ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2015
Môn Toán; Khối A và khối A1.

Câu 1. (2 điểm)

a) Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

b) Tìm giá trị tham số $m \in \mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4mx^2 - 4m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của 1 tam giác nhận điểm $H\left(0; \frac{31}{4}\right)$ làm trực tâm.

Câu 2. (1 điểm) Giải phương trình: $\sin 2x + \frac{1}{2}\tan x = \frac{3}{2} - \cos 2x$.

Câu 3. (1 điểm) Tính giới hạn: $B = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Câu 4. (1 điểm). Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 120^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a.

Câu 5. (1 điểm)

a) Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4321 đồng thời các chữ số 1 và 3 luôn có mặt và đứng cạnh nhau.

b) Chứng minh rằng: với mọi cặp số nguyên k, n $(1 \le k \le n)$ ta có: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Tìm số nguyên $n > 4$ biết rằng $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^n = 1600$.

Câu 6. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ,cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $4x - 3y - 20 = 0$; $2x + y + 10 = 0$. Đường tròn (C) đi qua trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm H biết $x_C > -4$.

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ,cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh BC, N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Biết MN có phương trình $3x - y - 4 = 0$ và $D(5;1)$. Tìm tọa độ của điểm B biết M có tung độ dương.

Câu 8. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 - y^2 = y^3 + x^2y + x^2 \\ 2y^3 - \sqrt{5 - 2x^2} - 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 9. (1 điểm) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $2(a^2 + b^2 + c^2) = ab + bc + ca + 3$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a + b + c + 3}$.

GV ra đề: Nguyễn Phú Khánh *Môn Toán – Khối A,A1*

thuvientoanhoc.com

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2 điểm)

a) Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

∗ Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

∗ Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

∗ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

∗ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

∗ Đồ thị

- Điểm đặc biệt :

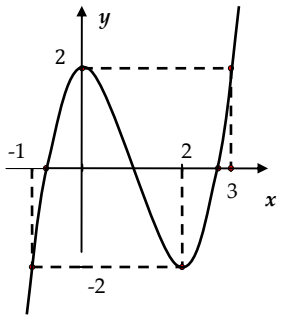
$y'' = 6x - 6$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1;0)$

- Chọn $x = 3 \Rightarrow y = 2$, $x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Chú ý: Ta có thể tìm điểm đặc biệt bằng cách tìm giao điểm của đồ thị với trục tọa độ:

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là điểm $(0;2)$

Đồ thị cắt Ox tại ba điểm $(1;0), (1\pm\sqrt{3};0)$



Nhận xét: Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.

b)

$m \le 0 \Rightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm, nên hàm số có 1 cực trị.

$m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó, nên hàm số có 3 cực trị. Giả sử $A(0;-4m)$, $B\left(-\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$, $C\left(\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$.

Vì tam giác ABC cân tại A và B,C đối xứng nhau qua Oy

H là trực tâm tam giác ABC khi $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ $(*)$.

Ta có: $\overrightarrow{BH} = \left(\sqrt{2m};-4m^2+4m+\dfrac{31}{4}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{2m};4m^2\right)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2m + 4m^2\left(-4m^2+4m+\dfrac{31}{4}\right) = 0$ hay $8m^3 - 8m^2 - \dfrac{31}{2}m - 1 = 0$, phương trình có nghiệm $m = 2$ thỏa $m > 0$.

GV ra đề: Nguyễn Phú Khánh *Môn Toán – Khối A,A1*

thuvientoanhoc.com

Câu 2. (1 điểm) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$\sin 2x+\frac{1}{2}\tan x=\frac{3}{2}-\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x+\frac{1}{2}\tan x=\frac{1}{2}-2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\frac{1}{2}\tan x=\frac{1}{2}-\sin 2x.\tan x \Leftrightarrow \left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)(\tan x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{1}{2}\\ \tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi;\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$

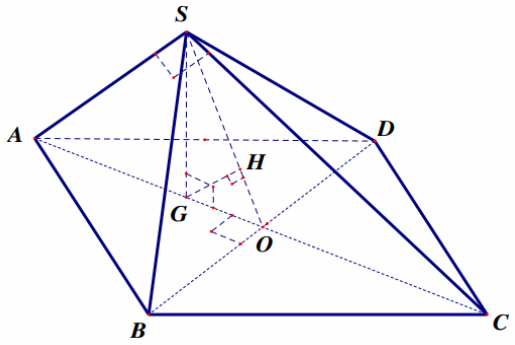
Câu 3. (1 điểm) Ta có: $x^5-5x^3+2x^2+6x-4=(x-1)^2(x+2)(x^2-2)$, $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1}=-\frac{3}{2}$.

Câu 4. (1 điểm).

$\hat{B}=120^0 \Rightarrow \hat{A}=60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều cạnh a

$\Rightarrow S_{ABCD}=2S_{ABD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Gọi O là giao điểm AC và BD

$\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}; AG=\frac{2}{3}AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}; AC=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SG=\sqrt{GA.GC}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (ΔSAC vuông tại S, đường cao SG). $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SG=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Kẻ $GH\perp SO \Rightarrow GH\perp (SBD)$ vì $BD\perp GH\subset (SAO) \Rightarrow d(G,(SBD))=GH$

ΔSGO vuông tại G, đường cao $GH \Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{GS^2}+\frac{1}{GO^2}=\frac{27}{2a^2}$

Câu 5. (1 điểm)

a) Giả sử số đó là $\overline{abcd}$

TH1: a,b là các chữ số 1 và 3. Sẽ có 2! Cách chọn a,b

Lúc này chọn d có: 4 cách và chọn c có 4 cách. Trường hợp này có $2.4.4=32$ số

TH2: b,c là các chữ số 1 và 3. Sẽ có 2! Cách chọn b,c

Nếu $d=0$ chọn a có: 2cách. Trường hợp này có $2.1.2=4$ số.

Nếu $d\neq 0$ chọn d có 2 cách, chọn a có: 2 cách. Trường hợp này có $2.2.2=8$ số

Vậy có: $32+4+8=44$ số.

b) Ta có: $kC_n^k=k.\frac{n!}{k!(n-k)!}=n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}=nC_{n-1}^{k-1}$ (đpcm)

$2C_n^0+5C_n^1++8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=1600 \Leftrightarrow 3C_n^1+6C_n^2+...+3nC_n^n+2\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)=1600$

$\Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)+2\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)=1600$

GV ra đề: Nguyễn Phú Khánh *Môn Toán – Khối A,A1*

thuvientoanhoc.com

$\Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)+2\left(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\right)=1600$

$\Leftrightarrow 3n(1+1)^{n-1}+2(1+1)^n=1600 \Leftrightarrow 3n.2^{n-1}+2^{n+1}=1600 \Leftrightarrow 3n.2^{n-5}+2^{n-3}=100 \Leftrightarrow n=7$

Câu 6. (1 điểm) Tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x-3y-20=0\\2x+y+10=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-1\\y=-8\end{cases}$, suy ra $A(-1;-8)$

Gọi D, E, F, N lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC, AC và B′ là chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Ta có $\begin{cases}EF//BC\\NF//AH\\BC\perp AH\end{cases}$. Do đó $EF\perp NF$

Tương tự ta có: $ED\perp DN$. Vậy đường tròn (C) đi qua D, E, F là đường tròn đường kính EN. Suy ra N thuộc (C). Mặt khác $EB'\perp B'N$, tức là B′ cũng thuộc (C).

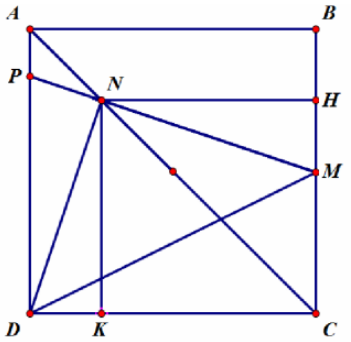
Tọa độ của N và B′ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+10=0\\(x-1)^2+(y+2)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x-10\\5x^2+30x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$ *hay* $\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$

Nếu $N(-4;-2)$ thì $C(-7;4)$ (loại)

Nếu $N(-2;-6)$ thì $C(-3;-4)$. Vậy $N(-2;-6);\ B'(-4;-2);\ C(-3;-4)$

Đường thẳng BH đi qua B′ và nhận VTCP $(1;-2)$ của AC là vtpt nên có phương trình $x-2y=0$. Đường thẳng CH đi qua C và nhận vtcp $(3;4)$ của AB làm vtpt nên có phương trình là $3x+4y+25=0$ Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-2y=0\\3x+4y+25=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-5\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}$. Vậy $H\left(-5;-\frac{5}{2}\right)$

Câu 7. (1 điểm)



Kẻ $NH\perp BC$ tại H, $NK\perp DC$ tại K

Ta có $\Delta NKC=\Delta NHC\Rightarrow NK=NH$

$\left.\begin{array}{l}AD//NK\Rightarrow\frac{DK}{DC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}\\AB//NH\Rightarrow\frac{BH}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow DK=BH$, mà M là trung điểm BC nên H là trung điểm

$BM\Rightarrow\Delta DKN=\Delta MHN\Rightarrow\widehat{DNK}=\widehat{MNH}, ND=NM$

Mà $\widehat{KNH}=90^0\Rightarrow\widehat{DNK}=90^0\Rightarrow\Delta DNM$ vuông cân tại N

$\Rightarrow DN\perp MN\Rightarrow DN:(x-5)+3(y-1)=0$ *hay* $x+3y-8=0$

Tọa độ N thỏa hệ: $\begin{cases}x+3y-8=0\\3x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow N(2;2)$

Giả sử $M(m;3m-4)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(2-m;6-3m);\ DN=\sqrt{10};MN=DN$

$\Rightarrow(2-m)^2+(6-3m)^2=\sqrt{10}\Leftrightarrow(m-2)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\Rightarrow M(3;5)\\m=1\Rightarrow M(1;-1)\ (loai)\end{array}\right.$

thuvientoanhoc.com

$M(3;5)$ m gọi $P = MN \cap AD \Rightarrow \overrightarrow{NP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 2 = \frac{-1}{3} \\ y_P - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{5}{3} \\ y_P = 1 \end{cases}$

Ta có: $AP = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{6}BC = \frac{1}{6}AD \Rightarrow DP = \frac{5}{6}DA$

$\Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DP} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 3 = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3} - 5\right) \\ y_B - 5 = \frac{3}{5}(1-1) \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$

Câu 8. (1 điểm) Điều kiện: $|x| \le \sqrt{\frac{5}{2}}$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \left(x^2 - 1 - y\right)\left(x^2 + y^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $x^2 = y + 1$

Trường hợp $x = y = 0$ thế vào (2) không thỏa mãn.

Trường hợp $x^2 = y + 1$ thế vào (2): $2y^3 - \sqrt{3-2y} - 1 = 0 \ (3)$

Xét hàm $f(t) = 2t^3 - \sqrt{3-2t} - 1;\ t \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$; $f'(t) = 6t^2 + \frac{1}{\sqrt{3-2t}};\ f'(t) > 0,\ \forall t \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$; mà $f(1) = 0$.

Suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất: $y = 1$. Với $y = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(\sqrt{2};1\right);\left(-\sqrt{2};1\right)$

Câu 9. (1 điểm) Với a,b,c là các số dương ta có: $\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}$ và $ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3}$

Bởi vậy: $\frac{2(a+b+c)^2}{3} \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 9$, từ đó: $0 < a+b+c \le 3$

Ta có: $2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = ab + bc + ca + 3 \le ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3$ nên $\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \le \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{3}{2}$

Bởi vậy: $S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a+b+c+3} \le \frac{(a+b+c)^2}{6} - \frac{1}{a+b+c+3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2}$ với $0 < t \le 3$ và $f'(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{(t+3)^2} > 0,\ \forall t \in (0;3)$

Bởi vậy: $f(t) \le f(3),\ \forall t \in (0;3]$ hay $f(t) \le \frac{17}{6}$

Suy ra: $S \le \frac{17}{6}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy $\max S = \frac{17}{6}$ khi $a = b = c = 1$

thuvientoanhoc.com