PHÒNG GD & ĐT HUYỆN BÙ GIA MẬP
TRƯỜNG THCS ĐẮK Ơ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TRƯỜNG LỚP 9 NĂM HỌC 2023 – 2024
MÔN THI: TOÁN - LẦN 1
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 10/10/2023

Câu 1. (5 điểm)

1. Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right):\left(1+\frac{a-b}{1-ab}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A với $a=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

2. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $7x^2-13xy-2y^2=0.$

Tính giá trị của biểu thức $B=\frac{2x-6y}{7x+4y}$

Câu 2. (5 điểm)

1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\sqrt{x+11}-11=0$

b) $(x-3)(x+1)-4(x-3).\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$

Câu 3. (5 điểm) Cho AB là đường kính của đường tròn (O; R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC; OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) tại M; MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O; R).

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm bất kỳ I, J, K sao cho K khác A, B và $\widehat{IKJ}=60^0$.

Chứng minh rằng: $AJ.BI\le\frac{AB^2}{4}$. Dấu '' = '' xảy ra khi nào ?

Câu 5. (3 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+y^3=3xy+3$.

2. Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c.$

.....Hết.....

Họ và tên thi sinh……số báo danh……
Chữ ký của giám thị 1…… chữ ký của giám thị 2……

thuvientoanhoc.com

PHÒNG GD&ĐT BÙ GIA MẬP
TRƯỜNG THCS ĐĂK Ơ

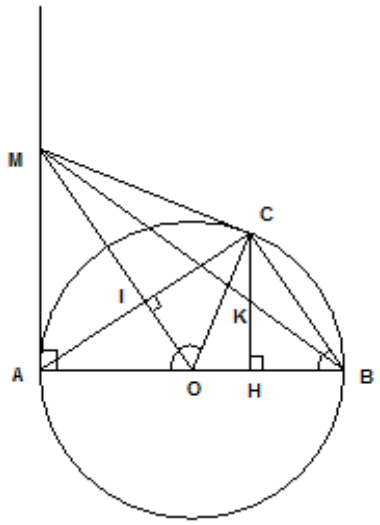
ĐÁP ÁN THI HSG MÔN TOÁN 9
NĂM HỌC 2023-2024

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5.0 điểm)	1	$A=\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right):\left(1+\dfrac{a-b}{1-\sqrt{ab}}\right)$	
		a) ĐKXĐ của A là $\begin{cases}a\ge 0, b\ge 0\\ ab\ne 1\\ b\ne 1\end{cases}$	0,5
		Ta có: $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(1-\sqrt{ab}\right)}{\left(1-\sqrt{ab}\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)}$ $=\dfrac{2\sqrt{a}-2b\sqrt{a}}{1-ab}=\dfrac{2\sqrt{a}\left(1-b\right)}{1-ab}$	0,25
		$1+\dfrac{a-b}{1-ab}=\dfrac{(1+a)(1-b)}{1-ab}$	0,25
		Khi đó $A=\dfrac{2\sqrt{a}(1-b)}{1-ab}.\dfrac{1-ab}{(1+a)(1-b)}=\dfrac{2\sqrt{a}}{1+a}$	0,5
		b) Với $a=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3}=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$	0,25
		Suy ra $A=\dfrac{2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{1+4+2\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{5+2\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)}{25-12}=\dfrac{2\left(3\sqrt{3}-1\right)}{13}$	0,75
		c) Vì $a\ge 0$ nên ta có $\left(\sqrt{a}-1\right)^2\ge 0\Rightarrow a-2\sqrt{a}+1\ge 0$ $\Rightarrow 2\sqrt{a}\le a+1\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}\le 1\Rightarrow A\le 1$	0,5
		Dấu '' = '' xảy ra khi a = 1. Vậy GTLN của A là 1 khi a = 1.	0,5
	2	Ta có $7x^2-13xy-2y^2=0\Leftrightarrow\left(7x+y\right)\left(x-2y\right)=0$ $\Leftrightarrow x=2y$ (do x > 0, y > 0)	0,5
		Thay vào biểu thức B, ta được $B=\dfrac{2.2y-6y}{7.2y+4y}=\dfrac{-2y}{18y}=-\dfrac{1}{9}$. Vậy $B=-\dfrac{1}{9}$	1

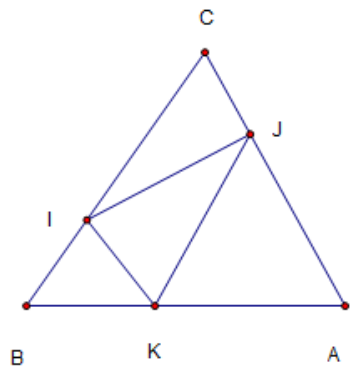
thuvientoanhoc.com

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 2 (5.0 điểm)	1	a) $x^2+\sqrt{x+11}-11=0 \quad (1)$ ĐKXĐ: $x \ge -11$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow x^2-(x+11)+x+\sqrt{x+11}=0$ $\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+11}\right)\left(x+\sqrt{x+11}\right)+x+\sqrt{x+11}=0$ $\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+11}\right)\left(x-\sqrt{x+11}+1\right)=0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x+11}=0 \quad (1') \\ x-\sqrt{x+11}+1=0 \quad (2') \end{array}\right.$	0,25
		$(1') \Leftrightarrow \sqrt{x+11}=-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le 0 \\ x+11=x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn đk)	0,25
		$(2') \Leftrightarrow \sqrt{x+11}=x+1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x+11=(x+1)^2 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x^2+x-10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (thỏa mãn đk)	0,25
		Vậy phương trình có tập nghiệm $\left\{\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}\right\}$	0,25
		b) $(x-3)(x+1)-4(x-3).\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3 \quad (2)$	
		ĐKXĐ: $x \le -1$ hoặc $x > 3$	0,25
		Xét $x > 3$. Khi đó $(x-3).\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=\sqrt{(x-3)(x+1)}$ Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)}=y \quad (y \ge 0)$ thì $(2) \Leftrightarrow y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \quad (n) \\ y=3 \quad (n) \end{array}\right.$	0,25

thuvientoanhoc.com

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
		Với $y=1$ thì $\sqrt{(x-3)(x+1)}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1+\sqrt{5} & (n) \\ x=1-\sqrt{5} & (l) \end{array}\right.$	0,25
		Với $y=3$ thì $\sqrt{(x-3)(x+1)}=3 \Leftrightarrow x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1+\sqrt{13} & (n) \\ x=1-\sqrt{13} & (l) \end{array}\right.$	0,25
		Xét $x \le -1$. Khi đó $(x-3).\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-\sqrt{(x-3)(x+1)}$ Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)}=y \quad (y \ge 0)$ thì $(2) \Leftrightarrow y^2+4y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-1 & (l) \\ y=-3 & (l) \end{array}\right.$	0,25
		Vậy phương trình có tập nghiệm $\{1+\sqrt{5};1+\sqrt{13}\}$	0,25
	2	2) $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2)=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$	0,25
		Đặt $a=x+1,\ b=y-2$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} ab=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ a+b=\pm 4 \end{cases}$	0,5
		+) $\begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$	0,5
		+) $\begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2 \\ y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$	0,5
		Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y) \in \{(1;4),(-3;0)\}$	0,25
Câu 3 (5.0 điểm)			0,5

thuvientoanhoc.com

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
	a	Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn Chứng minh $OI \perp AC \Rightarrow \Delta OIC$ vuông tại I => I thuộc đường tròn đường kính OC.	0,5
		$CH \perp AB(gt) \Rightarrow \Delta CHO$ vuông tại H => H thuộc đường tròn đường kính OC.	0,5
		=> I, H cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Hay 4 điểm C, I, H, O cùng thuộc một đường tròn đường kính OC.	0,5
	b	Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) - Chứng minh $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$	0,5
		- Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$	0,5
		- Chứng minh $MC \perp CO$ $\Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O, R)	0,5
	c	Chứng minh K là trung điểm của CH ΔMAB có KH // MA (vì cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow KH = \frac{AM.HB}{AB} = \frac{AM.HB}{2R}$ (1)	0,5
		Chứng minh CB // MO $\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{CBH}$ (đồng vị) Chứng minh $\Delta MAO \sim \Delta CHB \Rightarrow \frac{MA}{CH} = \frac{AO}{HB} \Rightarrow CH = \frac{AM.HB}{AO} = \frac{AM.HB}{R}$ (2)	0,5
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ CH = 2CK $\Rightarrow$ CK = KH $\Rightarrow$ K là trung điểm của CH.	0,5
Câu 4 (2.0 điểm)			0,25
		Ta có: $\widehat{BKI} = 180^0 - \hat{B} - \widehat{BIK} = 120^0 - \widehat{BIK}$	0,25
		Mà $\widehat{BKI} = 180^0 - \widehat{IKJ} - \widehat{AKJ} = 120^0 - \widehat{AKJ}$	0,25
		Suy ra: $\widehat{BIK} = \widehat{AKJ}$	0,25
		Suy ra: $\Delta BIK \backsim \Delta AKJ$	0,25

thuvientoanhoc.com

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Rightarrow \frac{BI}{AK}=\frac{BK}{AJ}$
$\Rightarrow AJ.BI=AK.BK\le\left(\frac{AK+BK}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Dấu ‘’ = ‘’ xảy ra khi và chỉ khi AK = BK. Hay K là trung điểm của AB.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Câu 4 (3.0 điểm)</td><td rowspan="3">1</td><td>$x^3+y^3=3xy+3\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)=3xy+3$.
Đặt $x+y=a$; xy=b (a, b là các số nguyên) ta có
$a^3-3ab=3b+3\Leftrightarrow a^3-3=3b(a+1)$ nên $(a^3-3)\vdots(a+1)$
$(a^3+1-4)\vdots(a+1)$
$\Rightarrow 4\vdots(a+1)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Ta lập bảng giá trị sau
<table>
<tr><td>a + 1</td><td>1</td><td>– 1</td><td>2</td><td>– 2</td><td>4</td><td>– 4</td></tr>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>– 2</td><td>1</td><td>– 3</td><td>3</td><td>– 5</td></tr>
<tr><td>$b=\frac{a^3-3}{3(a+1)}$</td><td>– 1</td><td>Không nguyên</td><td>Không nguyên</td><td>5</td><td>2</td><td>Không nguyên</td></tr>
</table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Trường hợp $a=0,b=-1$ cho $(x,y)=(1;-1)$, $(x,y)=(-1;1)$
Trường hợp $a=-3,b=5$ không cho nghiệm
Trường hợp $a=3,b=2$ cho $(x,y)=(1;2)$, $(x,y)=(2;1)$
Vậy nghiệm nguyên (x,y) của phương trình là $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$, $(2;1)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>Với a, b, c là các số dương, ta có :
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b)ab$
$\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{2ab}\ge\frac{a+b}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tương tự : $\frac{b^3+c^3}{2bc}\ge\frac{b+c}{2};\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge\frac{c+a}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Suy ra : $\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c.$
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.</td><td>0,5
0,25</td></tr>
</table>

** Chú ý: Học sinh có thể làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.*

thuvientoanhoc.com