ỦY BAN NHÂN DÂN PHƯỜNG TRƯỜNG VINH	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2026 - 2027
ĐỀ THI CHÍNH THỨC **VÒNG 2**	**Môn thi: Toán** Thời gian làm bài: ***150 phút***

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^4+(x-1)(x^2-2x+2)=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{xy}=3 \\ 2x(x+y^2-1)=2y^2+y-1 \end{cases}$.

c) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{4}{a+b+c}$. Tính:

$M=\dfrac{3a^2+2b^2-2c^2}{b+c}+\dfrac{3b^2+2c^2-2a^2}{c+a}+\dfrac{3c^2+2a^2-2b^2}{a+b}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn $(2025x+2027)^2=y^3+1$.

b) Tìm tất cả các nguyên x sao cho: $1+2^x+2^{2x+1}$ là một số chính phương.

Câu 3. *(2,5 điểm)*

a) Gieo ngẫu nhiên đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất.Tính xác suất của biến cố A: "*Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn tổng của chúng*".

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $3(x-y)^2\le x^2-y^2$. Chứng minh: $1\le\dfrac{x}{y}\le 2$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

a) Cho đa thức $f(x)$ bậc ba có hệ số cao nhất là một số nguyên dương thỏa mãn: $f(2024)=3$ và $f(2025)=5$. Chứng minh: $f(2026)-f(2023)$ là hợp số.

b) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{y}\right)^2+\left(z-\dfrac{4}{z}\right)^2$.

Câu 5. *(7,0 điểm)* Cho tam giác OAB nhọn ($OB<OA$), có ba đường cao OP, AQ, BR cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\cos\widehat{ABO}.\cos\widehat{BAO}.\cos\widehat{AOB}=\dfrac{PQ.QR.RP}{OA.AB.BO}$

b) Trên tia đối của tia OA, OB lần lượt lấy các điểm C và D sao cho tam giác OCD nhọn. Gọi K là trực tâm của tam giác OCD. Gọi E, I và G lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OAD và OBC. Gọi F là giao điểm của AH và DK. Chứng minh: $\widehat{IEG}=\widehat{HFK}$

c) Chứng minh rằng: các tam giác IEG và HFK đồng dạng và IG vuông góc với HK.

Câu 6. *(1,0 điểm)* Hai bạn An và Bình cùng nhau tiết kiệm tiền để ủng hộ người nghèo. Biết rằng hai bạn bắt đầu tiết kiệm vào cùng một ngày. Sau 271 ngày, mỗi bạn đều tiết kiệm được 500 000 đồng. Chứng minh trong 271 ngày nói trên, tồn tại 136 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 136 ngày đó không nhỏ hơn 250 000 đồng.

..... Hết .....

thuvientoanhoc.com

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI (VÒNG 2)
PHƯỜNG TRƯỜNG VINH - NGHỆ AN LỚP 9
NĂM HỌC 2026 – 2027

Môn: TOÁN

1. PHẦN ĐỀ

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^4 + (x-1)(x^2-2x+2) = 0$.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{1}{xy} = 3 \\ 2x(x+y^2-1) = 2y^2 + y - 1 \end{cases}$$

c) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{4}{a+b+c}$. Tính:

$$M = \frac{3a^2+2b^2-2c^2}{b+c} + \frac{3b^2+2c^2-2a^2}{c+a} + \frac{3c^2+2a^2-2b^2}{a+b}.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn $(2025x+2027)^2 = y^3 + 1$.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho: $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ là một số chính phương.

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Gieo ngẫu nhiên đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố A: "*Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn tổng của chúng*".

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $3(x-y)^2 \leqslant x^2 - y^2$. Chứng minh: $1 \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant 2$.

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Cho đa thức $f(x)$ bậc ba có hệ số cao nhất là một số nguyên dương thỏa mãn: $f(2024) = 3$ và $f(2025) = 5$. Chứng minh: $f(2026) - f(2023)$ là hợp số.

b) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{y}\right)^2 + \left(z - \frac{4}{z}\right)^2.$$

Câu 5. (7,0 điểm)

Cho tam giác OAB nhọn ($OB < OA$), có ba đường cao OP, AQ, BR cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\cos\widehat{ABO} \cdot \cos\widehat{BAO} \cdot \cos\widehat{AOB} = \dfrac{PQ \cdot QR \cdot RP}{OA \cdot AB \cdot BO}$.

b) Trên tia đối của tia OA, OB lần lượt lấy các điểm C và D sao cho tam giác OCD nhọn. Gọi K là trực tâm của tam giác OCD. Gọi E, I và G lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OAD và OBC. Gọi F là giao điểm của AH và DK. Chứng minh: $\widehat{IEG} = \widehat{HFK}$.

c) Chứng minh rằng: các tam giác IEG và HFK đồng dạng và IG vuông góc với HK.

Câu 6. (1,0 điểm)

Hai bạn An và Bình cùng nhau tiết kiệm tiền để ủng hộ người nghèo. Biết rằng hai bạn bắt đầu tiết kiệm vào cùng một ngày. Sau 271 ngày, mỗi bạn đều tiết kiệm được 500 000 đồng. Chứng minh trong 271 ngày nói trên, tồn tại 136 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 136 ngày đó không nhỏ hơn 250 000 đồng.

..... Hết .....

thuvientoanhoc.com

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1

a) Giải phương trình: $x^4 + (x-1)(x^2-2x+2) = 0$.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{1}{xy} = 3 \\ 2x(x+y^2-1) = 2y^2 + y - 1 \end{cases}$$

c) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{4}{a+b+c}$. Tính:

$$M = \frac{3a^2+2b^2-2c^2}{b+c} + \frac{3b^2+2c^2-2a^2}{c+a} + \frac{3c^2+2a^2-2b^2}{a+b}.$$

a)

Biến đổi phương trình, ta thu được:

$$\begin{aligned} x^4 + (x-1)(x^2-2x+2) &= 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2 &= 0 \\ x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ (x^2+2x-2)(x^2-x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x, nên ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 3 \\ x &\in \{-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\right\}}$$

b)

ĐKXĐ: $x \neq 0, y \neq 0$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{1}{xy} = 3 & (1) \\ 2x(x+y^2-1) = 2y^2 + y - 1 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1), ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 1 - 3xy &= 0 \\ \frac{1}{2}(x+y+1)\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2\right] &= 0 \end{aligned}$$

Xét 2 trường hợp:

- TH1: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 0$ thì $x = y = 1$ (thử lại thoả mãn)
- TH2: $x + y + 1 = 0$ Thế $x = -y - 1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned} 2(-y-1)(-y-1+y^2-1) &= 2y^2 + y - 1 \\ -2(y+1)(y^2-y-2) &= (y+1)(2y-1) \\ (y+1)\left((2y-1) + 2y^2 - 2y - 4\right) &= 0 \\ (y+1)(2y^2-5) &= 0 \end{aligned}$$

thuvientoanhoc.com

Do $x \neq 0$ nên $y+1 \neq 0$, dẫn đến $2y^2 = 5$
Lúc này,

$$y \in \left\{ \sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$$

Với $y = \sqrt{\frac{5}{2}}$, thì: $x = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$ (thử lại thoả mãn)
Với $y = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, suy ra $x = -1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ (thử lại thoả mãn)

c)

Từ giả thiết $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{4}{a+b+c}$, nhân cả hai vế với $a+b+c$, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} &= 4 \\ \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) + \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) &= 4 \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= 1. \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức trên với $a+b+c$, ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) &= a+b+c \\ \frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} &= a+b+c \\ \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c &= a+b+c \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &= 0. \end{aligned}$$

Lúc này, ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{3a^2 + 2(b^2 - c^2)}{b+c} + \frac{3b^2 + 2(c^2 - a^2)}{c+a} + \frac{3c^2 + 2(a^2 - b^2)}{a+b} \\ &= \frac{3a^2}{b+c} + 2(b-c) + \frac{3b^2}{c+a} + 2(c-a) + \frac{3c^2}{a+b} + 2(a-b) \\ &= 3\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) + 2(b-c+c-a+a-b) \\ &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{M = 0}$$

Câu 2

a) Tìm các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn $(2025x + 2027)^2 = y^3 + 1$.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho: $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ là một số chính phương.

a)

Ta có: $2027 \equiv 2 \pmod 9$ nên $(2025x + 2027)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 9$
Suy ra, $y^3 + 1 \equiv 4 \pmod 9$ hay y^3 chia 9 dư 3 (vô lí)

$$\boxed{\text{Không tồn tại bộ số } (x; y) \text{ nguyên dương thoả mãn đề bài}}$$

thuvientoanhoc.com

b)

$$\text{Đặt: } 1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 \quad (y \in \mathbb{N})$$

Trường hợp 1: $x < 0$ Đặt $x = -k$ $(k \geq 1)$.

- Khi $k = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 2$ (không là số chính phương).
- Khi $k \geq 2$:

$$2^{2k-1} + \frac{1}{2^{k-1}} + 1$$

Do tử số lẻ, mẫu là lũy thừa 2 lớn hơn 1 $\implies$ không là số nguyên hay không phải số chính phương (loại)

Trường hợp 2: $x \geqslant 0$

- $x = 0$: $1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$ (Thỏa mãn).
- $x = 1$: $1 + 2 + 8 = 11$ (Loại).

Với $x \geqslant 2$:

$$y^2 - 1 = 2^x(2^{x+1} + 1)$$

$$\implies (y-1)(y+1) = 2^x(2^{x+1} + 1)$$

Vì VP chẵn $\implies$ y lẻ. Nên $y - 1$ và $y + 1$ là 2 số chẵn liên tiếp có ƯCLN là 2. Trong 2 số đó, 1 số chia hết cho số 2, số còn lại chứa 2^{x-1}. Do 2^{x+1} lẻ $\implies$ Viết lại:

$$2a \text{ và } 2^{x-1}b \quad (\text{với } a, b \text{ lẻ})$$

$$ab = 2^{x+1} + 1$$

Đặt $t = 2^{x-2} \geqslant 1$.
TH1:

$$\begin{cases} y + 1 = 2^{x-1}b \\ y - 1 = 2a \end{cases}$$

Hiệu 2 số bằng 2 $\implies$ $a = tb - 1$. Thay vào $ab = 8t + 1$ ta được:

$$b(tb - 1) = 8t + 1$$

$$\implies t(b^2 - 8) = b + 1$$

- $b = 1 \implies$ loại.
- $b = 3, t = 4 \implies x = 4$. (thử lại thoả mãn)
- $b \geqslant 5 \implies \dfrac{b+1}{b^2-8} < 1 < t$ (loại).

TH2: $y - 1 = 2^{x-1}b$; $y + 1 = 2a \implies a = tb + 1$. Thay vào $ab = 8t + 1 \implies t(b^2 - 8) = 1 - b$.

- $b = 1$: VP $= 0$ còn VT $= -7t \neq 0$ (loại).
- $b \geqslant 3$: VT dương, VP âm (loại).

$$\boxed{x \in \{0; 4\}}$$

Câu 3

a) Gieo ngẫu nhiên đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố A: "*Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn tổng của chúng*".

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $3(x-y)^2 \leqslant x^2 - y^2$. Chứng minh: $1 \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant 2$.

thuvientoanhoc.com

a)

Tổng số cách chọn khi gieo ngẫu nhiên hai con xúc xắc là:

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ (cách)}$$

Gọi hai số gieo được ở hai lượt là a, b $(a, b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\})$
Biến cố A xảy ra khi $ab < a + b$ hay:

$$\begin{aligned} ab - (a + b) &< 0 \\ (a - 1)(b - 1) &< 1 \end{aligned}$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $(a - 1)(b - 1) \geqslant 0$ hay $(a - 1)(b - 1) = 0$
Do đó, $a = 1$ hoặc $b = 1$ nên có tổng 11 cách chọn ứng với:

$$(a; b) \in \left\{ (1; k); (1; 1); (k; 1) \middle| k \in \{2; 3; 4; 5; 6\} \right\}$$

Hay số cách thuận lợi với biến cố A là: 11 cách

$$\boxed{\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } 11 \div 36 = \frac{11}{36}}$$

b)

Ta có:

$$\begin{aligned} 3(x - y)^2 &\leqslant x^2 - y^2 \\ 3x^2 - 6xy + 3y^2 &\leqslant x^2 - y^2 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 &\leqslant 0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 &\leqslant 0 \quad (y > 0) \\ \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x}{y} - 2\right) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{1 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 2}$$

Câu 4

a) Cho đa thức $f(x)$ bậc ba có hệ số cao nhất là một số nguyên dương thỏa mãn: $f(2024) = 3$ và $f(2025) = 5$. Chứng minh: $f(2026) - f(2023)$ là hợp số.

b) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{y}\right)^2 + \left(z - \frac{4}{z}\right)^2.$$

a)

Đặt: $g(x) = f(x) + ax + b$ với $g(2024) = g(2025) = 0$.

Khi ấy: $\begin{cases} g(2024) = f(2024) + 2024a + b = 0 \\ g(2025) = f(2025) + 2025a + b = 0 \end{cases}$

Vì $f(2024) = 3; f(2025) = 5$ nên $\begin{cases} 3 + 2024a + b = 0 \\ 5 + 2025a + b = 0 \end{cases}$

Suy ra $a = -2$ và $b = 4045$.
Vậy $g(x) = f(x) - 2x + 4045$.

thuvientoanhoc.com

Vì $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $g(x)$ cũng là đa thức bậc ba. Vì $g(2024) = g(2025) = 0$ nên $g(x) = k(x-2024)(x-2025)(x-x_0)$, trong đó $k \in \mathbb{Z}^+$ là hệ số cao nhất của $f(x)$ và x_0 là nghiệm còn lại của $g(x)$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + 2x - 4045 \\ &= k(x-2024)(x-2025)(x-x_0) + 2x - 4045. \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} f(2026) = k \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2026 - x_0) + 2 \cdot 2026 - 4045 \\ f(2023) = k \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (2023 - x_0) + 2 \cdot 2023 - 4045 \end{cases}$

Do đó:

$$f(2026) - f(2023) = 2k(2026 - 2023) + 6 = 6(k+1).$$

Do $k \in \mathbb{Z}^+$ nên $(k+1) \in \mathbb{Z}^+$ và $f(2026) - f(2023) = 6(k+1)$ là hợp số.

$$\boxed{f(2026) - f(2023) \text{ là hợp số}}$$

b)

Khai triển hết ra, ta có:

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{16}{y^2} + \frac{16}{z^2} - 24$$

-TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{16}{x^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{x^2}{16} \cdot \frac{16}{x^2}} = 2$$

$$\frac{15}{16}x^2 + 15 \geqslant 2\sqrt{\frac{15}{16}x^2 \cdot 15} = \frac{15}{2}x$$

Suy ra:

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geqslant \frac{15}{2} - 13x$$

Tương tự,

$$y^2 + \frac{16}{y^2} \geqslant \frac{15}{2}y - 13$$

$$z^2 + \frac{16}{z^2} \geqslant \frac{15}{2}z - 13$$

Nên

$$P \geqslant \frac{15}{2}(x+y+z) - 39 - 24 = 27$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 4$

-TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Do $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên $x, y, z \geqslant 1$
Do đó, $z = 12 - (x+y) \leqslant 12 - (1+1) = 10$. Chứng minh tương tự, ta được:

$$1 \leqslant x, y, z \leqslant 10$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $1 \leqslant k \leqslant 10$:

$$\left(k - \frac{4}{k}\right)^2 \leqslant \frac{231}{25}k - \frac{6}{25}$$

Thật vậy, bằng biến đổi tương đương ta đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{(k-1)(10-x)(25x^2+6x+40)}{25x^2} \geqslant 0$$

thuvientoanhoc.com

Bất đẳng thức trên luôn đúng với mọi $1 \leqslant k \leqslant 10$.
Dấu bằng xảy ra khi $k = 1$ hoặc $k = 10$ Chứng minh tương tự, ta được:

$$\left(x - \frac{4}{x}\right)^2 \leqslant \frac{231}{25}x - \frac{6}{25}$$

$$\left(y - \frac{4}{y}\right)^2 \leqslant \frac{231}{25}y - \frac{6}{25}$$

$$\left(z - \frac{4}{z}\right)^2 \leqslant \frac{231}{25}z - \frac{6}{25}$$

Cộng vế với vế ta thu được:

$$P \leqslant \frac{231}{25}(x + y + z) - \frac{18}{25} = 110,16$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z)$ là hoán vị của bộ $(10; 1; 1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{min} = 27 \\ P_{max} = 110{,}16 \end{array}}$$

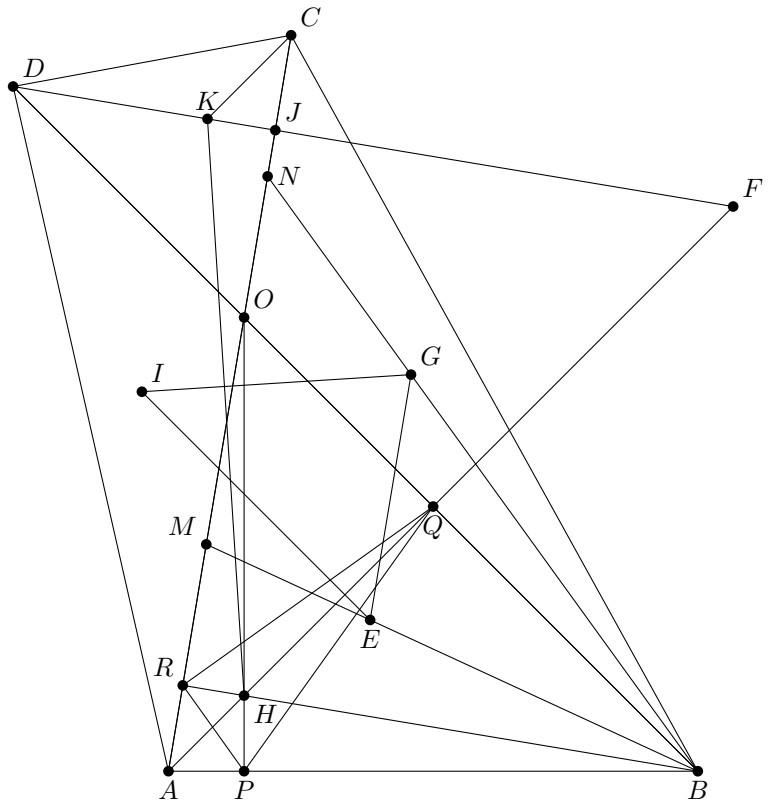
Câu 5

Cho tam giác OAB nhọn $(OB < OA)$, có ba đường cao OP, AQ, BR cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\cos\widehat{ABO} \cdot \cos\widehat{BAO} \cdot \cos\widehat{AOB} = \dfrac{PQ \cdot QR \cdot RP}{OA \cdot AB \cdot BO}$.

b) Trên tia đối của tia OA, OB lần lượt lấy các điểm C và D sao cho tam giác OCD nhọn. Gọi K là trực tâm của tam giác OCD. Gọi E, I và G lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OAD và OBC. Gọi F là giao điểm của AH và DK. Chứng minh: $\widehat{IEG} = \widehat{HFK}$.

c) Chứng minh rằng: các tam giác IEG và HFK đồng dạng và IG vuông góc với HK.



thuvientoanhoc.com

a)

Dễ thấy, $\triangle ORQ \sim \triangle OBA$ nên:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QO}{AO} = \cos\widehat{BOA}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{QP}{OA} = \cos\widehat{OBA}$$
$$\frac{RP}{OB} = \cos\widehat{OAB}$$

Suy ra,

$$\boxed{\cos\widehat{ABO} \cdot \cos\widehat{BAO} \cdot \cos\widehat{AOB} = \frac{PQ \cdot QR \cdot RP}{OA \cdot AB \cdot BO}}$$

b)

Gọi J là giao của DF với AC
Gọi M, N thứ tự là giao của BE, BG với AC
Theo tính chất trọng tâm, ta có:

$$\frac{BG}{BN} = \frac{2}{3} = \frac{BE}{BM}$$

Nên theo định lý Thalès đảo, $EG \parallel AC$, $EG = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AC}{3}$
Hoàn toàn tương tự, $IE \parallel BD, IE = \frac{BD}{3}$
Suy ra, $\widehat{AOB} = \widehat{IEG}$
Lúc này, xét tứ giác $JFOQ$ có: $\widehat{OJF} = \widehat{OQF} = 90^\circ$ nên tứ giác $JFOQ$ nội tiếp (OF).
Do đó,

$$\widehat{HFK} = 180^\circ - \widehat{JOQ} = \widehat{AOB} = \widehat{IEG}$$

$$\boxed{\widehat{IEG} = \widehat{HFK}}$$

c)

Dễ thấy, O là trực tâm $\triangle DFA$ nên $\triangle DQF \sim \triangle AJF$. Suy ra: $\frac{JF}{JA} = \frac{QF}{QD}$ (1)
Do $AF \parallel CK$ (cùng vuông góc với BD) nên theo định lý Thalès, ta có:

$$\frac{CJ}{JA} = \frac{KJ}{JF} \implies \frac{AC}{JA} = \frac{FK}{JF} \implies \frac{FK}{AC} = \frac{JF}{JA} (2)$$

Chứng minh tương tự,

$$\frac{FH}{BD} = \frac{QF}{QD} (3)$$

Từ $(1), (2), (3)$, ta có: $\frac{FH}{BD} = \frac{FK}{AC} \implies \frac{IE}{EG} = \frac{BD}{AC} = \frac{FH}{FK} \implies \triangle IEG \sim \triangle HFK$
Do $HF \perp IE$ nên $HK \perp IG$

$$\boxed{\triangle IEG \sim \triangle HFK,\ HK \perp IG}$$

Câu 6

Hai bạn An và Bình cùng nhau tiết kiệm tiền để ủng hộ người nghèo. Biết rằng hai bạn bắt đầu tiết kiệm vào cùng một ngày. Sau 271 ngày, mỗi bạn đều tiết kiệm được 500 000 đồng. Chứng minh trong 271 ngày nói trên, tồn tại 136 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 136 ngày đó không nhỏ hơn 250 000 đồng.

Để tìm ra các ngày có số tiền tiết kiệm lớn nhất, ta sắp xếp lại dãy số tiền tiết kiệm của An theo thứ tự từ lớn đến bé, kí hiệu các giá trị sau khi sắp xếp có ngoặc đơn ở chỉ số để phân biệt với thứ tự ngày theo thời gian:

$$a_{(1)} \geqslant a_{(2)} \geqslant \ldots \geqslant a_{(136)} \geqslant a_{(137)} \geqslant \ldots \geqslant a_{(271)}$$

thuvientoanhoc.com

Trong đó, $a_{(1)}$ là số tiền của ngày có mức tiết kiệm lớn nhất, $a_{(2)}$ lớn nhì, và cứ tiếp tục như vậy cho đến $a_{(271)}$ là ngày tiết kiệm ít nhất.

Với cách đặt tương tự với số tiền tiết kiệm của Bình, ta kí hiệu:

$$b_{(1)} \geqslant b_{(2)} \geqslant \ldots \geqslant b_{(136)} \geqslant b_{(137)} \geqslant \ldots \geqslant b_{(271)}$$

Trong đó, $b_{(1)}$ là số tiền của ngày có mức tiết kiệm lớn nhất, $b_{(2)}$ lớn nhì, và cứ tiếp tục như vậy cho đến $b_{(271)}$ là ngày tiết kiệm ít nhất.

Theo đề bài, sau 271 ngày, tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn đều bằng 500 000 đồng, nên ta có:

$$a_{(1)} + a_{(2)} + \cdots + a_{(271)} = 500\ 000$$
$$b_{(1)} + b_{(2)} + \cdots + b_{(271)} = 500\ 000$$

Xét tổng số tiền An tiết kiệm được trong 136 ngày có số tiền lớn nhất, đặt là A:

$$A = a_{(1)} + a_{(2)} + \cdots + a_{(136)}$$

Xét tổng số tiền của 135 ngày còn lại (các ngày có số tiền nhỏ hơn), đặt là A':

$$A' = a_{(137)} + a_{(138)} + \cdots + a_{(271)}$$

Vì các ngày từ 137 đến 271 đều nhỏ hơn hoặc bằng các ngày trong nhóm 136 ngày đầu tiên, ta có đánh giá: mỗi ngày trong 135 ngày sau sẽ nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của một ngày trong 136 ngày đầu, tức là

$$a_{(j)} \leqslant \frac{A}{136} \quad (\text{với mọi } 137 \leqslant j \leqslant 271)$$

Do đó,

$$A' \leqslant 135 \cdot \frac{A}{136}$$

Lúc này,

$$500\ 000 = A + A' \leqslant A + \frac{135}{136}A = \frac{271}{136}A$$
$$A \geq 500\ 000 \cdot \frac{136}{271} > 250\ 000 \text{ (đồng)}$$

Suy ra, tổng số tiền của An trong 136 ngày có số tiền lớn nhất chắc chắn không nhỏ hơn 250 000 đồng.

Hoàn toàn tương tự, nếu sắp xếp lại dãy số tiền tiết kiệm của Bình từ lớn đến bé, ta cũng thu được kết quả cho 136 ngày có số tiền tiết kiệm lớn nhất của Bình (gọi là B):

$$B \geqslant 500\ 000 \cdot \frac{136}{271} > 250\ 000 \text{ (đồng)}$$

Như vậy, qua việc đánh giá tập hợp 136 ngày có số tiền tiết kiệm lớn nhất của mỗi bạn, tổng số tiền tiết kiệm của từng bạn đều vượt quá mức 250 000 đồng.

Do đó, trong 271 ngày nói trên, luôn tồn tại 136 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong khoảng thời gian đó không nhỏ hơn 250 000 đồng (đpcm).

thuvientoanhoc.com