SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THCS VÀ THPT
NGUYỄN KHUYẾN – BÌNH DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm có 2 trang)

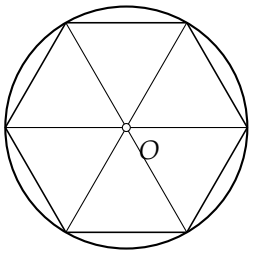
ĐỀ TUYỂN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC: 2026 – 2027
MÔN: TOÁN – KHỐI LỚP: 12
Ngày thi: 14/11/2026
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

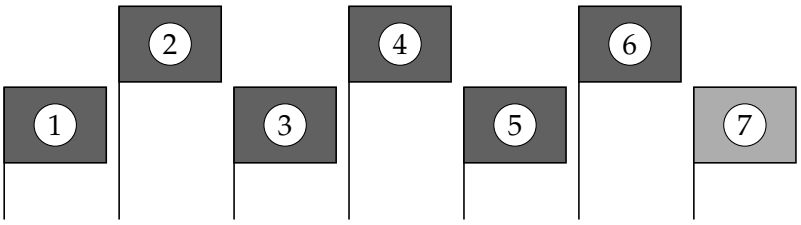
Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 9$, $AC = 6$, $AD = 4$. Lấy điểm G thay đổi thuộc miền trong của tam giác ABC. Đường thẳng qua G song song với AB cắt mặt phẳng (ACD) tại M, đường thẳng qua G song song với AC cắt mặt phẳng (ABD) tại N, đường thẳng qua G song song với AD cắt mặt phẳng (BCD) tại P. Khi đó giá trị lớn nhất của $GM \cdot GN \cdot GP$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm thực?

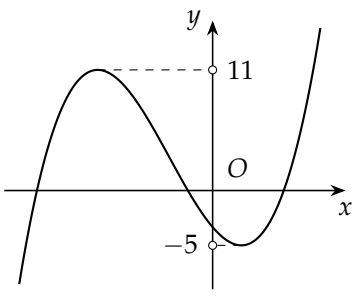
Câu 3. Cho đa giác đều có 30 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên đồng khả năng một tập hợp gồm 4 đỉnh phân biệt của đa giác và nối chúng theo thứ tự vòng quanh đường tròn ngoại tiếp để tạo thành một tứ giác. Xác suất chọn được tứ giác là hình thang cân bằng $\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $(a, b) = 1$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu? Biết rằng, hình chữ nhật cũng được tính là hình thang cân.

Câu 4. Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính 1. Xét 7 vị trí gồm sáu đỉnh của lục giác và tâm O. Có 7 lá cờ phân biệt, lần lượt ghi các số từ 1 đến 7. Đặt mỗi lá cờ vào đúng một vị trí, sao cho với mọi bộ ba vị trí tạo thành tam giác đều cạnh 1, tổng ba số ghi trên các lá cờ tại những vị trí đó không vượt quá 12. Hai cách bố trí được coi là giống nhau khi có thể nhận được từ nhau bằng một phép quay quanh O với góc là bội nguyên của 60°. Hai cách bố trí đối xứng nhau qua một đường thẳng nhưng không nhận được từ nhau bằng phép quay nói trên thì được coi là khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí khác nhau?





Câu 5. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, với giá trị cực đại bằng 11 và giá trị cực tiểu bằng -5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(m; n)$ để phương trình $|f(x) - m| = 2n$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?



Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (m+2)x + 5}{x^2 + 1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị m sao cho đồ thị hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm

thuvientoanhoc.com

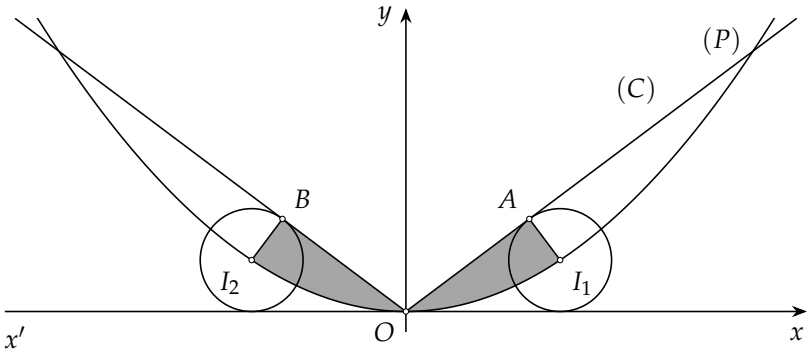
số cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{25}{4}$. Tính tổng các phần tử của S.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;1)$, $B(1;0;2)$ và $C(-2;2;4)$. Xét mặt phẳng (P) có phương trình $-7x+my+nz=0$, $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho ba điểm A, B, C đều nằm trong cùng một nửa không gian mở có bờ là (P). Xác định m, n để biểu thức $T=\mathrm{d}(A,(P))+2\mathrm{d}(B,(P))+4\mathrm{d}(C,(P))$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $S=m+n$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):3x-y+2z-5=0$ và hai điểm $A(8;-3;3)$, $B(11;-2;13)$. Gọi M, N là hai điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MN=\sqrt{6}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là bao nhiêu?

Câu 9. Biết $\displaystyle\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x=a+\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $T=a-b-c$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho:
Đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3}{4}|x|$;
Đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính 1, tiếp xúc với tia Ox và tiếp xúc với nhánh $x>0$ của (C) tại A;
Đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính 1, tiếp xúc với tia Ox' (tia đối của Ox) và tiếp xúc với nhánh $x<0$ của (C) tại B.
Gọi (P) là parabol có đỉnh O, trục đối xứng Oy và đi qua hai điểm I_1, I_2.



Tính tổng diện tích hai miền phẳng có biên lần lượt gồm:
Phần đồ thị OA của (C), đoạn thẳng AI_1 và phần đồ thị I_1O của (P);
Phần đồ thị OB của (C), đoạn thẳng BI_2 và phần đồ thị I_2O của (P).

— HẾT —

thuvientoanhoc.com

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

Câu 1.

Vì $G \in (ABC)$ nên đường thẳng qua G song song với AB nằm trong (ABC) và cắt (ACD) tại $M \in AC$. Tương tự $N \in AB$.

Cách 1.

Đặt $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{GBC}$, $S_2 = S_{GCA}$, $S_3 = S_{GAB}$, ta có $S_1 + S_2 + S_3 = S$.

Do $GM \parallel AB$ và M, A cùng thuộc AC nên $\dfrac{GM}{AB} = \dfrac{d(G,AC)}{d(B,AC)} = \dfrac{S_2}{S}$, suy ra $GM = \dfrac{9S_2}{S}$.

Do $GN \parallel AC$ và N, A cùng thuộc AB nên $\dfrac{GN}{AC} = \dfrac{d(G,AB)}{d(C,AB)} = \dfrac{S_3}{S}$, suy ra $GN = \dfrac{6S_3}{S}$.

Gọi $K = AG \cap BC$. Vì $GP \parallel AD$ nên GP nằm trong mặt phẳng (AKD). Mà $P \in (BCD)$ và $(AKD) \cap (BCD) = KD$ nên $P \in KD$. Trong tam giác KAD, theo định lí Thales: $\dfrac{GP}{AD} = \dfrac{KG}{KA}$.

Vì K, G, A thẳng hàng và $K \in BC$ nên tỉ số khoảng cách từ G và từ A đến BC bằng $\dfrac{KG}{KA}$. Suy ra $\dfrac{KG}{KA} = \dfrac{S_{GBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_1}{S}$, do đó $GP = \dfrac{4S_1}{S}$.

Do đó $GM \cdot GN \cdot GP = \dfrac{216 S_1 S_2 S_3}{S^3} \le \dfrac{216}{S^3} \cdot \left(\dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \right)^3 = 8$.

Dấu bằng xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3$, tức G là trọng tâm tam giác ABC.

Cách 2.

Vì G thuộc miền trong tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ với $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

Lấy M trên AC sao cho $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$. Khi đó $\overrightarrow{MG} = x\overrightarrow{AB}$, nên $MG \parallel AB$ và M chính là giao điểm cần tìm. Suy ra $GM = x \cdot AB = 9x$.

Tương tự, lấy N trên AB sao cho $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\overrightarrow{NG} = y\overrightarrow{AC}$, suy ra $GN = y \cdot AC = 6y$.

Điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{GP} = t\overrightarrow{AD}$, tức $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AD}$.

$P \in (BCD) \Leftrightarrow x + y + t = 1 \Leftrightarrow t = 1 - x - y > 0$. Suy ra $GP = (1 - x - y) \cdot AD = 4(1 - x - y)$.

Do đó $GM \cdot GN \cdot GP = 216xy(1 - x - y) \le 216 \left(\dfrac{x + y + 1 - x - y}{3} \right)^3 = 8$.

thuvientoanhoc.com

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1-x-y=\dfrac{1}{3}$, tức G là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy giá trị lớn nhất của $GM\cdot GN\cdot GP$ bằng 8.

Câu 2.

Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Khi đó $0\le\sqrt{1-x^2}\le 1$.

Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$, ta có $t\in[3;9]$ và mỗi $t\in[3;9]$ đều ứng với ít nhất một $x\in[-1;1]$.

Phương trình trở thành $t^2-(m+3)t+2m+1=0\Leftrightarrow t^2-3t+1=m(t-2)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-3t+1}{t-2}$ (vì $t-2>0$).

Xét $g(t)=\dfrac{t^2-3t+1}{t-2}=t-1-\dfrac{1}{t-2}$ trên $[3;9]$, có $g'(t)=1+\dfrac{1}{(t-2)^2}>0$ nên g đồng biến.

$g(3)=1$, $g(9)=8-\dfrac{1}{7}=\dfrac{55}{7}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le\dfrac{55}{7}$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 3.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{30}^4=27405$.

Tứ giác nội tiếp có một cặp cạnh song song thì là hình thang cân. Vì vậy ta đếm số cặp dây cung song song (hai dây song song không cắt nhau nên khi nối 4 đầu mút theo thứ tự vòng quanh, chúng là hai cạnh đối của tứ giác).

Đa giác đều 30 đỉnh có 30 trục đối xứng. Mỗi dây cung vuông góc với đúng một trục đối xứng, và hai dây song song khi và chỉ khi chúng vuông góc với cùng một trục.

Có 15 trục đi qua hai đỉnh đối diện, mỗi trục vuông góc với $\dfrac{30-2}{2}=14$ dây, cho $15\cdot C_{14}^2=1365$ cặp dây song song.

Có 15 trục đi qua trung điểm hai cạnh đối diện, mỗi trục vuông góc với $\dfrac{30}{2}=15$ dây, cho $15\cdot C_{15}^2=1575$ cặp dây song song.

Tổng cộng có $1365+1575=2940$ cặp. Trong đó mỗi hình chữ nhật có hai cặp cạnh song song nên được đếm hai lần.

Mỗi hình chữ nhật ứng với một cặp đường kính, nên số hình chữ nhật là $C_{15}^2=105$.

thuvientoanhoc.com

Số hình thang cân (kể cả hình chữ nhật) là $2940-105=2835$.

Xác suất cần tìm: $P=\dfrac{2835}{27405}=\dfrac{3}{29}$. Suy ra $a=3$, $b=29$.

Vậy $a+b=32$.

Câu 4.

Các tam giác đều cạnh 1 là 6 tam giác OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_6A_1. Gọi c là số đặt tại O, $a_1,a_2,...,a_6$ là các số đặt tại $A_1,A_2,...,A_6$. Điều kiện: $c+a_i+a_{i+1}\le 12$ với mọi i (quy ước $a_7=a_1$).

Cộng 6 bất đẳng thức, mỗi đỉnh của lục giác được tính hai lần: $6c+2(28-c)\le 72\Leftrightarrow c\le 4$.

Nếu $c=4$: số 7 nằm trên lục giác, hai số kề với 7 phải nhỏ hơn hoặc bằng $12-4-7=1$, vô lí.

Nếu $c=3$: hai số kề với 7 phải nhỏ hơn hoặc bằng 2, tức là 1 và 2. Hai số kề với 6 phải nhỏ hơn hoặc bằng 3 và khác 3, tức cũng là 1 và 2. Khi đó $7,1,6,2$ tạo thành một vòng kín 4 đỉnh, mâu thuẫn với vòng 6 đỉnh. Vậy $c\in\{1;2\}$.

Khi đó số 7 luôn nằm trên lục giác. Vì các số đôi một khác nhau nên trong mỗi nhóm các cách bố trí trùng nhau qua phép quay, có đúng một cách đặt số 7 tại A_1. Do đó ta chỉ cần đếm các cách bố trí có số 7 tại A_1.

Trường hợp $c=1$: điều kiện là $a_i+a_{i+1}\le 11$. Trong các số $2,3,4,5,6,7$, chỉ có các cặp $\{7;5\}$ và $\{7;6\}$ có tổng lớn hơn 11. Vậy chỉ cần hai số kề với 7 (tại A_2, A_6) được chọn từ $\{2;3;4\}$: có $3\cdot 2=6$ cách. Ba số còn lại xếp vào A_3,A_4,A_5: có $3!=6$ cách. Có 36 cách.

Trường hợp $c=2$: điều kiện là $a_i+a_{i+1}\le 10$. Trong các số $1,3,4,5,6,7$, các cặp có tổng lớn hơn 10 là $\{7;4\}$, $\{7;5\}$, $\{7;6\}$, $\{6;5\}$. Hai số kề với 7 phải là 1 và 3: có 2 cách. Các số $4,5,6$ xếp vào A_3,A_4,A_5 sao cho 5 và 6 không kề nhau, nên A_4 là 4: có 2 cách. Có 4 cách.

Vậy có $36+4=40$ cách bố trí khác nhau.

Câu 5.

Nếu $n<0$: phương trình vô nghiệm. Nếu $n=0$: phương trình là $f(x)=m$, có không quá 3 nghiệm. Do đó $n\ge 1$.

Khi $n\ge 1$: $|f(x)-m|=2n\Leftrightarrow f(x)=m+2n$ hoặc $f(x)=m-2n$.

Hai phương trình này không có nghiệm chung và mỗi phương trình có không quá 3 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi mỗi phương trình có đúng 3 nghiệm.

Từ đồ thị, điều này tương đương với $-5<m-2n<m+2n<11\Leftrightarrow 2n-5<m<11-2n$.

Với $n=1$: $-3<m<9$, có 11 giá trị của m.

Với $n=2$: $-1<m<7$, có 7 giá trị của m.

thuvientoanhoc.com

Với $n=3$: $1<m<5$, có 3 giá trị của m.

Với $n\geq 4$: $2n-5\geq 11-2n$, không có giá trị nào của m.

Vậy có $11+7+3=21$ cặp số nguyên $(m;n)$.

Câu 6.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ với $g(x)=-(m+2)x^2+2(m-5)x+m+2$.

Nếu $m=-2$ thì $g(x)=-14x$, hàm số chỉ có một cực trị.

Nếu $m\neq -2$ thì $g(x)$ có $\Delta'=(m-5)^2+(m+2)^2>0$, nên $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt và hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Từ $(x^2+1)y=mx^2+(m+2)x+5$, lấy đạo hàm hai vế: $2xy+(x^2+1)y'=2mx+m+2$.

Tại điểm cực trị $(x_0;y_0)$ ta có $y'(x_0)=0$ nên $2x_0y_0=2mx_0+m+2$. Nhân hai vế với $\dfrac{x_0}{2}$:

$x_0^2y_0=mx_0^2+\dfrac{m+2}{2}x_0$.

Mặt khác $x_0^2y_0+y_0=mx_0^2+(m+2)x_0+5$. Trừ vế theo vế ta được $y_0=\dfrac{m+2}{2}x_0+5$.

Vậy đường thẳng nối hai điểm cực trị là $d: y=\dfrac{m+2}{2}x+5$.

d cắt Oy tại $(0;5)$ và cắt Ox tại $\left(-\dfrac{10}{m+2};0\right)$.

Diện tích tam giác: $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{10}{|m+2|}=\dfrac{25}{|m+2|}=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow |m+2|=4\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-6$ (đều thỏa mãn $m\neq -2$).

Vậy $S=\{2;-6\}$ và tổng các phần tử của S bằng -4.

Câu 7.

Đặt $f(x;y;z)=-7x+my+nz$. Vì A,B,C nằm cùng phía đối với (P) nên $f(A),f(B),f(C)$ cùng dấu. Do đó $T=\dfrac{|f(A)+2f(B)+4f(C)|}{\sqrt{49+m^2+n^2}}$.

Cách 1.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}$, ta có $K(-7;10;21)$.

thuvientoanhoc.com

Vì f không có hệ số tự do nên $f(A)+2f(B)+4f(C)=f(K)$. Suy ra

$T=\dfrac{|f(K)|}{\sqrt{49+m^2+n^2}}=d(K,(P))$.

Mặt phẳng (P) luôn đi qua O nên $d(K,(P))\le OK=\sqrt{49+100+441}=\sqrt{590}$.

Dấu bằng xảy ra khi $OK\perp(P)$, tức $\overrightarrow{OK}=(-7;10;21)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Vì (P) có vectơ pháp tuyến $(-7;m;n)$ nên $m=10$, $n=21$.

Cách 2.

Ta có $f(A)=7+2m+n$, $f(B)=-7+2n$, $f(C)=14+2m+4n$, nên $T=\dfrac{|49+10m+21n|}{\sqrt{49+m^2+n^2}}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$|49+10m+21n|=|(-7)(-7)+10m+21n|\le\sqrt{49+100+441}\cdot\sqrt{49+m^2+n^2}$, suy ra $T\le\sqrt{590}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{m}{10}=\dfrac{n}{21}=\dfrac{-7}{-7}$, tức $m=10$, $n=21$.

Kiểm tra: với $m=10$, $n=21$ ta có $f(A)=48$, $f(B)=35$, $f(C)=118$ đều dương, nên A,B,C cùng phía đối với (P), thỏa mãn.

Vậy $S=m+n=31$.

Câu 8.

Đặt $f(x;y;z)=3x-y+2z-5$, ta có $f(A)=28>0$, $f(B)=56>0$ nên A,B nằm cùng phía đối với (α).

$d(A,(\alpha))=\dfrac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}$, $d(B,(\alpha))=\dfrac{56}{\sqrt{14}}=4\sqrt{14}$.

Hình chiếu của A,B lên (α) lần lượt là $H(2;-1;-1)$, $K(-1;2;5)$. Suy ra $\overrightarrow{HK}=(-3;3;6)$, $HK=3\sqrt{6}$.

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ và lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$. Vì $\vec{u}$ song song với (α) nên $d(A',(\alpha))=2\sqrt{14}$ và hình chiếu của A' là H' với $\overrightarrow{HH'}=\vec{u}$.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (α). Ta có

$AM+BN=A'N+NB'\ge A'B'=\sqrt{(2\sqrt{14}+4\sqrt{14})^2+H'K^2}=\sqrt{504+H'K^2}$.

Mà $H'K=|\overrightarrow{HK}-\vec{u}|\ge HK-|\vec{u}|=3\sqrt{6}-\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

Do đó $AM+BN\ge\sqrt{504+24}=\sqrt{528}=4\sqrt{33}$.

thuvientoanhoc.com

Dấu bằng xảy ra: chọn $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HK}=(-1;1;2)$. Khi đó A' và B' nằm khác phía đối với (α) nên đoạn $A'B'$ cắt (α) tại N. Lấy M sao cho $\overrightarrow{MN}=\vec{u}$ thì $M\in(\alpha)$, $MN=\sqrt{6}$ và $AM+BN=4\sqrt{33}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng $4\sqrt{33}$.

Câu 9.

Ta có $\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^x}$.

Suy ra $\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1}{4x}+\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-x}\right)^2$.

Vì $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-x}>0$ trên $[1;4]$ nên $\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_1^4=1+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-4}$.

Suy ra $a=1$, $b=-1$, $c=-4$.

Vậy $T=a-b-c=1+1+4=6$.

Câu 10.

Nhánh $x>0$ của (C) nằm trên đường thẳng $\Delta:3x-4y=0$.

Vì A thuộc nhánh $x>0$ của (C) nên $y_A>0$. Nếu tâm I_1 nằm dưới Ox thì cả đường tròn (C_1) nằm trong nửa mặt phẳng $y\le 0$, mâu thuẫn. Do đó I_1 nằm phía trên Ox, và vì (C_1) có bán kính 1, tiếp xúc với tia Ox nên $I_1(a;1)$ với $a\ge 0$.

(C_1) tiếp xúc với Δ nên $\frac{|3a-4|}{5}=1$. Kết hợp $a\ge 0$ ta được $a=3$, tức $I_1(3;1)$.

(P) có dạng $y=kx^2$ và đi qua $I_1(3;1)$ nên $k=\frac{1}{9}$, tức $(P):y=\frac{x^2}{9}$.

Do tính đối xứng qua Oy ta có $I_2(-3;1)$, và hai miền phẳng cần tính đối xứng nhau qua Oy, nên có diện tích bằng nhau. Gọi S_1 là diện tích miền thứ nhất.

Cách 1.

Tam giác OAI_1 vuông tại A (bán kính vuông góc với tiếp tuyến), có $AI_1=1$ và $OA=\sqrt{OI_1^2-AI_1^2}=\sqrt{10-1}=3$.

thuvientoanhoc.com

Dây cung OI_1 nằm trên đường thẳng $y=\frac{x}{3}$. Điểm A nằm phía trên đường thẳng này vì $y_A=\frac{3}{4}x_A>\frac{1}{3}x_A$ (do $x_A>0$), còn cung I_1O của (P) nằm phía dưới vì $\frac{x^2}{9}\le\frac{x}{3}$ với $0\le x\le 3$.

Do đó miền thứ nhất gồm tam giác OAI_1 và phần giới hạn bởi dây OI_1 với (P):

$$S_1=S_{OAI_1}+\int_0^3\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{27}\right)\Big|_0^3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Cách 2.

A là hình chiếu của I_1 lên Δ. Đường thẳng qua I_1 vuông góc với Δ có phương trình $\begin{cases}x=3+3s\\y=1-4s\end{cases}$.

Thay vào Δ: $3(3+3s)-4(1-4s)=0\Leftrightarrow s=-\frac{1}{5}$, suy ra $A\left(\frac{12}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Đường thẳng AI_1 có phương trình $y=5-\frac{4}{3}x$.

Trên $\left[0;\frac{12}{5}\right]$ miền nằm giữa $y=\frac{3}{4}x$ (phía trên) và $y=\frac{x^2}{9}$ (phía dưới); trên $\left[\frac{12}{5};3\right]$ miền nằm giữa $y=5-\frac{4}{3}x$ (phía trên) và $y=\frac{x^2}{9}$ (phía dưới).

$$S_1=\int_0^{\frac{12}{5}}\left(\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{12}{5}}^3\left(5-\frac{4}{3}x-\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{\frac{12}{5}}\left(\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{27}\right)\Big|_0^{\frac{12}{5}}=\frac{54}{25}-\frac{64}{125}=\frac{206}{125}.$$

$$\int_{\frac{12}{5}}^3\left(5-\frac{4}{3}x-\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x=\left(5x-\frac{2x^2}{3}-\frac{x^3}{27}\right)\Big|_{\frac{12}{5}}^3=8-\frac{956}{125}=\frac{44}{125}.$$

Suy ra $S_1=\frac{206}{125}+\frac{44}{125}=2$.

Vậy tổng diện tích hai miền phẳng bằng $2S_1=4$.

---------- HẾT ----------

thuvientoanhoc.com