SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 1 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài:90 phút
Ngày khảo sát: 01/10/2026
(Đề gồm 06 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:…….**Mã đề 1001**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Từ độ cao $55,8\,\text{m}$ của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. $68,1\,(\text{m})$. **B.** $68,3\,(\text{m})$. **C.** $68,22\,(\text{m})$. **D.** $68,19\,(\text{m})$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2), B(-1;2;2), C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+5b-3c$ có giá trị bằng

A. 9. **B.** -10. **C.** 6. **D.** 12.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $MNPQ$ là hình vuông có tâm I là giao điểm của hai đường tiệm cận và hai đỉnh M, P lần lượt nằm trên hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Hình vuông $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất bằng

A. $6\left(\sqrt{2}+1\right)$. **B.** $12\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C.** $12\left(\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $12\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-3)\le 2$.

A. $S=(3;7]$. **B.** $S=(-\infty;7]$. **C.** $S=[7;+\infty)$. **D.** $S=[3;7]$.

Câu 5. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, hai vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính độ dài của véc tơ $\vec{w}=2\vec{a}-\vec{b}$

A. 3. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1), C(3;-4;1), B'(2;-1;3), D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -6.

Câu 7. Doanh thu bán hàng của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $[9;11)$. **B.** $[13;15)$. **C.** $[11;13)$. **D.** $[7;9)$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2 và $\widehat{BAD}=60^0;\widehat{DAA'}=90^0;\widehat{A'AB}=120^0$. Các điểm M,N thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DD'}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

thuvientoanhoc.com

Câu 9. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 10. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 11. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của một bạn được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào dưới đây.

A. 8,125. **B.** 8,152. **C.** 23,75. **D.** 9,128.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2\sqrt{5}$, tâm O và $\widehat{ABC} = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$

A. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{12}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$.

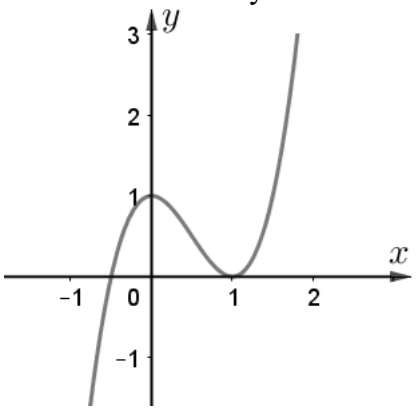
Câu 14. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(3)$ bằng

A. 2026. **B.** 4042. **C.** 696. **D.** 705.

Câu 16. Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

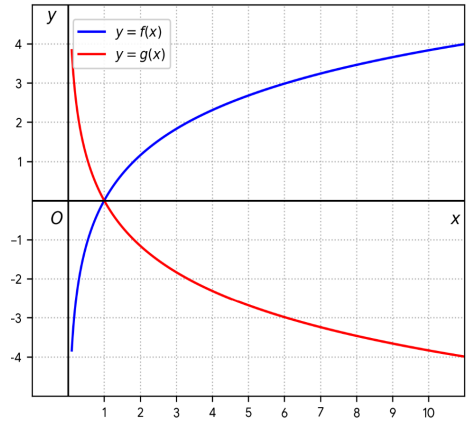
C. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 17. Một cậu bé dùng bảy màu khác nhau để tô lên bốn cạnh của hình vuông $ABCD$ sao cho mỗi cạnh chỉ tô một màu. Hỏi cậu bé có bao nhiêu cách tô mà hai cạnh kề nhau luôn khác màu?

A. 5040. **B.** 1050. **C.** 1302. **D.** 840.

thuvientoanhoc.com

Câu 18. Cho các hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ và $y=g\left(x\right)=-\dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



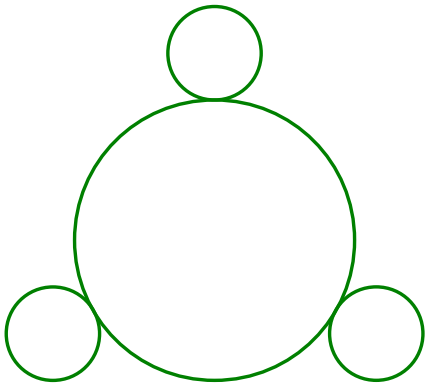
Gọi $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right)$ là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $f\left(x\right),g\left(x\right)$ sao cho ΔOAB đều. Biết rằng trên trục hoành tồn tại hai điểm M có hoành độ là x_1,x_2 sao cho $OAMB$ là tứ giác nội tiếp. Tính tổng $T=4x_1+x_2$.

A. 9. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 16

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin 2x+1$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 6.

Câu 20. Cho tập $X=\left\{1,2,3,\ldots,12,13\right\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Tính xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn.



A. $\dfrac{4}{715}$. **B.** $\dfrac{9}{1430}$. **C.** $\dfrac{7}{660}$. **D.** $\dfrac{5}{572}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Cho phương trình $\left(\ln^2 x-6\ln x+5\right)\sqrt{\ln x-m}=0$ (m là tham số thực).

a) Có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

b) Không có giá trị nguyên dương nào của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

c) Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m<5$.

d) Tập xác định của phương trình là $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 2. Một cửa hàng xăng dầu đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: $x_1,x_2,\ldots,x_{35}$ trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i. Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

thuvientoanhoc.com

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)
Số khách hàng	3	15	10	7

a) Độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở trên là $27,05$. (Làm tròn đến hàng phần trăm) .

b) Số tiền bán xăng trung bình của cửa hàng là 63 (nghìn đồng).

c) Số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy nhiều nhất là $51,18$ (nghìn đồng). (Làm tròn đến hàng phần trăm) .

d) Có 25% số giá trị nhỏ hơn $41,5$ và 75% số giá trị nhỏ hơn $74,75$

Câu 3. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=2$, $\widehat{BOC}=60°$, $\widehat{AOB}=120°$, $\widehat{AOC}=90°$. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên mặt phẳng (ABC) và N là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (OAC), G là trọng tâm tứ diện $OABC$. Gọi E là trung điểm của BC.

a) Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Tam giác ABC vuông tại C.

c) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (OAC), khi đó $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Thể tích khối tứ diện $OHNG$ bằng $\frac{1}{12}$ thể tích khối tứ diện $OABC$.

Câu 4. Một hộp chứa 21 quả cầu cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 21 (Mỗi quả ghi một số khác nhau) . Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ hộp đó.

a) Có 710 cách lấy ra ba quả cầu có tổng số ghi trên ba quả là số chẵn.

b) Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\frac{57}{266}$.

c) Số cách lấy để 3 số đó lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên dương là 8.

d) Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 8 bằng $\frac{123}{266}$.

Câu 5. Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại mặt hàng. Biết rằng hàm số biểu diễn tổng doanh thu của doanh nghiệp là $f(x)=-2x^2+55x$ (triệu đồng) và hàm số biểu diễn tổng chi phí là $g(x)=x^3-5x^2+10x+6$ (triệu đồng), với x là sản lượng sản xuất và tiêu thụ của doanh nghiệp (tính bằng trăm đơn vị sản phẩm, $0<x<6$). Giả sử nhà nước đánh mức thuế sản lượng t (triệu đồng/ trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được.

a) Khi nhà nước đánh thuế sản lượng t (triệu đồng/trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất thì sản lượng x và mức thuế t liên hệ với nhau qua hệ thức: $t=-3x^2+6x+42$.

b) Nếu chưa tính thuế sản lương, hàm số biểu diễn lợi nhuận thu được của doanh nghiệp theo sản lượng x là $L(x)=-x^3+3x^2+45x-6$ (triệu đồng).

c) Khi nhà nước chưa tính thuế sản lượng, để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì doanh nghiệp cần sản xuất ở mức sản lượng 400 đơn vị sản phẩm.

d) Khi nhà nước muốn tối đa hóa nguồn thu từ thuế, doanh nghiệp sẽ thu hẹp sản lượng còn 300 sản phẩm và nhà nươc thu được 108 triệu đồng từ nguồn thuế này.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(3;-1;1)$ và hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) sao cho điểm $I(1;0;2)$ luôn là trung điểm của MN.

a) Hình chiếu của A trên trục Oy là $E(0;2;0)$.

b) Diện tích của tam giác OAB bằng $\frac{\sqrt{138}}{4}$

thuvientoanhoc.com

c) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 + NB^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) Điểm K thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $KA + KB$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $\frac{1}{2}x_K + y_K = 1$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Bác An đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác An đặt ra các quy tắc rất khắt khe như sau:

 Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.

 Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.

 Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **3 ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: **(Văn, Sử, Địa)**, **(Toán, Lý, Hóa)**, **(Toán, Hóa, Sinh)** và **(Toán, Lý, Anh)**.

 Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp dựng đứng theo hàng ngang, thứ tự từ trái sang phải.

Biết tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên là T. Tính giá trị của $\frac{T}{2048}$.

Câu 2. Để ổn định cuộc sống , gia đình Bình mua một căn hộ chung cư với giá 3 tỷ đồng. Gia đình tự có 30% giá trị căn hộ và vay ngân hàng 70% số tiền còn lại để trả góp trong vòng 15 năm (180 tháng). Phương thức trả góp là cố định một số tiền hàng tháng (bao gồm cả gốc và lãi) trong từng giai đoạn lãi suất:

• 12 tháng đầu tiên: Ngân hàng áp dụng lãi suất ưu đãi $6,5\%$/năm. Trong giai đoạn này, cứ cuối mỗi tháng gia đình Bình trả cố định 18 triệu đồng.

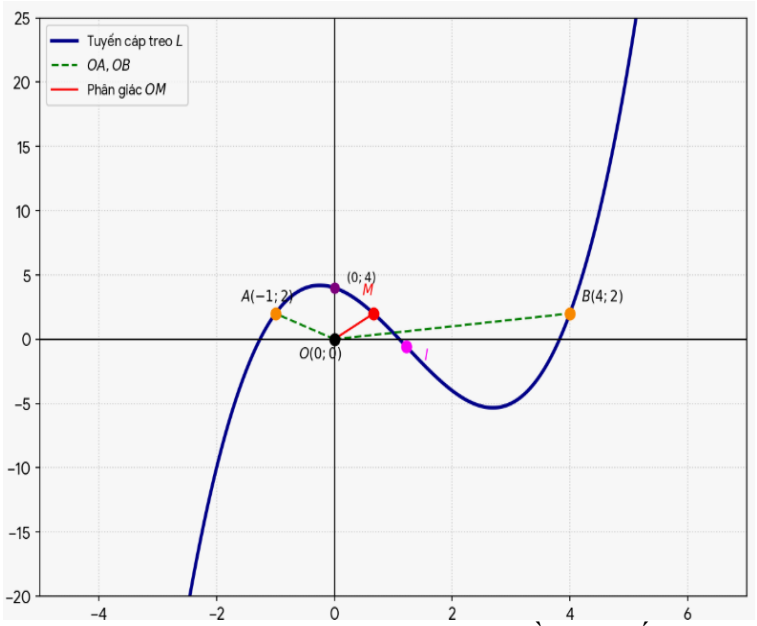
• Từ tháng thứ 13 trở đi: Lãi suất được thả nổi theo thị trường là $9,5\%$/năm. Số tiền phải trả cố định mỗi tháng được tính toán lại dựa trên dư nợ thực tế còn lại và thời gian vay còn lại sao cho đến cuối tháng thứ 180 thì gia đình Bình tất toán (hết nợ) hoàn toàn với ngân hàng.

Hỏi từ tháng thứ 13 trở đi, mỗi tháng gia đình Bình phải trả cho ngân hàng số tiền cố định là bao nhiêu triệu đồng? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy kilômét), một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(100;220;6)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo bằng $Q(250;340;20)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$. Tính tổng $a + 2b$.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy **,** mỗi đơn vị trên các trục ứng với một kilômét. Một tuyến đường cáp treo L được mô phỏng bởi đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4. Hai bạn An và Bình xuất phát từ hai trạm khác nhau trên đường cáp treo. Trạm xuất phát của An ở $A(-1;2)$, trạm của Bình ở $B(4;2)$ và trạm trung chuyển trung tâm ở gốc tọa độ $O(0;0)$. Một trạm kỹ thuật M nằm trên tuyến đường L sao cho OM là phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$. Biết các khoảng cách từ trạm trung chuyển trung tâm đến các trạm thỏa mãn hệ thức $\frac{\sqrt{2}}{OM} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$. Tìm khoảng cách từ trạm trung tâm đến tâm đối xứng của tuyến đường cáp treo L (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

thuvientoanhoc.com



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AD; $\widehat{SDA}=\widehat{SOB}=90^0$. Gọi I,F lần lượt là trung điểm của SA và IA, biết $AD=2BC=4$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DI và BF (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4.5^x+10x+m\right)+f\left(-5^{x+1}\right)=\frac{3}{2}$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S.

-- Hết --

thuvientoanhoc.com

Câu\Mã đề	000	1001	1002	1003	1004
1	B	D	B	A	B
2	B	A	D	D	B
3	B	B	C	A	B
4	A	A	D	A	B
5	D	A	B	A	B
6	D	B	D	D	D
7	C	A	B	B	D
8	C	D	D	C	B
9	C	C	A	C	C
10	B	D	D	A	C
11	C	A	B	C	C
12	C	C	D	D	A
13	B	C	A	B	B
14	B	B	B	B	D
15	D	C	A	B	B
16	D	C	C	D	C
17	B	C	C	D	B
18	D	D	D	B	B
19	B	A	C	A	A
20	B	D	D	B	C
21	ĐSĐS	ĐĐSS	ĐSĐS	ĐSSĐ	SSĐĐ
22	ĐSĐS	SĐĐS	SSĐĐ	ĐĐSS	SSĐĐ
23	ĐSĐS	SĐĐS	SĐSĐ	SĐSĐ	ĐĐSS
24	SĐSĐ	SSĐĐ	SSĐĐ	ĐSSĐ	SĐSĐ
25	ĐSSĐ	SĐSĐ	SĐSĐ	ĐSĐS	SSĐĐ
26	SĐSĐ	ĐSSĐ	ĐĐSS	ĐĐSS	SSĐĐ
27	800	2916	21,8	1,35	0.99
28	-15	21,8	1,35	-15	-15
29	21,8	800	-15	21,8	2916
30	0.99	1,35	800	800	1,35
31	1,35	0.99	0.99	2916	21,8
32	2916	-15	2916	0.99	800

thuvientoanhoc.com

ĐỀ GỐC

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-3)\le 2$.

A. $S=[3;7]$. **B.** $S=(3;7]$. **C.** $S=(-\infty;7]$. **D.** $S=[7;+\infty)$.

Câu 2. Doanh thu bán hàng của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. [7;9). **B.** [9;11). **C.** [11;13). **D.** [13;15).

Câu 3. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, hai vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính độ dài của véc tơ $\vec{w}=2\vec{a}-\vec{b}$

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 4.

Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$.

Câu 5. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của một bạn được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào dưới đây.

A. 23,75. **B.** 8,152. **C.** 9,128. **D.** 8,125.

Câu 6. Một cậu bé dùng bảy màu khác nhau để tô lên bốn cạnh của hình vuông $ABCD$ sao cho mỗi cạnh chỉ tô một màu. Hỏi cậu bé có bao nhiêu cách tô mà hai cạnh kề nhau luôn khác màu?

A. 5040. **B.** 840. **C.** 1050. **D.** 1302.

Câu 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1), C(3;-4;1), B'(2;-1;3), D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ bằng

A. -6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 9. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.

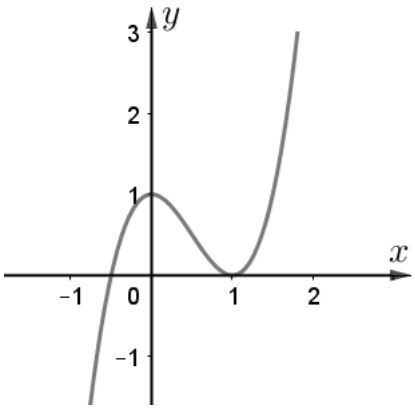
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1=3$ và công sai $d=4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n=253$. Tìm n.

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 11. Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?

thuvientoanhoc.com



A. $y=2x^3+3x^2+1$.
B. $y=2x^3-3x^2+2$.
C. $y=2x^3-3x^2+1$.
D. $y=-2x^3+3x^2+1$.

Câu 12. Từ độ cao $55,8\,\text{m}$ của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. $68,1\,(\text{m})$.
B. $68,22\,(\text{m})$.
C. $68,19\,(\text{m})$.
D. $68,3\,(\text{m})$.

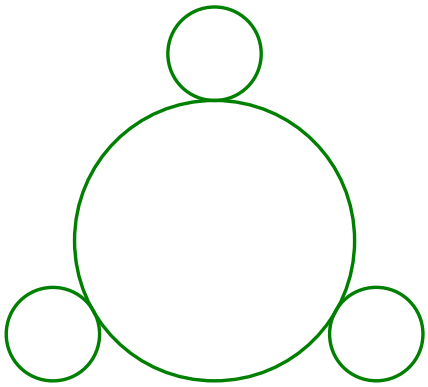
Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin 2x+1$ bằng

A. 1.
B. 5.
C. $3+2\sqrt{2}$.
D. 6.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2), B(-1;2;2), C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+5b-3c$ có giá trị bằng

A. 12.
B. 9.
C. -10.
D. 6.

Câu 15. Cho tập $X=\{1,2,3,\ldots,12,13\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Tính xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn.



A. $\frac{9}{1430}$.
B. $\frac{7}{660}$.
C. $\frac{4}{715}$.
D. $\frac{5}{572}$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2 và $\widehat{BAD}=60^0;\widehat{DAA'}=90^0;\widehat{A'AB}=120^0$. Các điểm M,N thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DD'}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN

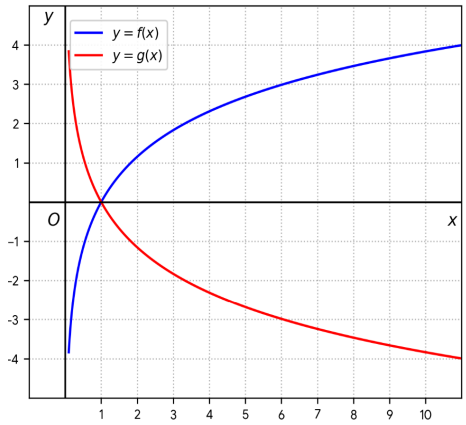
A. $4\sqrt{3}$.
B. $\sqrt{17}$.
C. $\sqrt{15}$.
D. $2\sqrt{15}$.

thuvientoanhoc.com

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $MNPQ$ là hình vuông có tâm I là giao điểm của hai đường tiệm cận và hai đỉnh M, P lần lượt nằm trên hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Hình vuông $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất bằng

A. $12\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $12\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C.** $6\left(\sqrt{2}+1\right)$. **D.** $12\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 18. Lần lượt cho các hàm số $y=f(x)=\dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ và $y=g(x)=-\dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ sao cho ΔOAB đều. Biết rằng trên trục hoành tồn tại hai điểm M có hoành độ là x_1, x_2 sao cho $OAMB$ là tứ giác nội tiếp. Tính tổng $T=4x_1+x_2$.

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 16

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(3)$ bằng

A. 4042. **B.** 696. **C.** 705. **D.** 2026.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2\sqrt{5}$, tâm O và $\widehat{ABC}=60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Một cửa hàng xăng dầu đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: $x_1, x_2, \ldots, x_{35}$ trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i. Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)
Số khách hàng	3	15	10	7

a) Số tiền bán xăng trung bình của cửa hàng là 63 (nghìn đồng).

b) Có 25% số giá trị nhỏ hơn $41,5$ và 75% số giá trị nhỏ hơn $74,75$

c) Số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy nhiều nhất là $51,18$ (nghìn đồng).
(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

d) Độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở trên là $27,05$.(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

thuvientoanhoc.com

Câu 2. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=2$, $\widehat{BOC}=60°$, $\widehat{AOB}=120°$, $\widehat{AOC}=90°$. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên mặt phẳng (ABC) và N là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (OAC), G là trọng tâm tứ diện $OABC$. Gọi E là trung điểm của BC.

a) Tam giác ABC vuông tại C.

b) Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (OAC), khi đó $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Thể tích khối tứ diện $OHNG$ bằng $\frac{1}{12}$ thể tích khối tứ diện $OABC$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(3;-1;1)$ và hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) sao cho điểm $I(1;0;2)$ luôn là trung điểm của MN.

a) Hình chiếu của A trên trục Oy là $E(0;2;0)$.

b) Diện tích của **t**am giác OAB bằng $\frac{\sqrt{138}}{4}$

c) Điểm K thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $KA+KB$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $\frac{1}{2}x_K+y_K=1$

d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2+NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Câu 4. Cho phương trình $\left(\ln^2 x-6\ln x+5\right)\sqrt{\ln x-m}=0$ (m là tham số thực).

a) Tập xác định của phương trình là $(0;+\infty)$.

b) Có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

c) Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m<5$.

d) Không có giá trị nguyên dương nào của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại mặt hàng. Biết rằng hàm số biểu diễn tổng doanh thu của doanh nghiệp là $f(x)=-2x^2+55x$ (triệu đồng) và hàm số biểu diễn tổng chi phí là $g(x)=x^3-5x^2+10x+6$ (triệu đồng), với x là sản lượng sản xuất và tiêu thụ của doanh nghiệp (tính bằng trăm đơn vị sản phẩm, $0<x<6$). Giả sử nhà nước đánh mức thuế sản lượng t (triệu đồng/ trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được.

a) Nếu chưa tính thuế sản lương, hàm số biểu diễn lợi nhuận thu được của doanh nghiệp theo sản lượng x là $L(x)=-x^3+3x^2+45x-6$ (triệu đồng).

b) Khi nhà nước chưa tính thuế sản lượng, để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì doanh nghiệp cần sản xuất ở mức sản lượng 400 đơn vị sản phẩm.

c) Khi nhà nước đánh thuế sản lượng t (triệu đồng/trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất thì sản lượng x và mức thuế t liên hệ với nhau qua hệ thức: $t=-3x^2+6x+42$.

d) Khi nhà nước muốn tối đa hóa nguồn thu từ thuế, doanh nghiệp sẽ thu hẹp sản lượng còn 300 sản phẩm và nhà nươc thu được 108 triệu đồng từ nguồn thuế này.

Câu 6. Một hộp chứa 21 quả cầu cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 21 (Mỗi quả ghi một số khác nhau) . Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ hộp đó.

a) Có 710 cách lấy ra ba quả cầu có tổng số ghi trên ba quả là số chẵn.

b) Số cách lấy để 3 số đó lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên dương là 8.

c) Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\frac{57}{266}$.

thuvientoanhoc.com

d) Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 8 bằng $\frac{123}{266}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy kilômét), một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(100;220;6)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo bằng $Q(250;340;20)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4.5^x+10x+m\right)+f\left(-5^{x+1}\right)=\frac{3}{2}$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S.

Câu 3. Để ổn định cuộc sống , gia đình Bình mua một căn hộ chung cư với giá 3 tỷ đồng. Gia đình tự có 30% giá trị căn hộ và vay ngân hàng 70% số tiền còn lại để trả góp trong vòng 15 năm (180 tháng). Phương thức trả góp là cố định một số tiền hàng tháng (bao gồm cả gốc và lãi) trong từng giai đoạn lãi suất:

• 12 tháng đầu tiên: Ngân hàng áp dụng lãi suất ưu đãi 6,5% /năm. Trong giai đoạn này, cứ cuối mỗi tháng gia đình Bình trả cố định 18 triệu đồng.

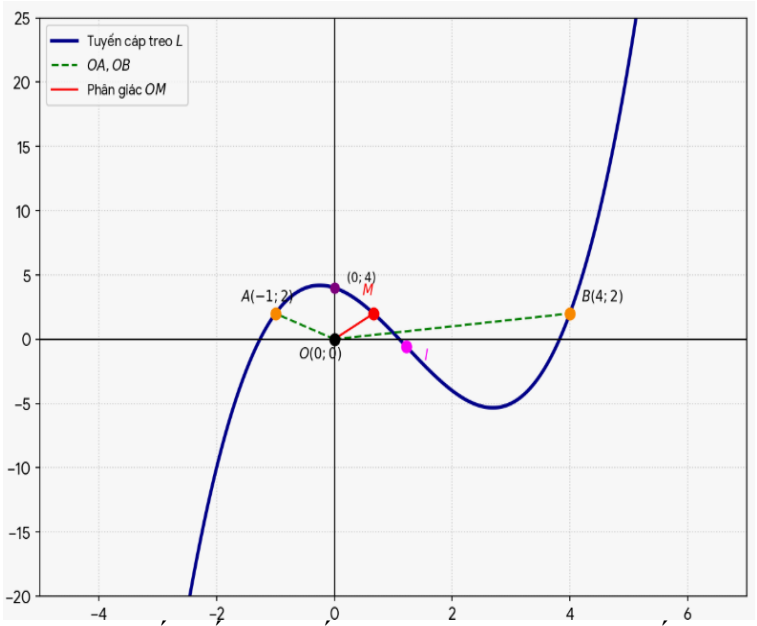
• Từ tháng thứ 13 trở đi: Lãi suất được thả nổi theo thị trường là 9,5%/năm. Số tiền phải trả cố định mỗi tháng được tính toán lại dựa trên dư nợ thực tế còn lại và thời gian vay còn lại sao cho đến cuối tháng thứ 180 thì gia đình Bình tất toán (hết nợ) hoàn toàn với ngân hàng.

Hỏi từ tháng thứ 13 trở đi, mỗi tháng gia đình Bình phải trả cho ngân hàng số tiền cố định là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AD; $\widehat{SDA}=\widehat{SOB}=90^0$. Gọi I,F lần lượt là trung điểm của SA và IA, biết $AD=2BC=4$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DI và BF (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy**,** mỗi đơn vị trên các trục ứng với một kilômét. Một tuyến đường cáp treo L được mô phỏng bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4. Hai bạn An và Bình xuất phát từ hai trạm khác nhau trên đường cáp treo. Trạm xuất phát của An ở $A(-1;2)$, trạm của Bình ở $B(4;2)$ và trạm trung chuyển trung tâm ở gốc tọa độ $O(0;0)$. Một trạm kỹ thuật M nằm trên tuyến đường L sao cho OM là phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$. Biết các khoảng cách từ trạm trung chuyển trung tâm đến các trạm thỏa mãn hệ thức $\frac{\sqrt{2}}{OM}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$. Tìm khoảng cách từ trạm trung tâm đến tâm đối xứng của tuyến đường cáp treo L (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

thuvientoanhoc.com



Câu 6. Bác An đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác An đặt ra các quy tắc rất khắt khe như sau:

 Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.

 Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.

 Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **3 ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: **(Văn, Sử, Địa)**, **(Toán, Lý, Hóa)**, **(Toán, Hóa, Sinh)** và **(Toán, Lý, Anh)**.

 Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp dựng đứng theo hàng ngang, thứ tự từ trái sang phải.

Biết tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên là T. Tính giá trị của $\dfrac{T}{2048}$.

-- Hết --

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 1 NĂM HỌC 2026 – 2027

MÔN: TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ GỐC

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20.*

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-3)\le 2$.

A. $S=[3;7]$. **B.** $S=(3;7]$. **C.** $S=(-\infty;7]$. **D.** $S=[7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\log_2(x-3)\le 2 \Leftrightarrow 0<x-3\le 4 \Leftrightarrow 3<x\le 7$.

Câu 2. Doanh thu bán hàng của một của hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. [7;9). **B.** [9;11). **C.** [11;13). **D.** [13;15).

Lời giải

Chọn B

Ta có các giá trị đại diện: $x_1=6; x_2=8; x_3=10; x_4=12; x_5=14$.

Do đó: $\overline{x}=\dfrac{6.2+8.7+10.7+12.3+14.1}{2+7+7+3+1}=9.4\in[9;11)$.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, hai vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính độ dài của véc tơ $\vec{w}=2\vec{a}-\vec{b}$

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ khi và chỉ khi $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2-\vec{a}.\vec{b}-2.\vec{b}^2=0 \Leftrightarrow 1-\vec{a}.\vec{b}-2.1=0$.

Suy ra: $\vec{a}.\vec{b}=-1$.

$\vec{w}=2\vec{a}-\vec{b} \Rightarrow \vec{w}^2=(2\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+.\vec{b}^2=4.1-4.(-1)+1=9$.

Suy ra $|\vec{w}|=3$.

Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho

thuvientoanhoc.com

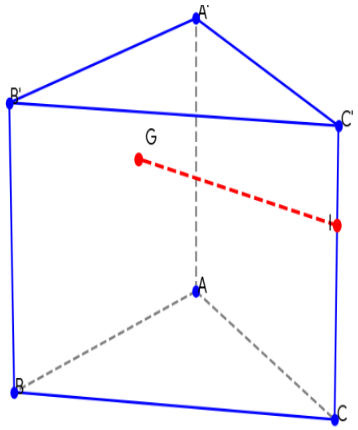
$\overrightarrow{C'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

$=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$; $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}=\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{a}$

$\Rightarrow\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}-\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$

Câu 5. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của một bạn được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào dưới đây.

A. 23,75. **B.** 8,152. **C.** 9,128. **D.** 8,125.

Lời giải

Chọn D

Ta có $n=18$

$\frac{n}{4}=4,5\Rightarrow Q_1=20+\frac{4,5-0}{6}.(25-20)=23,75.$

$\frac{3n}{4}=13,5\Rightarrow Q_3=30+\frac{13,5-12}{4}.(35-30)=31,875.$

$\Rightarrow\Delta Q=Q_3-Q_1=31,875-23,75=8,125.$

Câu 6. Một cậu bé dùng bảy màu khác nhau để tô lên bốn cạnh của hình vuông $ABCD$ sao cho mỗi cạnh chỉ tô một màu. Hỏi cậu bé có bao nhiêu cách tô mà hai cạnh kề nhau luôn khác màu?

A. 5040. **B.** 840. **C.** 1050. **D.** 1302.

Lời giải

Chọn D

Trường hợp 1: Hai cạnh AB và CD cùng tô một màu

thuvientoanhoc.com

Chọn 1 màu tô 2 cạnh có 7 cách

Hai cạnh còn lại có $6^2=36$ cách

TH1 có $7.36=252$ cách tô

Trường hợp 2: Hai cạnh AB và CD không cùng màu

Tô 2 AB và CD có $A_7^2=42$ cách

Hai cạnh còn lại có $5^2=25$ cách

TH2 có $42.25=1050$ cách tô

Vậy có tất cả $252+1050=1302$ cách tô thỏa mãn bài toán

Câu 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Vì điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB nên ta có:

$AB.\overrightarrow{IO}+OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ta có: $AB=5;OA=3;OB=4$.

Suy ra: $\begin{cases} x_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(-\frac{8}{3}\right)}{5+4+3}=0=a \\ y_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\frac{4}{3}}{5+4+3}=1=b \\ z_I=\dfrac{5.0+4.1+3.\frac{8}{3}}{5+4+3}=1=c \end{cases}$. Suy ra $a+b+c=2$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1), C(3;-4;1), B'(2;-1;3), D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ bằng

A. -6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của $AC\Rightarrow I(2;-1;0)$

Gọi I' là trung điểm của $B'D'\Rightarrow I'(1;1;4)$.

Vì $AII'A'$ là hình bình hành nên

$$\begin{cases} x=1+1-2=0 \\ y=2+1-(-1)=4\Rightarrow A'(0;4;3)\Rightarrow x+y+z=7. \\ z=-1+4-0=3 \end{cases}$$

Câu 9. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

thuvientoanhoc.com

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 5x=\pi-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right..$$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên $x\in\left\{\frac{\pi}{16};\frac{9\pi}{16};\frac{\pi}{8};\frac{11\pi}{24};\frac{19\pi}{24}\right\}$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1=3$ và công sai $d=4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n=253$. Tìm n.

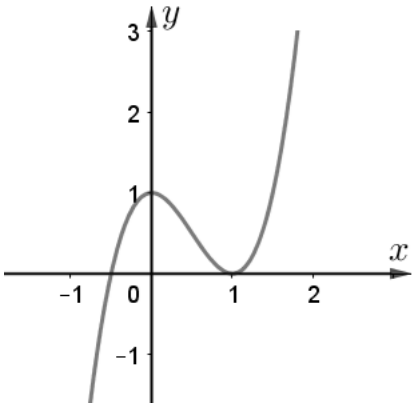
A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1=3 \\ d=4 \end{cases} \Rightarrow S_n=\frac{n}{2}\left[2.3+(n-1).4\right]=253 \Rightarrow n=11.$

Câu 11. Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?



A. $y=2x^3+3x^2+1$. **B.** $y=2x^3-3x^2+2$. **C.** $y=2x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-2x^3+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 12. Từ độ cao $55,8\,\text{m}$ của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. $68,1\,(\text{m})$. **B.** $68,22\,(\text{m})$. **C.** $68,19\,(\text{m})$. **D.** $68,3\,(\text{m})$.

Lời giải

Chọn C

Gọi h_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần rơi xuống thứ $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Gọi l_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần nảy lên thứ $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

thuvientoanhoc.com

Theo bài ra ta có $h_1 = 55,8$, $l_1 = \frac{1}{10}.55,8 = 5,58$ và các dãy số (h_n), (l_n) là các cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó ta suy ra tổng độ dài đường đi của quả bóng là:

$S = \frac{h_1}{1-\frac{1}{10}} + \frac{l_1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}(h_1 + l_1) = 68,19(m)$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin 2x + 1$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** $3 + 2\sqrt{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 2\sqrt{2}\sin 2x + \cos 2x + 2 \Rightarrow y_{\max} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} + 2 = 5$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2), B(-1;2;2), C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 5b - 3c$ có giá trị bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** -10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$M \in (Oxz) \Rightarrow b = 0 \Rightarrow M(a;0;c)$

$\overrightarrow{MA} = (1-a;0;2-c), \overrightarrow{MB} = (-1-a;2;2-c), \overrightarrow{MC} = (3-a;1;1-c)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (1-a)(-1-a) + (2-c)(2-c) = a^2 + c^2 - 4c + 3$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = (1-a)(3-a) + (2-c)(1-c) = a^2 + c^2 - 4a - 3c + 5$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = (-1-a)(3-a) + 2 + (2-c)(1-c) = a^2 + c^2 - 2a - 3c + 1$

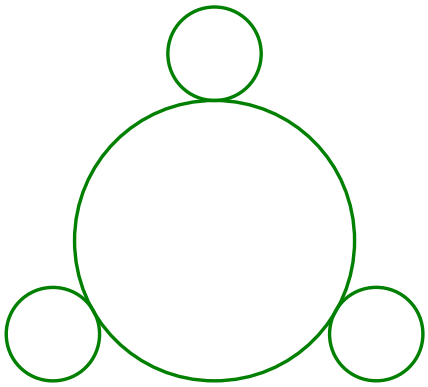
$\Rightarrow s = 2\left(a^2 + c^2 - 4c + 3\right) + a^2 + c^2 - 2a - 3c + 1 + 3\left(a^2 + c^2 - 4a - 3c + 5\right)$

$= 6a^2 + 6c^2 - 14a - 20c + 22 = 6\left(a - \frac{7}{6}\right)^2 + 6\left(c - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{17}{6} \geq -\frac{17}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{7}{6} \\ c = \frac{5}{3} \end{cases}$ $T = 12a + 5b - 3c = 9$.

Câu 15. Cho tập $X = \{1,2,3,\ldots,12,13\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Tính xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn.

thuvientoanhoc.com



A. $\frac{9}{1430}$. **B.** $\frac{7}{660}$. **C.** $\frac{4}{715}$. **D.** $\frac{5}{572}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=4.C_{13}^{4}=2860$

Giả sử 4 số được lấy ra là a,b,c,d và $a<b<c<d$

Ta có $b+c<d<a+b+c\Rightarrow a>d-(b+c)\Rightarrow a\geq 2$

$d>b+c\Rightarrow d\geq 8$

- $d=8$ ta có 1 bộ $(a;b;c)=(2;3;4)$
- $d=9$ ta có 1 bộ $(a;b;c)=(2;3;5)$
- $d=10$ ta có 3 bộ $(a;b;c)=(2;3;6),(2;4;5)(3;4;5)$
- $d=11$ ta có 4 bộ $(a;b;c)=(2;3;7),(2;4;6),(3;4;5),(3;4;6)$
- $d=12$ ta có 7 bộ $(a;b;c)=(2;3;8),(2;4;7),(2;5;6),(3;4;6),(3;4;7),(3;5;6),(4;5;6)$
- $d=13$ ta có 9 bộ
  $(a;b;c)=(2;3;9),(2;4;8),(2;5;7),(3;4;7),(3;4;8),(4;5;6),(4;5;7),(3;5;6)$
  $(3;5;7)$
  Vậy có tất cả $1+1+3+4+7+9=25$ bộ thỏa mãn điều kiện và cứ mỗi bộ có 1 cách xếp.
  Do đó xác suất cần tìm là $P=\frac{25}{2860}=\frac{5}{572}$.

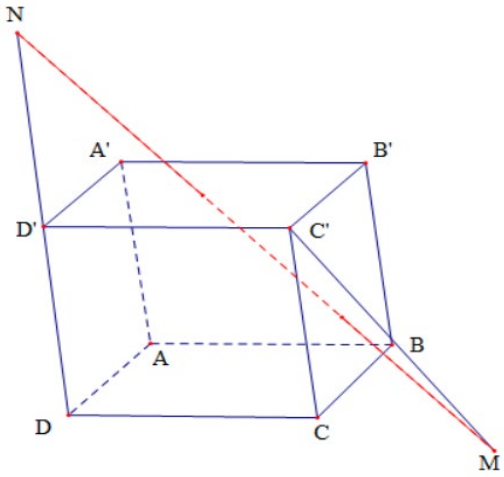
Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2 và $\widehat{BAD}=60^0;\widehat{DAA'}=90^0$; $\widehat{A'AB}=120^0$. Các điểm M,N thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DD'}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn D

thuvientoanhoc.com



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$

Ta có $\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^0=2\\ \vec{a}.\vec{c}=|\vec{a}|.|\vec{c}|.\cos 120^0=-2\\ \vec{b}.\vec{c}=|\vec{b}|.|\vec{c}|.\cos 90^0=0\end{cases}$

$\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'N}\right)^2=\left[2\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}+\vec{c}\right]^2=\left(-\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)^2$

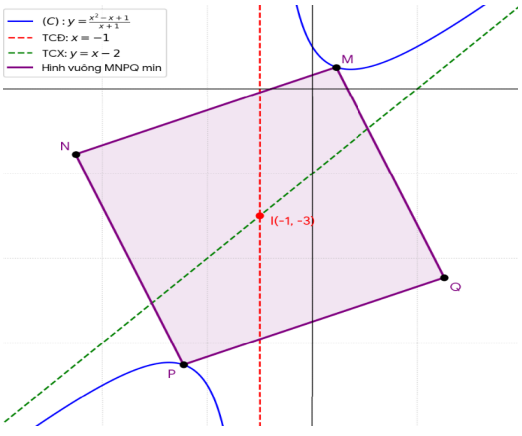
$=\vec{a}^2+4\vec{b}^2+9\vec{c}^2-4\vec{a}\vec{b}-6\vec{a}\vec{c}+12\vec{b}\vec{c}=56-8+12=60\Rightarrow MN=2\sqrt{15}$

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $MNPQ$ là hình vuông có tâm I là giao điểm của hai đường tiệm cận và hai đỉnh M, P lần lượt nằm trên hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Hình vuông $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất bằng

A. $12\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $12\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C.** $6\left(\sqrt{2}+1\right)$. **D.** $12\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải

Chọn B



Tiệm cận đứng $x=-1$; Tiệm cận xiên $y=x-2$. Tâm đối xứng $I(-1;-3)$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{a^2-a+1}{a+1}\right),(a>-1)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\left(a+1;a+1+\dfrac{3}{a+1}\right)$

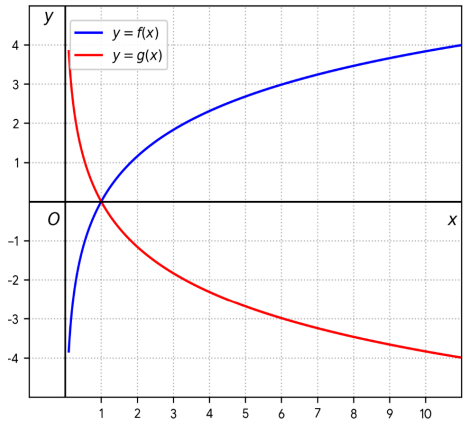
thuvientoanhoc.com

$\Rightarrow \overline{IM}^2 = (a+1)^2 + \left(a+1+\dfrac{3}{a+1}\right)^2 = 2(a+1)^2 + \dfrac{9}{(a+1)^2} + 6 \ge 6\sqrt{2}+6 \; MI^2 \ge 6\left(\sqrt{2}+1\right)$

Diện tích hình vuông $MNPQ$: $S_{MNPQ} = 2MI^2 \ge 12\left(\sqrt{2}+1\right)$

$\Rightarrow S_{MNPQ\min} = 12\left(\sqrt{2}+1\right)$

Câu 18. Cho các hàm số $y = f(x) = \dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ và $y = g(x) = -\dfrac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

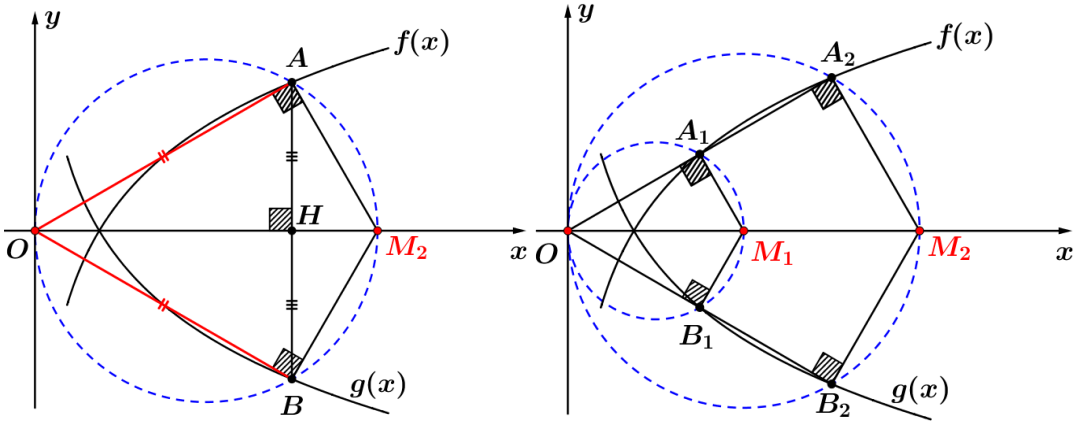


Gọi $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ sao cho ΔOAB đều. Biết rằng trên trục hoành tồn tại hai điểm M có hoành độ là x_1, x_2 sao cho $OAMB$ là tứ giác nội tiếp. Tính tổng $T = 4x_1 + x_2$.

A. 8 . **B.** 5 . **C.** 9 . **D.** 16

Lời giải

Chọn D



Gọi a là hoành độ của hai điểm A, B với $a > 0$, H là trung điểm AB

Ta có: $\begin{cases} A\left(a; \dfrac{2\log_2 a}{\sqrt{3}}\right) \\ B\left(a; -\dfrac{2\log_2 a}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \dfrac{4\log_2 a}{\sqrt{3}} \\ OH = a \end{cases}$

Do giả thiết ΔOAB đều nên ta có: $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow a = \dfrac{4\log_2 a}{\sqrt{3}} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \log_2 a = \dfrac{a}{2}$

thuvientoanhoc.com

$$\Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln 2}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A_1\left(2;\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ A_2\left(4;\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \end{array}\right.$$

Đến đây ta nhận thấy $\overrightarrow{OA_2}=2\overrightarrow{OA_1}$ nên suy ra A_1 là trung điểm OA_2.

Gọi $M_1\left(x_1;0\right)$ là điểm sao cho thỏa OA_1M_1B nội tiếp.

$\Rightarrow OA_1\perp A_1M_1\Rightarrow \overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{A_1M_1}=0 \Leftrightarrow 2\left(x_1-2\right)-\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow x_1=\frac{8}{3}\Rightarrow M_1\left(\frac{8}{3};0\right)\Rightarrow x_1=\frac{8}{3}$.

Tương tự ta có điểm $M_2\left(x_2;0\right)$ là điểm sao cho thỏa OA_2M_2B nội tiếp $\Rightarrow OA_2\perp A_2M_2$.

suy ra $A_1M_1//A_2M_2\Rightarrow x_2=2x_1=\frac{16}{3}$

Vậy $4x_1+x_2=16$.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^6+ax^2+bx+2a+b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất của $f\left(3\right)$ bằng

A. 4042. **B.** 696. **C.** 705. **D.** 2026.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1\Rightarrow f\left(x\right)\ge f\left(1\right),\forall x\in\mathbb{R}$ và hàm số phải đạt cực trị tại $x_0=1\Rightarrow f'\left(1\right)=0$

$f'\left(x\right)=6x^5+2ax+b;\ f'\left(1\right)=6+2a+b=0\Rightarrow b=-6-2a\ ;\ f\left(1\right)=-11-a$

$f\left(x\right)\ge f\left(1\right),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^6+ax^2-\left(2a+6\right)x-6\ge -11-a$

$\Leftrightarrow x^6+ax^2-\left(2a+6\right)x+5+a\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x^4+2x^3+3x^2+4x+5+a\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vì $\left(x-1\right)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu bằng chỉ xảy ra tại $x=1$), nên bất phương trình trên đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$,ta phải có $x^4+2x^3+3x^2+4x+5\ge -a\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=4x^3+6x^2+6x+4=\left(x+1\right)\left(4x^2+2x+4\right);\ g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1$

Dễ thấy hàm số $g\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right)=g\left(-1\right)=3$

Để $g\left(x\right)\ge -a,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $\min\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right)\ge -a\Rightarrow 3\ge -a\Rightarrow a\ge -3$

$f\left(3\right)=3^6+a.3^2-\left(2a+6\right)3-6=3a+705\ge 696$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f\left(3\right)$ bằng 696.

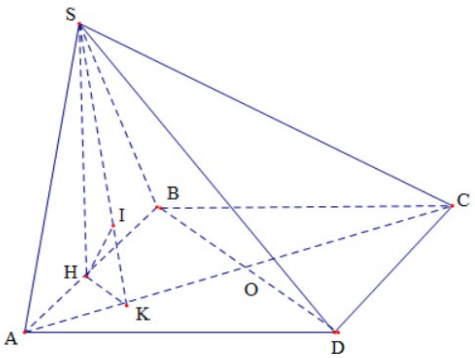
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2\sqrt{5}$, tâm O và $\widehat{ABC}=60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(SAC\right)$. Tính $\sin\alpha$

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

thuvientoanhoc.com

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra H là trung điểm của AB

Kẻ $SK \perp AC (K \in AC), HI \perp SK (I \in SK)$, suy ra $HI = d(H,(SAC))$

Các tam giác SAB và ABC là các tam giác đều cạnh $2\sqrt{5}$ nên

$$SH = \sqrt{15}; OB = \frac{\sqrt{3}}{2}.2\sqrt{5} = \sqrt{15}; HK = \frac{1}{2}OB = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow HI = \sqrt{3} \Rightarrow d(B,(SAC)) = 2d(H,(SAC)) = 2HI = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{d(B,(SAC))}{SB} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

PHẦN II

Câu 21. Một cửa hàng xăng dầu đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: $x_1, x_2, \ldots, x_{35}$ trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i. Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)
Số khách hàng	3	15	10	7

a) Số tiền bán xăng trung bình của cửa hàng là 63 (nghìn đồng).

b) Có 25% số giá trị nhỏ hơn $41,5$ và 75% số giá trị nhỏ hơn $74,75$

c) Số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy nhiều nhất là $51,18$ (nghìn đồng).

(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

d) Độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở trên là $27,05$.(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

Lời giải

Đúng – Sai – Đúng - Sai

a) Đúng. Số tiền bán xăng trung bình của cửa hàng là 63 (nghìn đồng).

$$\overline{x} = \frac{15.3 + 45.15 + 75.10 + 105.7}{35} = 63 \text{ (nghìn đồng)}$$

b) Sai.

Ta có : $\frac{n}{4} = \frac{35}{4} = 8,75$. Nhóm chứa Q_1 là nhóm $[30;60)$

$$Q_1 = 30 + \frac{8,75 - 3}{15}.30 = 41,5$$

thuvientoanhoc.com

Ta có : $\frac{3n}{4}=\frac{105}{4}=26,25$. Nhóm chứa Q_3 là nhóm $[60;90)$

$Q_3=60+\frac{26,25-18}{10}.30=84,75$

Từ đó suy ra có 25% số giá trị nhỏ hơn $41,5$ và 75% số giá trị nhỏ hơn $84,75$

c) Đúng. Số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy nhiều nhất là $51,18$ (nghìn đồng).

(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

Nhóm chứa mốt M_o của mẫu số liệu là nhóm $[30;60)$

$M_o=30+\left[\frac{15-3}{(15-3)+(15-10)}\right].30\approx 51,18.$

d) Sai. Độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở trên là $27,05.$(Làm tròn đến hàng phần trăm) .

Phương sai : $S^2=\frac{1}{35}\left[3.(15-63)^2+15(45-63)^2+10(75-63)^2+7(105-63)^2\right]=\frac{5112}{7}$

Độ lệch chuẩn: $S=\sqrt{\frac{5112}{7}}\approx 27,02.$

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=2$, $\widehat{BOC}=60°$, $\widehat{AOB}=120°$, $\widehat{AOC}=90°$. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên mặt phẳng (ABC) và N là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (OAC), G là trọng tâm tứ diện $OABC$. Gọi E là trung điểm của BC.

a) Tam giác ABC vuông tại C.

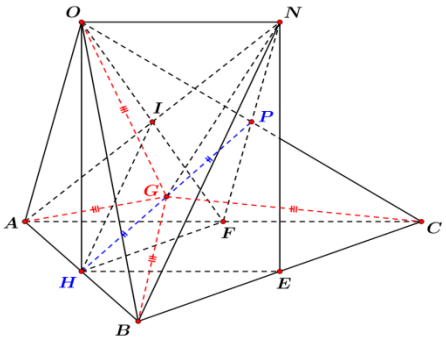
b) Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (OAC), khi đó $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Thể tích khối tứ diện $OHNG$ bằng $\frac{1}{12}$ thể tích khối tứ diện $OABC$.

Lời giải

Đúng – Sai – Đúng – Sai



a) Đúng Tam giác ABC vuông tại C.

Xét tam giác OAB ta có:

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos 120°=4+4-2.2.2.\left(-\frac{1}{2}\right)=12\Rightarrow AB=2\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAC ta có:

$AC^2=OA^2+OC^2=4+4=8\Rightarrow AC=2\sqrt{2}$.

thuvientoanhoc.com

Xét tam giác OBC ta có:

$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2OC.OB.\cos 60° = 4 + 4 - 2.2.2.\frac{1}{2} = 4 \Rightarrow BC = 2$.

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

Suy ra tam giác ABC vuông tại C.

b) Sai Do $OA = OB = OC$ và $OH \perp (ABC)$ nên $HA = HB = HC$, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và H là trung điểm của AB.

$\widehat{OAH} = 30^0 \Rightarrow OH = \frac{1}{2}OA = 1$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}.2 = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3}.OH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.1.2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) Đúng

Ta có: $d\left(B,(OAC)\right) = \frac{3V_{OABC}}{S_{OAC}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}.2.2} = \sqrt{2}$; $d\left(B,OC\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.2 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{d\left(B,(OAC)\right)}{d\left(B,OC\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Sai Gọi E, F, P, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, OC, OF.

Có $HF = \frac{BC}{2} = 1$, $OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = 1 \Rightarrow HF = OH \Rightarrow HI \perp OF$.

Ta có $AC \perp (OHF) \Rightarrow AC \perp HI \Rightarrow HI \perp (OAC)$ mà $BN \perp (OAC) \Rightarrow HI // BN$ và H là trung điểm của $AB \Rightarrow I$ là trung điểm của AN

$OAFN$ là hình bình hành nên $ON = AF = \sqrt{2}$

Ta có: G là trọng tâm của tứ diện $OABC$ nên G là trung điểm HP

Suy ra $\mathrm{d}\left(G,(ONEH)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(P,(ONEH)\right) = \frac{1}{4}\mathrm{d}\left(C,(ONEH)\right) = \frac{1}{4}CE = \frac{1}{4}$.

$ON // HE ; OH \perp HE \Rightarrow OH \perp ON$

Diện tích tam giác ONH là $S_{ONH} = \frac{1}{2}OH.ON = \frac{1}{2}.1.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối tứ diện $OHNG$ là $V_{OHNG} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(G,(ONH)\right).S_{ONH} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{24}$.

$\frac{V_{OHNG}}{V_{OABC}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{24}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{OHNG} = \frac{1}{16}V_{OABC}$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(3;-1;1)$ và hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) sao cho điểm $I(1;0;2)$ luôn là trung điểm của MN.

a) Hình chiếu của A trên trục Oy là $E(0;2;0)$.

b) Diện tích của tam giác OAB bằng $\frac{\sqrt{138}}{4}$

c) Điểm K thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $KA + KB$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $\frac{1}{2}x_K + y_K = 1$

thuvientoanhoc.com

d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2+NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Lời giải

Đúng – Sai – Đúng - Sai

a) Đúng. Hình chiếu của A trên trục Oy là $E(0;2;0)$.

b) Sai. Diện tích của tam giác OAB bằng $\frac{\sqrt{138}}{4}$.

Ta có : $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(5;8;-7)$.

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+8^2+(-7)^2}=\frac{\sqrt{138}}{2}$.

c) Đúng. Điểm K thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $KA+KB$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $\frac{1}{2}x_K+y_K=1$

Gọi A' đối xứng A qua mặt phẳng (Oxy). Ta có: $A'(1;2;-3)$.

Điểm K thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $KA+KB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi K,A',B thẳng hàng (K nằm giữa A' và B). Giả sử $K(x;y;0)$.

$\overrightarrow{BK}=(x-3;y+1;-1);\overrightarrow{BA'}=(-2;3;-4)$ cùng phương suy ra : $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{-1}{-4}\Rightarrow x=\frac{5}{2};y=-\frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{2}x_K+y_K=1$.

d) Sai. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2+NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Gọi $M(a;0;c)$. Vì $I(1;0;2)$ là trung điểm của MN nên $N(2-a;0;4-c)$.

$P=2MA^2+NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}=2\left[(a-1)^2+4+(c-3)^2\right]+\left[(a+1)^2+1+(c-3)^2\right]+1-a^2-2-(c-3)^2$

$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+2(c-3)^2+\frac{21}{2}\geq\frac{21}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\c=3\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{21}{2}$.

Câu 24. Cho phương trình $\left(\ln^2 x-6\ln x+5\right)\sqrt{\ln x-m}=0$ (m là tham số thực).

a) Tập xác định của phương trình là $(0;+\infty)$.

b) Có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

c) Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m<5$.

d) Không có giá trị nguyên dương nào của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Sai – Đúng – Sai - Đúng

a) Sai. Tập xác định của phương trình là $(0;+\infty)$.

ĐK : $\begin{cases}x>0\\\ln x-m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\geq e^m\end{cases}\Leftrightarrow x\geq e^m$ Vì $e^m>0$ nên, tập xác định của phương trình : $D=\left[e^m;+\infty\right)$

thuvientoanhoc.com

b) Đúng. Có 4 giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

Với điều kiện $x \ge e^m$, phương trình $\left(\ln^2 x - 6\ln x + 5\right)\sqrt{\ln x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 1 \\ \ln x = 5 \\ \ln x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e \\ x = e^5 \\ x = e^m \end{array}\right.$

Phương trình đã cho luôn có 1 nghiệm $x = e^m$, do đó để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt $e \le e^m < e^5 \Leftrightarrow 1 \le m < 5$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

c) Sai Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m < 5$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $e \le e^m < e^5 \Leftrightarrow 1 \le m < 5$. Do đó với $m < 1$ thì phương trình không có hai nghiệm phân biệt.

d) Đúng Không có giá trị nguyên dương nào của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi $e^m < e \Leftrightarrow m < 1$. Do đo không có giá trị nguyên dương nào của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 25. Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại mặt hàng. Biết rằng hàm số biểu diễn tổng doanh thu của doanh nghiệp là $f(x) = -2x^2 + 55x$ (triệu đồng) và hàm số biểu diễn tổng chi phí là $g(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 6$ (triệu đồng), với x là sản lượng sản xuất và tiêu thụ của doanh nghiệp (tính bằng trăm đơn vị sản phẩm, $0 < x < 6$). Giả sử nhà nước đánh mức thuế sản lượng t (triệu đồng/ trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được.

a) Nếu chưa tính thuế sản lương, hàm số biểu diễn lợi nhuận thu được của doanh nghiệp theo sản lượng x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x - 6$ (triệu đồng).

b) Khi nhà nước chưa tính thuế sản lượng, để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì doanh nghiệp cần sản xuất ở mức sản lượng 400 đơn vị sản phẩm.

c) Khi nhà nước đánh thuế sản lượng t (triệu đồng/trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất thì sản lượng x và mức thuế t liên hệ với nhau qua hệ thức: $t = -3x^2 + 6x + 42$.

d) Khi nhà nước muốn tối đa hóa nguồn thu từ thuế, doanh nghiệp sẽ thu hẹp sản lượng còn 300 sản phẩm và nhà nươc thu được 108 triệu đồng từ nguồn thuế này.

Lời giải

Đúng – Sai – Sai - Đúng

a) Đúng Nếu chưa tính thuế sản lương, hàm số biểu diễn lợi nhuận thu được của doanh nghiệp theo sản lượng x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x - 6$ (triệu đồng). Hàm số biểu diễn lợi nhuận

$L(x) = f(x) - g(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x - 6$ (triệu đồng).

b) Sai Khi nhà nước chưa tính thuế sản lượng, để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì doanh nghiệp cần sản xuất ở mức sản lượng 400 đơn vị sản phẩm.

Xét đạo hàm của hàm số lợi nhuận $L(x)$:

$L'(x) = -3x^2 + 6x + 45$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3 \ (L) \end{array}\right.$

Dễ thấy hàm số $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 5$.

Vì x tính bằng trăm đơn vị sản phẩm nên $x = 5$ tương ứng với 500 sản phẩm.

thuvientoanhoc.com

c) Sai Khi nhà nước đánh thuế sản lượng t (triệu đồng/trăm sản phẩm) trên số sản phẩm bán được, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất thì sản lượng x và mức thuế t liên hệ với nhau qua hệ thức: $t=-3x^2+7x+42$.

Khi nhà nước đánh thuế sản lượng t (triệu đồng/trăm sản phẩm), với sản lượng tiêu thụ x, doanh nghiệp phải đóng tổng số tiền thuế là tx (triệu đồng).
Hàm số biểu diễn lợi nhuận của doanh nghiệp sau khi tính thuế là:
$H(x)=L(x)-tx=-x^3+3x^2+45x-6-tx$
Để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất, ta xét đạo hàm theo biến x thì
$H'(x)=-3x^2+6x+45-t=0\Leftrightarrow t=-3x^2+6x+45$

d) Đúng Khi nhà nước muốn tối đa hóa nguồn thu từ thuế, doanh nghiệp sẽ thu hẹp sản lượng còn 300 sản phẩm và nhà nươc thu được 108 triệu đồng từ nguồn thuế này.

Từ ý (c), để doanh nghiệp duy trì sản xuất tối ưu tại sản lượng x, mức thuế t phải thỏa mãn:
$t=-3x^2+6x+45$
Tổng nguồn thu từ thuế của nhà nước thu được biểu diễn bằng hàm số $T(x)$:
$T(x)=tx=-3x^3+6x^2+45x$
Để tối đa hóa nguồn thu từ thuế, ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $T(x)$ trên khoảng $(0;6)$:

$$T'(x)=-9x^2+12x+45;T'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\dfrac{5}{3}(L)\end{array}\right.$$

Từ sự biến thiên trên khoảng $(0;6)$, ta thấy hàm số $T(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=3$.
Khi đó, sản lượng của doanh nghiệp thu hẹp còn: 300 sản phẩm.
Tổng nguồn thu từ thuế tối đa của nhà nước thu được khi đó là:
$T(3)=-3.3^3+6.3^2+45.3=108$ (triệu đồng).

Câu 26. Một hộp chứa 21 quả cầu cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 21 (Mỗi quả ghi một số khác nhau) . Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ hộp đó.

a) Có 710 cách lấy ra ba quả cầu có tổng số ghi trên ba quả là số chẵn.

b) Số cách lấy để 3 số đó lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên dương là 8.

c) Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\dfrac{57}{266}$.

d) Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 8 bằng $\dfrac{123}{266}$.

Lời giải

Sai– Đúng – Sai – Đúng

a) Sai : Có 710 cách lấy ra ba quả cầu có tổng số ghi trên ba quả là số chẵn.
Trong 21 quả ta có 11 quả ghi số lẻ và 10 quả ghi số chẵn
Để được tổng số ghi trên ba quả là một số chẵn thì hoặc lấy được 3 quả ghi số chẵn hoặc lấy được 1 quả ghi số chẵn và 2 quả ghi số lẻ.
Do đó số cách lấy là $C_{10}^3+C_{11}^2.C_{10}^1=670$.

b) Đúng Số cách lấy để 3 số đó lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên dương là 8.

thuvientoanhoc.com

Vì 3 số lập thành một cấp số nhân nên có dạng $a;aq;aq^2, \begin{cases} 1 \le a \le 21 \\ aq^2 \le 21 \end{cases} \Rightarrow q = 2,3,4$

+ $q = 2 \Rightarrow 4a \le 21 \Rightarrow a \le 5$ trường hợp này có 5 CSN thỏa mãn

+ $q = 3 \Rightarrow 9a \le 21 \Rightarrow a \le 2$ trường hợp này có 2 CSN thỏa mãn

+ $q = 4 \Rightarrow 16a \le 21 \Rightarrow a \le 1$ trường hợp này có 1 CSN thỏa mãn

Vậy có tổng 8 CSN thỏa mãn.

c) Sai: Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\frac{57}{266}$.

Số cách lấy 3 quả là $C_{21}^3 = 1330$.

Để phân loại các số, ta chia 21 số tự nhiên (từ 1 đến 21) thành 4 tập hợp dựa theo số dư khi chia cho 4:

- Tập hợp A (gồm các số chia hết cho 4): $A = \{4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20\}$, có 5 phần tử.
- Tập hợp B (gồm các số chia 4 dư 1): $B = \{1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21\}$, có 6 phần tử.
- Tập hợp C (gồm các số chia 4 dư 2): $C = \{2;\ 6;\ 10;\ 14;\ 18\}$, có 5 phần tử.
- Tập hợp D (gồm các số chia 4 dư 3): $D = \{3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19\}$, có 5 phần tử.

  Để tổng của 3 số chia hết cho 4, việc chọn các phần tử từ các tập hợp trên phải rơi vào một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Chọn cả 3 số từ tập hợp A
Số cách chọn là: $C_5^3 = 10$ (cách).

Trường hợp 2: Chọn 1 số từ tập hợp A, 1 số từ tập hợp B, và 1 số từ tập hợp D

Số cách chọn là: $5.6.5 = 150$ (cách).

Trường hợp 3: Chọn 1 số từ tập hợp A, 2 số từ tập hợp C

Số cách chọn là: $C_5^1.C_5^2 = 50$ (cách)

Trường hợp 4: Chọn 2 số từ tập hợp B, 1 số từ tập hợp C

Số cách chọn là: $C_6^2.5 = 75$ (cách)

Trường hợp 5: Chọn 2 số từ tập hợp D và 1 số từ tập hợp C

Số cách chọn là: $C_5^2.C_5^1 = 50$ (cách)

Xác suất cần tìm là $P = \frac{10+150+50+75+50}{1330} = \frac{67}{266}$

d) Đúng: Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 8 bằng $\frac{123}{266}$.

Số cách lấy 3 quả là $C_{21}^3 = 1330$.

Tích các số trên 3 quả chia hết cho 8 nên có các TH sau

thuvientoanhoc.com

1 số chia hết cho 8 và 2 số lẻ: $C_2^1.C_{11}^2=110$

3 số đều chẵn: $C_{10}^3=120$.

1 số lẻ, 2 số chẵn (1 số chia hết cho 4 và 1 số chia 4 dư 2): $C_{11}^1.C_5^1.C_5^1=275$.

1 số lẻ, 2 số chẵn (2 số đều chia hết cho 4): $11.C_5^2=110$.

Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{110+275+120+110}{1330}=\dfrac{123}{266}$.

PHẦN III

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy kilômét), một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(100;220;6)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo bằng $Q(250;340;20)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b$.

Lời giải

Trả lời: 800.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{2}{3}.\overrightarrow{MQ}\Leftrightarrow\begin{cases}a-100=\dfrac{2}{3}(250-100)\\ b-220=\dfrac{2}{3}(340-220)\\ c-6=\dfrac{2}{3}(20-6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=200\\ b=300\\ c=\dfrac{46}{3}\end{cases}$.

Tổng $a+2b=800$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4.5^x+10x+m\right)+f\left(-5^{x+1}\right)=\dfrac{3}{2}$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S.

Lời giải

Trả lời: -15

Hàm số xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)+\dfrac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)=\dfrac{1}{2}l\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 8=\dfrac{3}{2}\Rightarrow f(x)+f(-x)=\dfrac{3}{2}$

Vì $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+8}\ln 2}<0,\forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Theo giả thiết:

$f\left(4.5^x+10x+m\right)+f\left(-5^{x+1}\right)=\dfrac{3}{2}\ f\left(4.5^x+10x+m\right)=\dfrac{3}{2}-f\left(-5^{x+1}\right)\Leftrightarrow f\left(4.5^x+10x+m\right)=f\left(5^{x+1}\right)$

Vì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, từ đó ta được $4.5^x+10x+m=5^{x+1}$

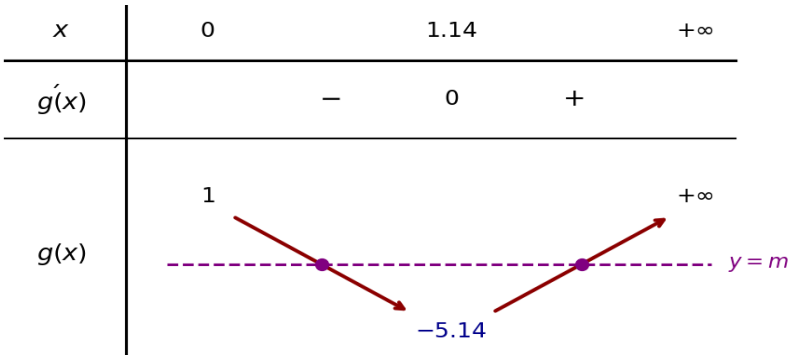
thuvientoanhoc.com

$4.5^x+10x+m=5^{x+1}\Leftrightarrow 5^x-10x=m$

Xét hàm số $g(x)=5^x-10x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$g'(x)=5^x\ln 5-10; g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{10}{\ln 5}\right)\approx 1{,}14$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Từ bảng biến thiên , suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$-5.14<m<1, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}\Rightarrow S=\{-5;-4;-3;-2;-1\}$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng -15.

Câu 29. Để ổn định cuộc sống , gia đình Bình mua một căn hộ chung cư với giá 3 tỷ đồng. Gia đình tự có 30% giá trị căn hộ và vay ngân hàng 70% số tiền còn lại để trả góp trong vòng 15 năm (180 tháng). Phương thức trả góp là cố định một số tiền hàng tháng (bao gồm cả gốc và lãi) trong từng giai đoạn lãi suất:

• 12 tháng đầu tiên: Ngân hàng áp dụng lãi suất ưu đãi 6,5% /năm. Trong giai đoạn này, cứ cuối mỗi tháng gia đình Bình trả cố định 18 triệu đồng.

• Từ tháng thứ 13 trở đi: Lãi suất được thả nổi theo thị trường là 9,5% /năm. Số tiền phải trả cố định mỗi tháng được tính toán lại dựa trên dư nợ thực tế còn lại và thời gian vay còn lại sao cho đến cuối tháng thứ 180 thì gia đình Bình tất toán (hết nợ) hoàn toàn với ngân hàng.

Hỏi từ tháng thứ 13 trở đi, mỗi tháng gia đình Bình phải trả cho ngân hàng số tiền cố định là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Trả lời: 21,8

1. Giai đoạn 12 tháng đầu (Lãi suất ưu đãi)

• Số tiền vay ban đầu: $A=3000.70\%=2100$ (triệu đồng).

• Lãi suất tháng trong năm đầu: $r_1=\dfrac{6{,}5\%}{12}=\dfrac{13}{2400}$

• Số tiền trả mỗi tháng: $m_1=18$ (triệu đồng).

Công thức tính dư nợ sau 12 tháng đầu:

$$S_{12}=A(1+r_1)^{12}-m_1\left[\frac{(1+r_1)^{12}-1}{r_1}\right]=2100\left(1+\frac{13}{2400}\right)^{12}-18\left[\frac{\left(1+\frac{13}{2400}\right)^{12}-1}{\frac{13}{2400}}\right]\approx 2018{,}088 \text{ (triệu đồng).}$$

2. Giai đoạn từ tháng thứ 13 đến 180 (Lãi suất thả nổi)

• Thời gian vay còn lại: $180-12=168$ (tháng).

• Lãi suất tháng giai đoạn này: $r_2=\dfrac{9{,}5\%}{12}=\dfrac{19}{2400}$

thuvientoanhoc.com

• Gọi m_2 là số tiền phải trả cố định hàng tháng ở giai đoạn sau.

Coi S_{12} này là khoản tiền vay mới cho giai đoạn 168 tháng tiếp theo.

Để xóa hết khoản nợ S_{12} trong 168 tháng tiếp theo, ta áp dụng công thức tất toán:

$$S_{168} = S_{12}\left(1+r_2\right)^{168} - m_2\left[\frac{\left(1+r_2\right)^{168}-1}{r_2}\right] = 0$$

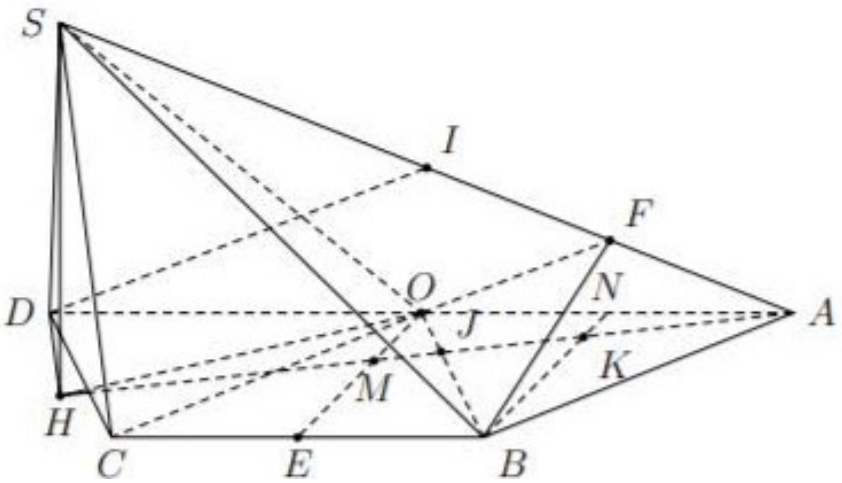
$$\Rightarrow m_2 = \frac{S_{12}.r_2.\left(1+r_2\right)^{168}}{\left(1+r_2\right)^{168}-1} = \frac{2018,088.\frac{19}{2400}.\left(1+\frac{19}{2400}\right)^{168}}{\left(1+\frac{19}{2400}\right)^{168}-1} \approx 21,8$$

Vậy số tiền anh Bình phải trả từ tháng thứ 13 trở đi là 21,8 triệu đồng.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AD; $\widehat{SDA} = \widehat{SOB} = 90^0$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của SA và IA, biết $AD = 2BC = 4$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DI và BF (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Lời giải

Trả lời: 0.99



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right) \Rightarrow SH \perp \left(ABCD\right)$

Gọi E là trung điểm của BC suy ra $OE = CB\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Kẻ $BN \perp AD$. Gọi $BN \cap AH = K$; $BO \cap AK = J$; $OE \cap AH = M$

Khi ấy ta có: $\begin{cases} SH \perp OB \\ SH \perp AD \end{cases}$ mà $\begin{cases} SO \perp OB \\ SD \perp AD \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} OB \perp \left(SOH\right) \\ AD \perp \left(SHD\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB \perp OH \\ AD \perp DH \end{cases}$

Như vậy điểm H thuộc mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ sao cho $\widehat{HDA} = \widehat{HOB} = 90^0$

Suy ra $\widehat{HOD} = \widehat{BOD} - \widehat{HOB} = 120^0 - 90^0 = 30^0 \Rightarrow HD = DO\tan 30^0 = BC\tan 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$DI\,//\left(BOF\right)$ nên suy ra $d\left(BF;DI\right) = d\left(DI;\left(BOF\right)\right) = d\left(D;\left(BOF\right)\right) = d\left(A;\left(BOF\right)\right)$

Mặt khác: $\left(\widehat{\left(SAD\right),\left(ABCD\right)}\right) = \widehat{SDH} = 60^0 \Rightarrow SH = HD\tan 60^0 = 2$

thuvientoanhoc.com

$$\begin{cases} NK=\dfrac{DH}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ OM=\dfrac{HD}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{OM}{BK}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}=\frac{2}{5}=\frac{JM}{JK}\Rightarrow \frac{AJ}{KJ}=\frac{d\left(A;\left(BOF\right)\right)}{d\left(K;\left(BOF\right)\right)}=\frac{12}{5}$$

Suy ra $d\left(BF;DI\right)=d\left(A;\left(BOF\right)\right)=\dfrac{12}{5}d\left(K;\left(BOF\right)\right)$

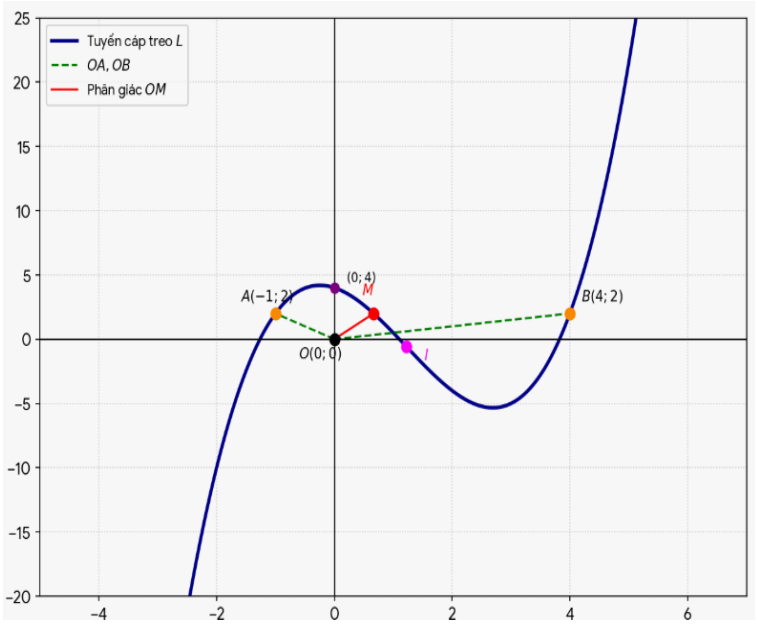
Mặt khác ta có: $KF//SH$ và $KF=\dfrac{1}{4}SH$

$$\begin{cases} KF=\dfrac{SH}{4}=\dfrac{1}{2} \\ d\left(K;OB\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{d^2\left(K;\left(BOF\right)\right)}=\frac{1}{KF^2}+\frac{1}{d^2\left(K;OB\right)}\Rightarrow d\left(K;\left(BOF\right)\right)=\frac{5}{2\sqrt{37}}$$

$$\Rightarrow d\left(BF;DI\right)=d\left(A;\left(BOF\right)\right)=\frac{12}{5}d\left(K;\left(BOF\right)\right)=\frac{12}{5}.\frac{5}{2\sqrt{37}}=\frac{6}{\sqrt{37}}\approx 0.99.$$

Câu 31.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi đơn vị trên các trục ứng với một kilômét. Một tuyến đường cáp treo L được mô phỏng bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4. Hai bạn An và Bình xuất phát từ hai trạm khác nhau trên đường cáp treo. Trạm xuất phát của An ở $A\left(-1;2\right)$, trạm của Bình ở $B\left(4;2\right)$ và trạm trung chuyển trung tâm ở gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$. Một trạm kỹ thuật M nằm trên tuyến đường L sao cho OM là phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$. Biết các khoảng cách từ trạm trung chuyển trung tâm đến các trạm thỏa mãn hệ thức $\dfrac{\sqrt{2}}{OM}=\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}$. Tìm khoảng cách từ trạm trung tâm đến tâm đối xứng của tuyến đường cáp treo L (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).



Lời giải

Trả lời: 1,35

Ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.=-1.4+2.2=0\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O.

$OA=\sqrt{5};OB=2\sqrt{5};\overrightarrow{AB}=\left(5;0\right)$

thuvientoanhoc.com

$$\frac{\sqrt{2}}{OM}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}\ \frac{\sqrt{2}}{OM}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}\Rightarrow OM=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

Độ dại đường phân giác trong góc $\widehat{AOB}$ bằng $l=\frac{2OA.OB.\cos 45^0}{OA+OB}=\frac{2.\sqrt{5}.2\sqrt{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

Suy ra M là chân đường phân giác trong góc $\widehat{AOB}$.

$$\frac{MA}{MB}=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_M+1=\frac{5}{3}\\ y_M-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{2}{3}\\ y_M=2\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{2}{3};2\right)$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua 3 điểm $A(-1;2),B(4;2),M\left(\frac{2}{3};2\right)$ nên $f(x)=a(x+1)(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right)+2$

Vì đồ thi hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4 nên $f(0)=4\Rightarrow a.1.(-4).\left(-\frac{2}{3}\right)=2\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

Suy ra: . $f(x)=\frac{3}{4}(x+1)(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right)+2\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}x^3-\frac{11}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$

Gọi tâm đối xứng của đồ thị hàm số là I : $x_I=-\frac{b}{3a}=-\frac{-\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{11}{9}\Rightarrow y_I=-\frac{139}{243}$

$$\Rightarrow OI=\sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2+\left(-\frac{139}{243}\right)^2}=1,35$$

Khoảng cách từ trạm trung tâm đến tâm đối xứng bằng 1,35 km

Câu 32. Bác An đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác An đặt ra các quy tắc rất khắt khe như sau:

- Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.
- Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.
- Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **3 ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: **(Văn, Sử, Địa)**, **(Toán, Lý, Hóa)**, **(Toán, Hóa, Sinh)** và **(Toán, Lý, Anh)**.
- Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp dựng đứng theo hàng ngang, thứ tự từ trái sang phải.

Biết tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên là T. Tính giá trị của $\frac{T}{2048}$.

Lời giải

Trả lời: 2916

Ta có tổng 16 cuốn sách xếp vào 5 ngăn, mỗi ngăn tối đa 5 cuốn. Do sách cùng môn luôn chung ngăn, cấu trúc phân bổ bắt buộc là 3 ngăn chứa 4 cuốn (2 môn) và 2 ngăn chứa 2 cuốn (1 môn).

Số cách hoán vị sách trong các ngăn này (với điều kiện sách cùng môn ở cùng ngăn nhưng không nhất thiết dính liền) là: $P=(4!)^3.(2!)^2$

thuvientoanhoc.com

Ta có các ràng buộc về vị trí môn học:

- **Môn Toán (T)** tham gia vào 3 tổ hợp liên tiếp nên Toán cố định ở **Ngăn 3** để thỏa mãn tính liên kết của 3 tổ hợp môn.
- Nhóm Xã hội (Văn, Sử, Địa) nằm ở 3 ngăn liên tiếp, suy ra hoán vị nội bộ nhóm này là 3!.

Xét các trường hợp sau:

Ta có 4 trường hợp dựa trên cách phân bổ các môn Tự nhiên trước sau đó vị trí còn trống cho nhóm Xã hội vào và phải thỏa mãn có 3 vị trí liền kề:

❖ **Trường hợp 1:** Các môn Tự nhiên trải đều trên 5 ngăn (Mỗi ngăn 1 môn)
Có 2 cấu trúc thỏa mãn: (Sinh-Hóa-Toán-Lý-Anh) và (Anh-Lý-Toán-Hóa-Sinh).
Lúc này mỗi ngăn mới chứa 2 cuốn (của Tự nhiên), nên nhóm Xã hội có thể đặt vào bất kỳ cụm 3 ngăn liên tiếp nào: (1, 2, 3), (2, 3, 4) hoặc (3, 4, 5).
Suy ra số cách chọn môn là : $2.3.3! = 36$ cách

❖ **Trường hợp 2:** Có một cặp môn Tự nhiên nằm chung ở Ngăn 2
Ngăn 2 lúc này chứa 4 cuốn (đầy), nên nhóm Xã hội không thể nằm ở cụm (1, 2, 3) hay (2, 3, 4).
Nhóm Xã hội bắt buộc lùi về (3, 4, 5).

Có 4 cấu trúc thỏa mãn đó là:

- Anh (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Hóa (Ngăn 4)
- Hóa (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Anh (Ngăn 4)
- Sinh (Ngăn 1) - {Hóa, Anh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Lý (Ngăn 4)
- Lý (Ngăn 1) - {Hóa, Anh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - Sinh (Ngăn 4)

Số cách chọn môn: $4.1.3! = 24$

❖ **Trường hợp 3: Có một cặp môn Tự nhiên nằm chung ở Ngăn 4**
Ngăn 4 lúc này chứa 4 cuốn (đầy), nhóm Xã hội bắt buộc dồn về (1, 2, 3).
Có 4 cấu trúc thỏa mãn:

- Hóa (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - Anh (Ngăn 5)
- Anh (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - Hóa (Ngăn 5)
- Lý (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Hóa, Anh} (Ngăn 4) - Sinh (Ngăn 5)
- Sinh (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3) - {Hóa, Anh} (Ngăn 4) - Lý (Ngăn 5)

Số cách chọn môn: $4.1.3! = 24$

❖ **Trường hợp 4: Có hai cặp môn Tự nhiên nằm ở Ngăn 1 và 2 hoặc nằm ở ngăn 4 và 5**
Khi đó nhóm Xã hội bắt buộc dồn về (3, 4, 5) hoặc ở (1, 2, 3)

Có 4 cấu trúc thỏa mãn:

- {Hóa Anh} (Ngăn 1) - {Lý, Sinh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3)
- {Lý, Sinh} (Ngăn 1) - {Hóa Anh} (Ngăn 2) - Toán (Ngăn 3)
- Toán (Ngăn 3) - {Lý, Sinh} (Ngăn 4) - {Hóa Anh} (Ngăn 5)
- Toán (Ngăn 3) - {Hóa Anh} (Ngăn 4) - {Lý, Sinh} (Ngăn 5)

Số cách chọn môn: $4.1.3! = 24$
Suy ra tổng số cách sắp xếp môn học là: N = 36 + 24 + 24 + 24 = 108 cách.

Ta có tổng số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán: $T = P.N = 108.(4!)^3.(2!)^2 \Rightarrow \frac{T}{2048} = 2916.$

thuvientoanhoc.com

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 12**
https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12