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})=PO^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=PO^2-\dfrac{3}{2}.$

Vì P là điểm di động trên mặt tứ diện nên PO lớn nhất khi P là một đỉnh của tứ diện.

Khi đó $PO_{\max}=AO=\dfrac{3}{4}AG=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

Do đó $(\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN})_{\max}=\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}=12$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;6;3), B(4;4;5)$. Hai điểm M,N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=7\sqrt{2}.$ Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

thuvientoanhoc.com

A. $\sqrt{30}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{82}$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên tồn tại số thực $k>0$ sao cho $\overrightarrow{MN}=k\vec{a}\Leftrightarrow MN=|k|.|\vec{a}|$

$\Leftrightarrow |k|=7\Leftrightarrow k=7$

Gọi $K(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{MN}=(7;-7;0)$

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4=7\\y-6=-7\\z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=3\end{cases}\Rightarrow K(3;-1;3)$$

$\Rightarrow K$ và B nằm cùng phía đối với (Oxy)

$\Rightarrow |AM-BN|=|KN-BN|\le KB=\sqrt{1^2+5^2+2^2}=\sqrt{30}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow K,N,B$ thẳng hàng và N nằm ngoài đoạn KB. Điều này luôn xảy ra.

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng $\sqrt{30}$.

(Khi $N\left(\frac{3}{2};-\frac{17}{2};0\right)$ và $M\left(-\frac{11}{2};-\frac{3}{2};0\right)$ thì đẳng thức xảy ra)

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+4}{bx+c}$ $(a,c\in\mathbb{R},b\in\mathbb{N}^*)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-1

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3;5]$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, nên

$-\dfrac{c}{b}=2\Rightarrow c=-2b.$

Đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, nên $\dfrac{a}{b}=-1\Rightarrow a=-b.$

Ta có $f'(x)=\dfrac{a(bx+c)-b(ax+4)}{(bx+c)^2}=\dfrac{ac-4b}{(bx+c)^2}.$

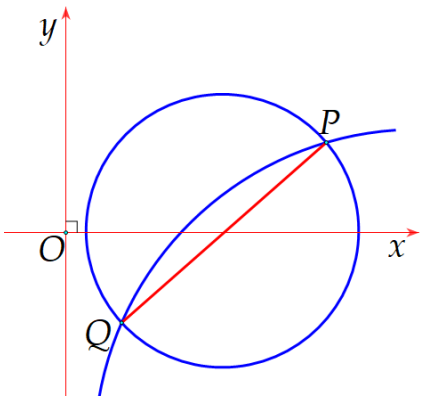
Theo bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ac-4b<0.$

Thay $a=-b$ và $c=-2b$, ta được $2b^2-4b<0\Leftrightarrow 2b(b-2)<0\Leftrightarrow 0<b<2\Rightarrow b=1$ (vì $b\in\mathbb{N}^*$)

Do đó $f(x)=\dfrac{-x+4}{x-2}\Rightarrow \min\limits_{[3;5]} f(x)=f(5)=-\dfrac{1}{3}$

Câu 18: Với số thực $a>1$, gọi P,Q là hai giao điểm của đồ thị $y=\log_a x$ và đường tròn $(C):\left(x-\dfrac{13}{5}\right)^2+y^2=\dfrac{169}{25}$. Biết đoạn thẳng PQ là một đường kính của đường tròn (C). Khi đó

thuvientoanhoc.com



A. $a\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$. **C.** $a\in\left(\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\frac{11}{2};\frac{15}{2}\right)$.

Lời giải

Tâm đường tròn là $C\left(\frac{13}{5};0\right)$.

Vì P,Q là hai đầu mút của một đường kính nên P,Q đối xứng nhau qua C. Do đó trung điểm của P,Q là C.

Đặt $P\left(m;\log_a m\right)$, $Q\left(n;\log_a n\right)$.

Từ điều kiện trung điểm là C, ta có $\frac{m+n}{2}=\frac{13}{5}\Rightarrow m+n=\frac{26}{5}$ (1)

Và $\frac{\log_a m+\log_a n}{2}=0\Rightarrow \log_a m+\log_a n=0\Rightarrow \log_a(mn)=0\Rightarrow mn=1$ (2)

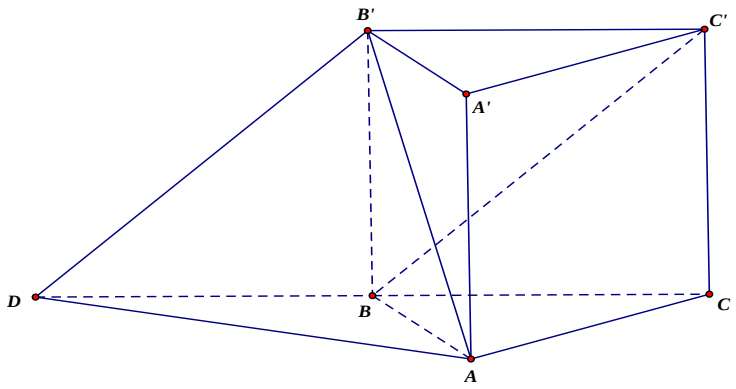
Từ (1), (2) suy ra $(m,n)=\left(5,\frac{1}{5}\right)$ (vì $m>n$) $\Rightarrow P\left(5;\log_a 5\right)$

Vì $P\left(5;\log_a 5\right)\in(C)\Rightarrow\left(5-\frac{13}{5}\right)^2+\left(\log_a 5\right)^2=\frac{169}{25}\Rightarrow a=5\in\left(\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$

Câu 19: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 4, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=16\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{16\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=16\sqrt{3}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $B'C'BD$, suy ra $BC'//DB'$, do đó góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng góc giữa hai đường thẳng AB' và DB'.

Xét tam giác ACD có trung tuyến AB bằng nửa cạnh đối diện CD nên $\triangle ACD$ vuông tại A.

$AD=\sqrt{DC^2-AC^2}=\sqrt{16a^2-4a^2}=2a\sqrt{3}$.

Lại do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $AB'=BC'$ hay $AB'=DB'\Rightarrow\triangle B'DA$ cân tại B', mà $\left(AB',DB'\right)=60^o$ nên tam giác $B'DA$ đều cạnh bằng $2a\sqrt{3}$.

thuvientoanhoc.com

$BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho: $V = BB'.S_{ABC} = 2a\sqrt{2}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{6}a^3 = 16\sqrt{6}$.

Câu 20: Tám học sinh gồm bốn cặp anh chị em sinh đôi được xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Có bao nhiêu cách xếp sao cho có đúng hai cặp sinh đôi mà hai người trong mỗi cặp đứng cạnh nhau, còn hai cặp sinh đôi kia thì hai người trong mỗi cặp không đứng cạnh nhau?

A. 5760 **B.** 8064 **C.** 1344 **D.** 17280

Lời giải

Chọn hai cặp sinh đôi đứng cạnh nhau: có C_4^2 cách. Với hai cặp đã chọn, gộp mỗi cặp thành một khối, đếm được $2^2 \times 6!$ cách xếp.

Với mỗi cặp trong hai cặp còn lại, số cách xếp mà cặp đó cũng đứng cạnh nhau là $2^3 \times 5!$. Tổng hai số đếm này là $2 \times 2^3 \times 5!$.

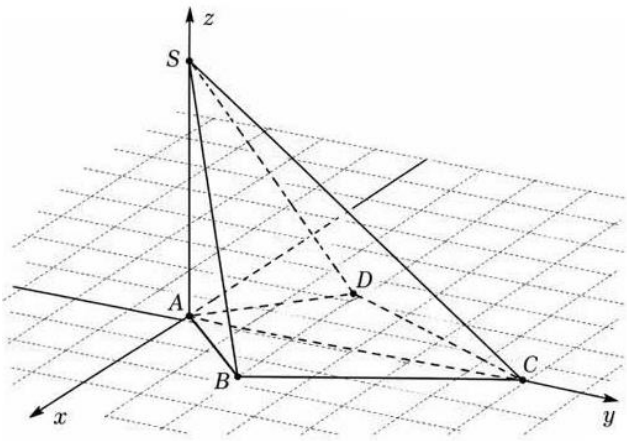
Trường hợp cả bốn cặp đều đứng cạnh nhau có $2^4 \times 4!$ cách.

Áp dụng bù trừ, với hai cặp đã chọn có $2^2 \times 6! - 2 \times 2^3 \times 5! + 2^4 \times 4! = 1344$ cách hợp lệ.

Mỗi cách xếp hợp lệ xác định duy nhất hai cặp đứng cạnh nhau, nên tổng số cách là $C_4^2 \times 1344 = 8064$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, với $A(0;0;0)$, $B(2;2;0)$, $C(0;6;0)$, $D(-2;2;0)$ và $S(0;0;6)$. Điểm Q di động trên đoạn SC.



a) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng 24.

b) Cạnh ngắn nhất của khối chóp có độ dài $2\sqrt{2}$.

c) Góc BCS thỏa mãn $\cos BCS = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

d) Khi Q di động trên đoạn SC, diện tích tam giác BDQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$ tại điểm Q thỏa mãn $SQ = 2QC$.

Lời giải

Phân tích giả thiết:

Từ tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(2;2;0)$, $C(0;6;0)$, $D(-2;2;0)$, ta thấy các điểm này đều có cao độ $z = 0$, do đó mặt đáy $(ABCD)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy).

Điểm $S(0;0;6)$ nằm trên trục Oz. Vì $A(0;0;0)$ trùng với gốc tọa độ nên đường thẳng SA trùng với trục Oz. Suy ra $SA \perp (ABCD)$.

Chiều cao của khối chóp là $h = SA = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$.

a) Tính thể tích khối chóp:

Ta có hai đường chéo của đáy là AC và BD.

thuvientoanhoc.com

$\overrightarrow{AC}=(0;6;0)\Rightarrow AC=6$

$\overrightarrow{BD}=(-4;0;0)\Rightarrow BD=4$

Vì $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\cdot(-4)+6\cdot0+0\cdot0=0$ nên $AC\perp BD$.

Suy ra $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4=12$.

Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot12\cdot6=24$.

$\Rightarrow$ **Mệnh đề a) ĐÚNG.**

b) Ta có: $AB=2\sqrt{2}$, $AD=2\sqrt{2}$, $BC=2\sqrt{5}$, $CD=2\sqrt{5}$, $SA=6$, $SB=2\sqrt{11}$, $SD=2\sqrt{11}$, $SC=6\sqrt{2}\Rightarrow$ Cạnh ngắn nhất của khối chóp là $AB=AD=2\sqrt{2}\Rightarrow$ **Mệnh đề b) ĐÚNG.**

c) Góc BCS là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CS}$.

$\overrightarrow{CB}=(2;-4;0)\Rightarrow|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CS}=(0;-6;6)\Rightarrow|\overrightarrow{CS}|=\sqrt{0^2+(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$

Tính côsin góc: $\cos BCS=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CS}|}=\frac{2\cdot0+(-4)\cdot(-6)+0\cdot6}{2\sqrt{5}\cdot6\sqrt{2}}=\frac{24}{12\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

$\Rightarrow$ **Mệnh đề c) ĐÚNG.**

d) Gọi M là trung điểm của BD, suy ra $M(0;2;0)$. Chứng minh được $BD\perp MQ$.

Diện tích tam giác BDQ là: $S_{BDQ}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot MQ=\frac{1}{2}\cdot4\cdot MQ=2MQ$.

Do đó, diện tích S_{BDQ} nhỏ nhất khi độ dài đoạn MQ ngắn nhất.

Khi đó Q là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng SC.

Ta có $\overrightarrow{CS}=(0;-6;6)=\frac{1}{6}\vec{u}$, với $\vec{u}=(0;-1;1)$

Vì $Q\in$ đoạn SC nên $\overrightarrow{CQ}=t\vec{u}$ (với $t\in[0;6]$) $\Rightarrow Q(0;6-t;t)\in SC$

Ta có $\overrightarrow{MQ}=(0;4-t;t)$.

Để $MQ\perp SC$ thì $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow0\cdot0+(4-t)(-1)+t\cdot1=0\Leftrightarrow-4+2t=0\Leftrightarrow t=2$ (thỏa mãn $t\in[0;6]$).

+) Với $t=2$, ta có $Q(0;4;2)$. Khi đó $\overrightarrow{MQ}=(0;2;2)\Rightarrow MQ=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Diện tích nhỏ nhất của tam giác BDQ là $S_{\min}=2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. (**Ý đầu đúng**).

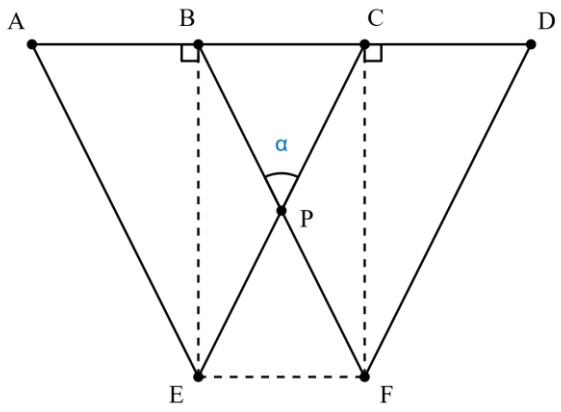
+) Kiểm tra vị trí của điểm $Q(0;4;2)$:

$\overrightarrow{SQ}=(0;4;-4)$, $\overrightarrow{QC}=(0;2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{SQ}=2\overrightarrow{QC}$, đồng nghĩa với việc điểm Q chia đoạn SC theo tỉ lệ tương ứng và độ dài $SQ=2QC$. (**Ý sau đúng**)$\Rightarrow$ **Mệnh đề d) ĐÚNG.**

Câu 2: Một ô tô đứng trước một bức tường thẳng và giữ nguyên vị trí khi chuyển từ đèn chiếu gần sang đèn chiếu xa. Gọi E, F là vị trí hai đèn; B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên tường. Đặt $EB=FC=h$ (mét)

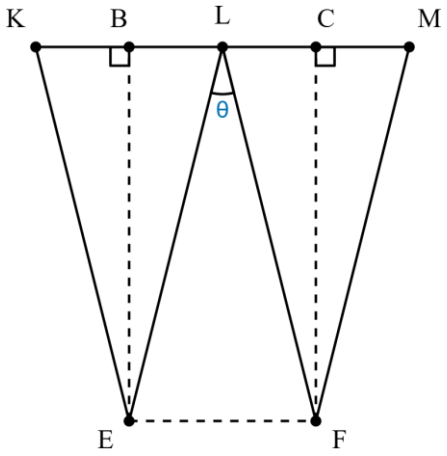
Khi bật đèn chiếu gần (Hình 1), hai vùng sáng được mô hình hóa bởi hai tam giác cân bằng nhau EAC và FBD, có các đáy AC, BD nằm trên tường. Các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên tường và $AB=BC=CD=2$ (mét). Gọi P là giao điểm của EC và FB, đặt $\alpha=BPC$.

thuvientoanhoc.com



Hình 1. Đèn chiếu gần

Khi bật đèn chiếu xa (hình 2), hai vùng sáng được mô hình hóa bởi hai tam giác cân bằng nhau EKL và FLM, có các đáy KL, LM nằm trên tường; các điểm K, L, M theo thứ tự trên tường. Đặt $\theta = ELF$.



Hình 2. Đèn chiếu xa

Biết α, θ đều là góc nhọn. Khi chuyển sang đèn chiếu xa, tổng độ rộng vùng được chiếu sáng trên tường giảm đi $\frac{1}{3}$ so với khi chiếu gần, tức là $KM = \frac{2}{3}AD$.

a) Tổng độ rộng vùng được chiếu sáng trên tường khi bật đèn chiếu gần là $AD = 4$ (mét).

b) Hai góc α, θ thỏa mãn $\tan\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}$.

c) Hai góc α, θ thỏa mãn $\tan\alpha > 2\tan\theta$.

d) Cho biết $\tan(\alpha - \theta) = \frac{33}{56}$. Khi đó khoảng cách từ mỗi đèn xe đến bức tường là $h = 3$ (mét).

Lời giải

a) Sai. Ta có $AD = AB + BC + CD = 2 + 2 + 2 = 6$.

b) Đúng.

Trong tam giác cân PBC, đường cao từ P đồng thời là đường phân giác, nên $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}h} = \frac{2}{h}$.

Tương tự, ta có: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{h}$. Do đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}$.

c) Đúng.

thuvientoanhoc.com

Vì α là góc nhọn nên $\frac{\alpha}{2}<45^\circ$, từ đó suy ra $\frac{2}{h}<1\Rightarrow h>2.$

Áp dụng công thức tang góc đôi: $\tan\alpha=\frac{2\cdot\frac{2}{h}}{1-\frac{4}{h^2}}=\frac{4h}{h^2-4}$, $\tan\theta=\frac{2\cdot\frac{1}{h}}{1-\frac{1}{h^2}}=\frac{2h}{h^2-1}.$

Với $h>2$, ta có: $\tan\alpha-2\tan\theta=\frac{4h}{h^2-4}-\frac{4h}{h^2-1}=\frac{12h}{\left(h^2-4\right)\left(h^2-1\right)}>0.$ Như vậy, $\tan\alpha>2\tan\theta$.

d) Đúng.

Vì các nửa góc đều thuộc khoảng $\left(0^\circ;45^\circ\right)$ nên $\alpha>\theta$. Đặt $t=\tan\frac{\alpha-\theta}{2}>0.$

Theo công thức tang của hiệu hai góc: $t=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{2}{h}-\frac{1}{h}}{1+\frac{2}{h^2}}=\frac{h}{h^2+2}.$

Mặt khác, giả thiết cho $\tan\left(\alpha-\theta\right)=\frac{33}{56}.$

Sử dụng công thức tang góc đôi: $\frac{2t}{1-t^2}=\frac{33}{56}$

Do $t>0$, suy ra $t=\frac{3}{11}$. Vì vậy: $\frac{h}{h^2+2}=\frac{3}{11}\Rightarrow h=\frac{2}{3}$ hoặc $h=3$.

Điều kiện $h>2$ loại nghiệm $h=\frac{2}{3}$, nên $h=3.$

Câu 3: Kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.
Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên như sau:

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Học sinh trường A	4	5	3	4	2
Học sinh trường B	2	5	4	3	1

a) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường A là $6,1$.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B làm tròn đến hàng phần trăm là $1,23$.

c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường A có điểm trung bình đồng đều hơn.

Lời giải

a) Cỡ mẫu: $n_A=18$

Gọi $x_1;x_2;\ldots;x_{18}$ là mẫu số liệu gốc về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1;\ldots;x_4\in[5;6);x_5;\ldots;x_9\in[6;7);x_{10};\ldots;x_{12}\in[7;8);x_{13};\ldots;x_{16}\in[8;9);x_{17};x_{18}\in[9;10)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_5\in[6;7)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1=6+\frac{\frac{18}{4}-4}{5}(7-6)=6,1$. **Vậy a) đúng.**

thuvientoanhoc.com

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{14} \in [8;9)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3 = 8 + \dfrac{\dfrac{3.18}{4} - (4+5+3)}{4}(9-8) = 8,375$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 2,275$. **Vậy b) sai.**

c) Cỡ mẫu: $n_B = 15$

Gọi $y_1; y_2; \ldots; y_{15}$ là mẫu số liệu gốc về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường B được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $y_1; y_2 \in [5;6); y_3; \ldots; y_7 \in [6;7); y_8; \ldots; y_{11} \in [7;8); y_{12}; \ldots; y_{14} \in [8;9); y_{15} \in [9;10)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $y_4 \in [6;7)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1' = 6 + \dfrac{\dfrac{15}{4} - 2}{5}(7-6) = 6,35$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $y_{12} \in [8;9)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3' = 8 + \dfrac{\dfrac{3.15}{4} - (2+5+4)}{3}(9-8) = 8,08$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q' = Q_3' - Q_1' = 1,73$

Vậy nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn. **Vậy c) đúng.**

d) Xét số liệu của trường A:

Số trung bình: $\overline{x_A} = \dfrac{4.5,5 + 5.6,5 + 3.7,5 + 4.8,5 + 2.9,5}{18} = 7,22$

Độ lệch chuẩn: $\sigma_A = \sqrt{\dfrac{4.5,5^2 + 5.6,5^2 + 3.7,5^2 + 4.8,5^2 + 2.9,5^2}{18} - 7,22^2} \approx 1,34$

Xét số liệu của trường B:

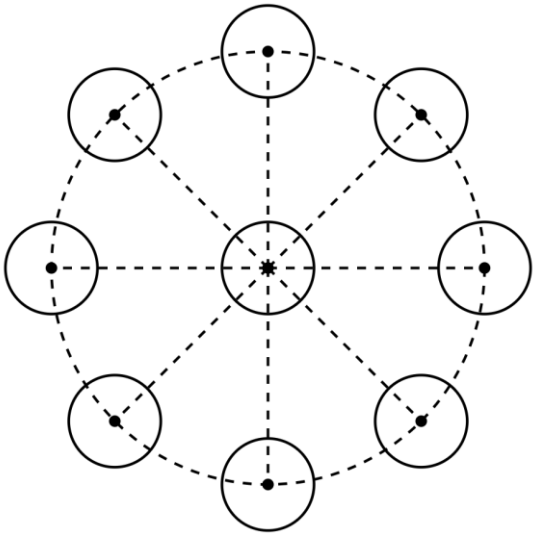
Số trung bình: $\overline{x_B} = \dfrac{2.5,5 + 5.6,5 + 4.7,5 + 3.8,5 + 1.9,5}{15} = 7,23$

Độ lệch chuẩn: $\sigma_B = \sqrt{\dfrac{2.5,5^2 + 5.6,5^2 + 4.7,5^2 + 3.8,5^2 + 1.9,5^2}{15} - 7,23^2} \approx 1,14$

Vậy nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn. **Vậy d) sai.**

Câu 4: Cho tập hợp $X = \{1;2;3;\ldots;15\}$ và chín ô hình tròn được bố trí như hình dưới đây

thuvientoanhoc.com



Chọn ngẫu nhiên chín số khác nhau từ X rồi xếp ngẫu nhiên vào chín ô, mỗi ô chứa đúng một số. Mọi cách xếp đều có khả năng xảy ra như nhau.
Bốn đường kính trong hình xác định bốn hàng, mỗi hàng gồm ô ở tâm và hai ô đối diện. Các vị trí được xem là phân biệt; hai cách xếp thu được từ nhau bằng phép quay hoặc phép đối xứng vẫn được tính là hai cách xếp khác nhau.
Gọi A là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15"; B là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15 và có tổng bằng nhau"; C là biến cố "Cả bốn hàng đều chứa số 15 và tổng các số trên mỗi hàng đều là số chẵn".

a) Xác suất để số 15 được chọn vào chín ô là $\frac{3}{5}$.

b) $P(A)=\frac{1}{9}$.

c) $P(C)=\frac{8}{1287}$.

d) $P(B)=\frac{17}{45045}$.

Lời giải

a) Đúng.
Có C_{15}^{9} cách chọn chín số từ tập X. Để số 15 được chọn, ta chọn thêm tám số từ 14 số còn lại, có C_{14}^{8} cách. Do đó, xác suất cần tìm là $\frac{C_{14}^{8}}{C_{15}^{9}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

b) Sai.
Bốn hàng chỉ có chung ô ở tâm. Vì số 15 chỉ xuất hiện một lần nên cả bốn hàng đều chứa số 15 khi và chỉ khi số 15 nằm ở ô tâm.
Số phần tử của không gian mẫu là A_{15}^{9}. Khi cố định số 15 ở tâm, có A_{14}^{8} cách điền tám ô còn lại.
Vì thế $P(A)=\frac{A_{14}^{8}}{A_{15}^{9}}=\frac{1}{15}\neq\frac{1}{9}$.

c) Đúng
Số phần tử của không gian mẫu là A_{15}^{9}.
Khi cả bốn hàng đều chứa số 15 thì ô tâm chứa số 15.
Vì 15 là số lẻ nên tổng của một hàng là số chẵn khi và chỉ khi hai số ở hai ô đối diện khác tính chẵn lẻ.
Trong các số từ 1 đến 14 có bảy số lẻ và bảy số chẵn. Để cả bốn hàng đều có tổng chẵn:
Có 2^4 cách chọn vị trí đặt số lẻ trong bốn cặp ô đối diện.

thuvientoanhoc.com

Có A_7^4 cách điền bốn số lẻ vào các vị trí đã chọn.

Có A_7^4 cách điền bốn số chẵn vào các vị trí còn lại.

Suy ra $P(C)=\dfrac{2^4\left(A_7^4\right)^2}{A_{15}^9}=\dfrac{8}{1287}$.

d) Sai

Biến cố B xảy ra thì số 15 phải ở ô tâm. Khi đó, tổng bốn hàng bằng nhau khi và chỉ khi bốn cặp số ở các ô đối diện có cùng tổng.

Bước 1. Đếm số cách chọn bốn cặp số cùng tổng.

Với mỗi số nguyên s, gọi k_s là số cặp không thứ tự $\{u;v\}$ thỏa mãn $1\le u<v\le 14, u+v=s$.

Hai cặp khác nhau có cùng tổng không thể có chung một số: nếu $u+v=u+w$ thì $v=w$. Vì vậy, chọn bất kỳ bốn cặp khác nhau cùng tổng sẽ luôn thu được tám số khác nhau.

Chỉ những giá trị s có $k_s\ge 4$ mới có thể tạo ra bốn cặp cần tìm:

Tổng s	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Số cặp k_s	4	4	5	5	6	6	7	6	6	5	5	4	4

Do đó, số cách chọn bốn cặp cùng tổng là $\sum_{s=9}^{21}C_{k_s}^4=4C_4^4+4C_5^4+4C_6^4+C_7^4=4+20+60+35=119$.

Bước 2. Đếm số cách xếp ứng với mỗi bộ bốn cặp.

Có 4! cách phân bốn cặp vào bốn hàng.

Trong mỗi hàng, có hai cách đổi chỗ hai số ở hai ô đối diện, nên có 2^4 cách xếp trong bốn hàng.

Bởi vậy, số cách xếp thuận lợi cho B là $n(B)=119\cdot 4!\cdot 2^4=45696$.

Bước 3. Tính xác suất.

Toàn bộ phép thử có A_{15}^9 kết quả đồng khả năng. Vì thế:

$$P(B)=\frac{45696}{A_{15}^9}=\frac{45696}{1816214400}=\frac{17}{675675}\ne\frac{17}{45045}$$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x+5}{x+1}$ có đồ thị (G) và đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=5$ có tâm I. Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (G).

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $4\sqrt{2}-1$.

c) Tích khoảng cách từ I đến hai đường tiệm cận của (G) bằng $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

d) Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N. Khi điểm P di động trên (C) và khác M,N, diện tích tam giác PMN có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{42+7\sqrt{85}}{17}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $f(x)=2x+1+\dfrac{4}{x+1}$, $f'(x)=2-\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

Suy ra $f'(x)=0\Rightarrow(x+1)^2=2\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$.

thuvientoanhoc.com

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)$ và $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$; nghịch biến trên các khoảng $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$ và $\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$.

a) Sai. Vì $-1-\sqrt{2}<-2$ nên hàm số không đồng biến trên toàn bộ khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Đúng. Ta có $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f\left(-1+\sqrt{2}\right)=2\left(-1+\sqrt{2}\right)+1+\dfrac{4}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-1.$

c) Sai. Từ $f(x)=2x+1+\dfrac{4}{x+1}$, suy ra hai đường tiệm cận của (G) là $d_1: x=-1, d_2: y=2x+1.$

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Khi đó: $d(I,d_1)=|-2+1|=1$, $d(I,d_2)=\dfrac{|2(-2)-1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}.$

Tích khoảng cách cần tìm là $d(I,d_1).d(I,d_2)=1.\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\neq\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

d) Đúng. Hai điểm cực trị của đồ thị là $A\left(-1-\sqrt{2};-1-4\sqrt{2}\right), B\left(-1+\sqrt{2};-1+4\sqrt{2}\right).$

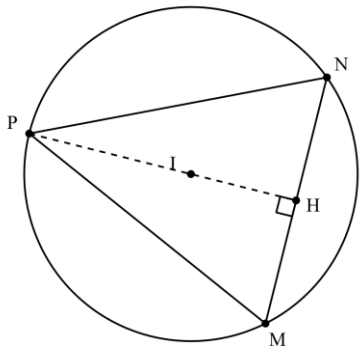
Cả hai điểm đều thuộc đường thẳng $y=4x+3$, nên $\Delta: y=4x+3\Leftrightarrow\Delta: 4x-y+3=0.$

Khoảng cách từ tâm I đến Δ bằng $d(I,\Delta)=\dfrac{|4(-2)-1+3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{17}}.$

Vì $\dfrac{6}{\sqrt{17}}<\sqrt{5}=R$, đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ. Khi đó H là trung điểm của dây MN, nên $MN=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{5-\dfrac{36}{17}}=\dfrac{14}{\sqrt{17}}.$

Hình dưới biểu diễn vị trí của P khi diện tích đạt giá trị lớn nhất.



Với mọi $P\in(C)$, khoảng cách từ P đến Δ thỏa mãn $d(P,\Delta)\le PI+d(I,\Delta)=R+IH.$

Dấu bằng xảy ra khi P nằm trên tia HI, ở phía ngoài đoạn HI.

Khi đó P, I, H thẳng hàng, I nằm giữa P, H, và $PH=PI+IH=R+IH.$

Vì đáy MN cố định, suy ra $\max S_{PMN}=\dfrac{1}{2}MN(R+IH)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{14}{\sqrt{17}}\left(\sqrt{5}+\dfrac{6}{\sqrt{17}}\right)=\dfrac{42+7\sqrt{85}}{17}.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2$, $AD=5$, $SA=SB$, $SC=SD.$ Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Biết tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng 7. Gọi N, M lần lượt là trung điểm của AB, CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$

a) $SN\perp SM$.

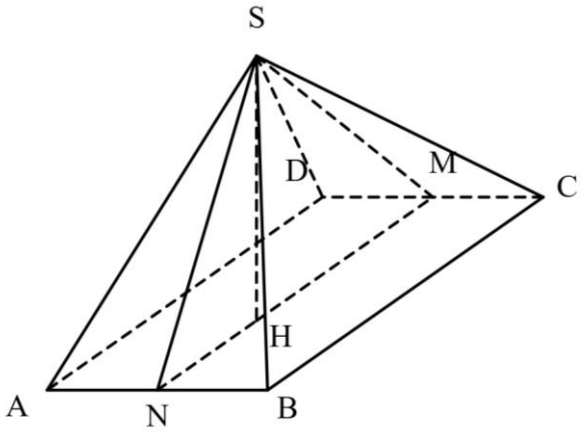
b) $SN.SM=10$.

thuvientoanhoc.com

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng 8.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{120}{169}$.

Lời giải



a) Đúng

Vì $SA = SB$ và N là trung điểm của AB nên $SN \perp AB$.

Tương tự, $SC = SD$ và M là trung điểm của CD nên $SM \perp CD$.

Do $AB \parallel CD$, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S, song song với AB và CD. Hai đường thẳng SN, SM cùng vuông góc với giao tuyến này.

Vì $(SAB) \perp (SCD)$ nên $SN \perp SM$.

b) Sai

Do $ABCD$ là hình chữ nhật và N, M lần lượt là trung điểm của AB, CD nên: $MN = AD = 5.$

Từ ý a), tam giác SNM vuông tại S, suy ra: $SN^2 + SM^2 = MN^2 = 25.$

Mặt khác, theo giả thiết về diện tích: $\dfrac{1}{2}AB \cdot SN + \dfrac{1}{2}CD \cdot SM = 7.$

Vì $AB = CD = 2$ nên: $SN + SM = 7.$

Do đó: $SN \cdot SM = \dfrac{(SN+SM)^2 - \left(SN^2 + SM^2\right)}{2} = \dfrac{49-25}{2} = 12.$

c) Đúng

Ta có $AB \perp SN$ và $AB \perp NM$, suy ra: $AB \perp (SNM)$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp AB$. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ vì thế nằm trong mặt phẳng (SNM). Suy ra $H \in NM$, và SH là đường cao ứng với cạnh huyền NM của tam giác vuông SNM.

Tính diện tích tam giác SNM theo hai cách: $\dfrac{1}{2}SN \cdot SM = \dfrac{1}{2}NM \cdot SH.$

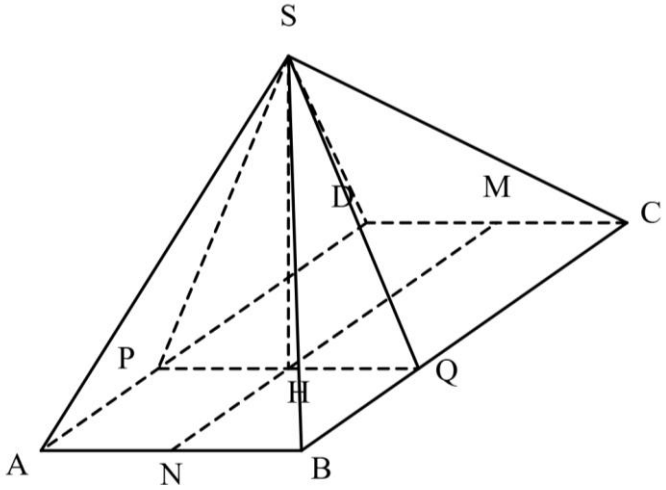
Vậy: $SH = \dfrac{SN \cdot SM}{NM} = \dfrac{12}{5}.$

Diện tích đáy bằng: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2 \cdot 5 = 10.$

Thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot 10 \cdot \dfrac{12}{5} = 8.$

thuvientoanhoc.com

d) Sai Gọi N, M lần lượt là trung điểm của AB, CD; H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống $(ABCD)$. Kẻ $HP \perp AD$ tại P và $HQ \perp BC$ tại Q.



Vì $SA = SB$ và $SH \perp (ABCD)$ nên hai tam giác vuông SHA, SHB cho $HA = HB$. Do đó H thuộc đường trung trực của AB trong mặt phẳng đáy, tức là $H \in MN$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên P, H, Q thẳng hàng và $HP = HQ = \dfrac{AB}{2} = 1, PQ = AB = 2.$

Theo kết quả đã có, $SH = \dfrac{12}{5}$.

Áp dụng định lý ba đường vuông góc, từ $HP \perp AD$ và $HQ \perp BC$ suy ra $SP \perp AD, SQ \perp BC.$

Trong các tam giác vuông SHP và SHQ, ta có: $SP = SQ = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 + 1} = \dfrac{13}{5}.$

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có giao tuyến d đi qua S và song song với AD, BC. Do đó $SP \perp d$ và $SQ \perp d$, nên PSQ là một góc phẳng của nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng này.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác SPQ: $\cos PSQ = \dfrac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2SP \cdot SQ} = \dfrac{2\left(\dfrac{13}{5}\right)^2 - 2^2}{2\left(\dfrac{13}{5}\right)^2} = \dfrac{119}{169}.$

Vì $\cos PSQ > 0$ nên PSQ là góc nhọn.

Vậy góc φ giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) chính là PSQ, suy ra $\cos\varphi = \dfrac{119}{169}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một công ty sản xuất ghế gỗ để xuất khẩu. Qua phân tích hoạt động sản xuất, công ty xác định rằng nếu chi phí sản xuất mỗi chiếc ghế là x USD thì số lượng ghế xuất khẩu là $Q(x) = -x^2 + 100x - 1600$ (trăm chiếc), với $20 < x < 80$. Toàn bộ số ghế này được đối tác mua với giá cố định 120 USD/chiếc. Ngoài chi phí sản xuất, công ty phải nộp thuế xuất khẩu a USD/chiếc và không phát sinh chi phí nào khác. Theo chính sách hỗ trợ doanh nghiệp, mức thuế xuất khẩu được lựa chọn sao cho lợi nhuận của công ty bằng hai lần tổng tiền thuế phải nộp. Hỏi mức thuế a bằng bao nhiêu USD/chiếc để lợi nhuận của công ty lớn nhất? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)*

Lời giải

Đáp án: $25,2$

Với $20 < x < 80$, ta có $Q(x) = -(x-20)(x-80) > 0$.

Gọi L là lợi nhuận và T là tổng tiền thuế, cùng tính theo đơn vị trăm USD.

Khi đó: $L = (120 - x - a)Q(x), T = aQ(x).$

thuvientoanhoc.com

Điều kiện $L=2T$ cho: $(120-x-a)Q(x)=2aQ(x)\Rightarrow a=\dfrac{120-x}{3}$.

Suy ra: $L=\dfrac{2}{3}(120-x)\left(-x^2+100x-1600\right)$.

Để lợi nhuận lớn nhất, ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(120-x)\left(-x^2+100x-1600\right), 20<x<80$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-440x+13600$.

Giải phương trình: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{220\pm 20\sqrt{19}}{3}$.

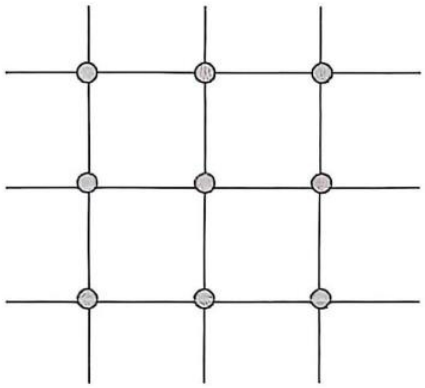
Trong hai nghiệm, chỉ có $x_0=\dfrac{220-20\sqrt{19}}{3}\approx 44,274$ thuộc khoảng $(20;80)$; nghiệm còn lại lớn hơn 80.

Trên khoảng $(20;x_0)$, $f'(x)>0$; trên khoảng $(x_0;80)$, $f'(x)<0$.

Vì vậy, lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất khi $x=x_0$.

Mức thuế tương ứng là: $a=\dfrac{120-x_0}{3}=\dfrac{140+20\sqrt{19}}{9}\approx 25,242$.

Câu 2: Cho một mạng điểm ô vuông 3×3 như hình vẽ bên dưới. Lần lượt chọn ngẫu nhiên ba điểm A,B,C phân biệt trên mạng điểm. Biết xác suất để $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\le 0$ bằng $\dfrac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{N},(m,n)=1$. Tính $26m+11n$.



Lời giải

Đáp án: 1187

1.Tính số phần tử của không gian mẫu

Số phần tử của không gian mẫu khi chọn lần lượt ngẫu nhiên 3 điểm phân biệt A,B,C từ mạng 9 điểm là $n(\Omega)=A_9^3=9\times 8\times 7=504$.

2. Phân tích số kết quả thuận lợi

Điều kiện $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\le 0$ tương đương với góc $\angle BAC\ge 90^\circ$, sẽ rơi vào một trong ba trạng thái thẳng hàng (với A nằm giữa), tạo thành tam giác vuông tại A, hoặc tạo thành tam giác tù tại A. Trong mọi tập con 3 điểm thỏa mãn một trong ba điều kiện trên, có đúng một cách chọn điểm A có $2!=2$ cách chọn hai điểm B,C.

* **Trường hợp 1: 3 điểm thẳng hàng ($\angle BAC=180^\circ$)**

Có 8 đường thẳng chứa 3 điểm trên mạng lưới (3 đường ngang, 3 đường dọc, 2 đường chéo).

Số bộ (A,B,C) thỏa mãn: $8\times 2=16$ bộ.

* **Trường hợp 2: 3 điểm tạo thành tam giác vuông ($\angle BAC=90^\circ$)**

Ta phân loại dựa theo vị trí của đỉnh A:

+) A nằm ở 4 góc: Mỗi điểm tạo được 4 tam giác vuông $\Rightarrow 4\times 4=16$ tam giác.

+) A nằm ở 4 điểm giữa các cạnh: Mỗi điểm tạo được 5 tam giác vuông $\Rightarrow 4\times 5=20$ tam giác

thuvientoanhoc.com

+) A nằm ở tâm: Tạo được 8 tam giác vuông.

Tổng cộng có $16+20+8=44$ tam giác vuông. Số bộ (A,B,C) thỏa mãn: $44\times 2=88$ bộ.

* **Trường hợp 3: 3 điểm tạo thành tam giác tù ($\angle BAC>90^\circ$)**

Ta phân loại dựa theo vị trí của đỉnh A:

+) A nằm ở 4 góc: Không thể tạo góc tù $\Rightarrow 0$ tam giác.

+) A nằm ở 4 điểm giữa các cạnh: Mỗi điểm tạo được 4 tam giác tù $\Rightarrow 4\times 4=16$ tam giác.

+) A nằm ở tâm: Tạo được 8 tam giác tù.

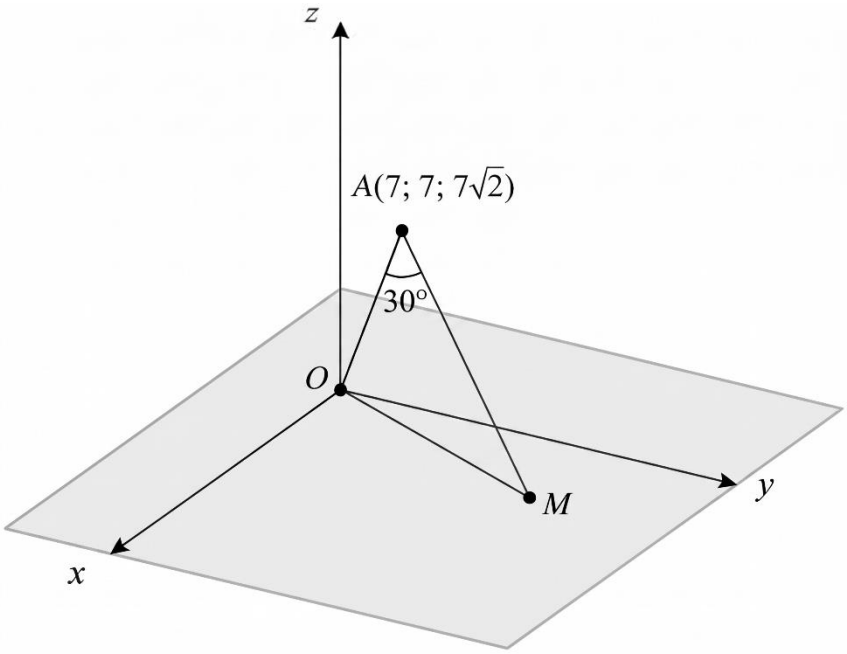
Tổng cộng có $16+8=24$ tam giác tù. Số bộ (A,B,C) thỏa mãn: $24\times 2=48$ bộ.

Tổng số kết quả thuận lợi của biến cố là: $n(E)=16+88+48=152$.

3. Tính xác suất và kết quả chung cuộc

Xác suất của biến cố: $P=\dfrac{152}{504}=\dfrac{19}{63}$. Do đó $26m+11n=1187$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một thiết bị quan sát được đặt cố định tại điểm $A\left(7;7;7\sqrt{2}\right)$. Một robot AI (coi như là một chất điểm) có vị trí $M\left(x;y;0\right)$ đang di chuyển trên mặt phẳng (Oxy). Để kiểm chứng khả năng tính toán của robot AI, người ta đưa ra câu lệnh AI (Prompt AI) yêu cầu robot phải di chuyển để tìm được vị trí sao cho biểu thức $Q=\left(x-y-6\right)\left(x+y+10\right)$ đạt được giá trị lớn nhất, đồng thời trong suốt quá trình di chuyển, robot AI luôn phải giữ góc giữa hai tia AO và AM bằng 30° và đảm bảo điều kiện $x+y\ge 0$. Giả sử sau một thời gian di chuyển, robot AI đã tìm được một vị trí $M_o\left(a;b;0\right)$ thỏa mãn yêu cầu của Prompt AI và giá trị lớn nhất của biểu thức Q là Q_0. Khi đó $(a-b)Q_0$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp số: **605**

B1) Thiết lập điều kiện tọa độ từ giả thiết góc.

Ta có $\overrightarrow{AO}=\left(-7;-7;-7\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(x-7;y-7;-7\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $AO=14$, $AM=\sqrt{x^2+y^2-14\left(x+y\right)+196}$ và $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=196-7\left(x+y\right)$.

Đặt $u=x-y$, $v=x+y$. Khi đó $v\ge 0$, $x^2+y^2=\dfrac{u^2+v^2}{2}$ và $Q=\left(u-6\right)\left(v+10\right)$.

thuvientoanhoc.com

Từ $OAM=30^\circ$, ta được $\dfrac{196-7v}{14\sqrt{\dfrac{u^2+v^2}{2}-14v+196}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $28-v=\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{u^2+v^2}{2}-14v+196}$.

Bình phương hai vế và thu gọn: $(28-v)^2=3\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}-14v+196\right)\Rightarrow u^2+\dfrac{(v+14)^2}{3}=196$.

B2) Kiểm tra điều kiện sau khi bình phương.

Từ hệ thức trên và $v\ge 0$, suy ra $0\le v\le 14\sqrt{3}-14<28$. Vì vậy $28-v>0$, phù hợp với phương trình trước khi bình phương; không phát sinh nghiệm ngoại lai trên miền đang xét.

B3) Tìm một chặn trên cho Q.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz:

$$11u+5(v+14)=11u+5\sqrt{3}\cdot\frac{v+14}{\sqrt{3}}\le\sqrt{\left(11^2+(5\sqrt{3})^2\right)\left(u^2+\frac{(v+14)^2}{3}\right)}=\sqrt{196.196}=196.$$

Do đó $11u+5v\le 126$.

Nếu $u\le 6$ thì do $v+10>0$, ta có $Q=(u-6)(v+10)\le 0<55$.

Nếu $u>6$, đặt $a=11(u-6)>0$, $b=5(v+10)>0$.

Khi đó $a+b=11u+5v-16\le 110$ và $ab=55Q$.

Sử dụng $4ab\le(a+b)^2$, suy ra $220Q\le(a+b)^2\le 110^2=12100$. Vậy $Q\le 55$.

Xét dấu bằng và vị trí đạt cực đại.

Chọn $u=11$, $v=1$. Khi đó $u^2+\dfrac{(v+14)^2}{3}=196$, $v\ge 0$;

$11(u-6)=5(v+10)=55$.

Nên các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra dấu bằng.

Từ $x-y=11$, $x+y=1$, suy ra $x=6$, $y=-5$.

Kiểm tra trực tiếp giả thiết góc tại $M(6;-5;0)$.

Ta có $x+y=1\ge 0$ và $\overrightarrow{AM}=\left(-1;-12;-7\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $AM=\sqrt{1+144+98}=9\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=7+84+98=189$.

Do đó $\cos OAM=\dfrac{189}{14\cdot 9\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, nên $OAM=30^\circ$ (thỏa mãn)

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số nguyên. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1y_1=x_2y_2=6$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của c có thể xảy ra. Tính tổng bình phương các phần tử trong S.

Lời giải

Đáp án: 976

+) Xét hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có $y'=3x^2+2ax+b$

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị, phương trình $y'=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Điều kiện: $\Delta'=a^2-3b>0\Leftrightarrow 3b-a^2<0$.

Ta có: $y=y'\cdot\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{a}{9}\right)+\left(\dfrac{2b}{3}-\dfrac{2a^2}{9}\right)x+\left(c-\dfrac{ab}{9}\right)$

Tại các điểm cực trị x_1,x_2 ta có $y'=0$, do đó: $y_i=\left(\dfrac{2b}{3}-\dfrac{2a^2}{9}\right)x_i+\left(c-\dfrac{ab}{9}\right)$ (với $i=1,2$)

thuvientoanhoc.com

Theo giả thiết $x_1y_1 = x_2y_2 = 6$, ta nhân hai vế với x_i:

$$x_i\left[\left(\frac{2b}{3}-\frac{2a^2}{9}\right)x_i+\left(c-\frac{ab}{9}\right)\right]=6 \Leftrightarrow \left(\frac{6b-2a^2}{9}\right)x_i^2+\left(c-\frac{ab}{9}\right)x_i-6=0 \text{ (với } i=1,2\text{)}$$

Như vậy, x_1, x_2 đồng thời là nghiệm của hai phương trình bậc hai:

$3x^2+2ax+b=0$ (1) và $\left(\frac{6b-2a^2}{9}\right)x^2+\left(c-\frac{ab}{9}\right)x-6=0$ (2)

Do đó, các hệ số của hai phương trình này phải tỷ lệ với nhau: $\frac{\frac{6b-2a^2}{9}}{3}=\frac{c-\frac{ab}{9}}{2a}=\frac{-6}{b}$

+) Từ tỷ lệ thứ nhất và thứ ba, ta thiết lập phương trình cho a và b:

$$\frac{6b-2a^2}{27}=\frac{-6}{b} \Leftrightarrow 6b^2-2a^2b=-162 \Leftrightarrow b(3b-a^2)=-81$$

Do $a,b\in\mathbb{Z}$ và $3b-a^2<0$ (từ điều kiện cực trị $\Delta'>0$), suy ra $b>0$.

Vì vậy, b phải là ước nguyên dương của 81, nên $b\in\{1;3;9;27;81\}$.

Kiểm tra các trường hợp của b:

$*\, b=1\Rightarrow 3-a^2=-81\Rightarrow a^2=84$ (Loại vì $a\notin\mathbb{Z}$)

$*\, b=3\Rightarrow 9-a^2=-27\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$ (Thỏa mãn $\Delta'=27>0$) $\Rightarrow c=\pm 6\left(\frac{3}{9}-\frac{12}{3}\right)=\pm 22$

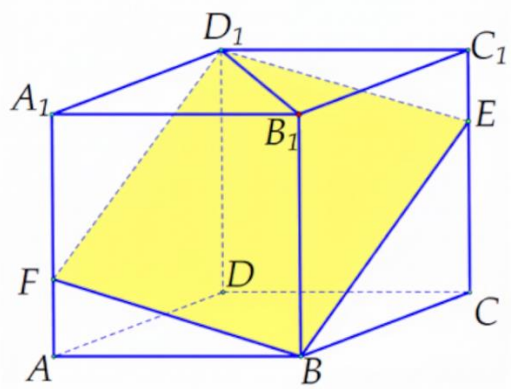
$*\, b=9\Rightarrow 27-a^2=-9\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$ (Thỏa mãn $\Delta'=9>0$) $\Rightarrow c=\pm 6\left(\frac{9}{9}-\frac{12}{9}\right)=\pm 2$

$*\, b=27\Rightarrow 81-a^2=-3\Rightarrow a^2=84$ (Loại)

$*\, b=81\Rightarrow 243-a^2=-1\Rightarrow a^2=244$ (Loại)

Vậy $S=\{-22;-2;2;22\}$. Suy ra $T=(-22)^2+(-2)^2+2^2+22^2=976$.

Câu 5: Như hình vẽ, trong hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB=6, AD=7, AA_1=9$



Điểm E là một điểm di động trên cạnh CC_1. Mặt phẳng BED_1 cắt cạnh AA_1 tại điểm F.

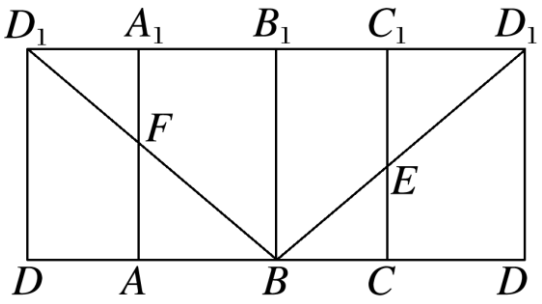
Giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác BED_1F bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)

Lời giải

Trả lời: 31,6

Khai triển hình hộp chữ nhật ra mặt phẳng như hình dưới các mặt bên được mở phẳng, khi đó các đoạn BE, ED_1, D_1F, FB đều nằm trên hình khai triển.

thuvientoanhoc.com



Trong hình khai triển, giữ nguyên hai đỉnh B và D_1. Khi E chạy trên cạnh CC_1 và F chạy trên cạnh AA_1, chu vi $P = BE + ED_1 + D_1F + FB$

Theo bất đẳng thức tam giác, với mọi vị trí của E và F, $BE + ED_1 \geq BD_1$, $FB + D_1F \geq BD_1$, dấu "=" xảy ra khi E và F cùng nằm trên đoạn thẳng BD_1 trong hình khai triển.

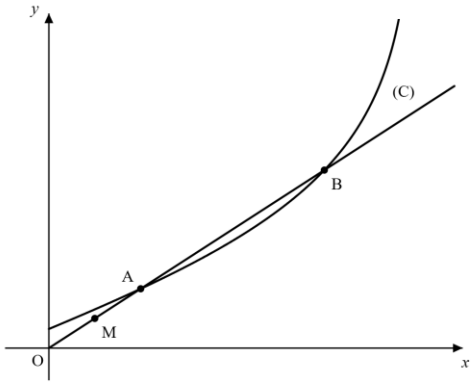
Do đó $P_{\min} = 2BD_1$.

Trong hình khai triển, $BD_1 = \sqrt{(6+7)^2 + 9^2} = \sqrt{250}$

Suy ra $P_{\min} = 2BD_1 = 2\sqrt{250} \approx 31,6$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường cong (C): $y = \log_2\left(\dfrac{5x+15}{12-5x}\right), 0 < x < \dfrac{12}{5}$.

Một chất điểm M xuất phát từ O và chuyển động thẳng đều theo một tia nằm trong góc phần tư thứ nhất. Tia này cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B, trong đó M đi qua A trước khi đi qua B. Thời gian tính từ lúc xuất phát đến khi M tới B gấp ba lần thời gian tính từ lúc xuất phát đến khi M tới A.



Biết hệ số góc của tia chuyển động bằng $\dfrac{p}{q}$, trong đó p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $12p + 2026q$.

Lời giải

Đáp số: 6138

Do chất điểm chuyển động thẳng đều và thời gian tới B gấp ba lần thời gian tới A nên $OB = 3OA$.

Đặt $A(a;b)$. Vì O, A, B cùng nằm trên một tia nên $B(3a;3b)$.

Từ điều kiện xác định và vị trí của hai điểm, suy ra $0 < a < \dfrac{4}{5}$.

Đặt $u = \dfrac{5a+15}{12-5a}$. Khi đó $b = \log_2 u$ và $u > \dfrac{5}{4}$, $a = \dfrac{12u-15}{5(u+1)}$.

Vì $B(3a;3b)$ thuộc (C) nên $\log_2\left(\dfrac{15a+15}{12-15a}\right) = 3\log_2 u$. Suy ra $\dfrac{15a+15}{12-15a} = u^3$.

Thay biểu thức của a theo u, ta được $\dfrac{51u-30}{57-24u} = u^3$, suy ra $u = 2$ (vì $u > \dfrac{5}{4}$)

thuvientoanhoc.com

Từ đó $a=\dfrac{12.2-15}{5(2+1)}=\dfrac{3}{5}, b=\log_2 2=1$. Vậy $A\left(\dfrac{3}{5};1\right), B\left(\dfrac{9}{5};3\right)$.

Hai điểm này đều thuộc miền xác định và thỏa mãn các điều kiện đã cho.

Hệ số góc của tia chuyển động là $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3/5}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow p=5, q=3\Rightarrow 12p+2026q=6138$

----------HẾT----------

GV soạn đề : Trịnh Quốc Phượng – THPT Triệu Sơn 3. ĐT : 0906 121 353

thuvientoanhoc.com