SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

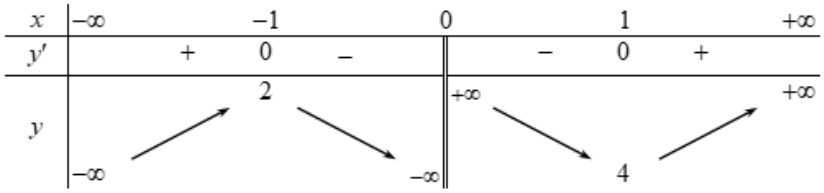
MÃ ĐỀ 1200

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 8 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát:**18/11/2026**
(Đề gồm 06 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……..

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. ***Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.***

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 2. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x+2}$ trên đoạn $[-1;7]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-7$. **D.** $S=-2$.

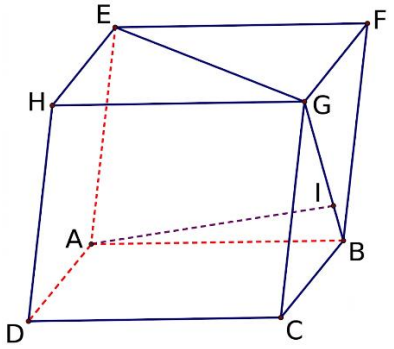
Câu 3. Cho hàm số $f(x)=mx+2+\dfrac{m^2-m-3}{x-1}$ (với m là tham số). Khi hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$ thì giá trị $f(2)$ bằng:

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G, tam giác MNP có trọng tâm là K Biết $GK=10$. Khi đó độ dài vec tơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng

A. 10. **B.** 20. **C.** 30. **D. 40.**

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BG sao cho $4BI=BG$.



thuvientoanhoc.com

Biểu thị vectơ $\vec{u}=12\overrightarrow{AI}$ qua $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ta được

A. $\vec{u}=12\vec{a}+21\vec{b}+21\vec{c}$. **B.** $\vec{u}=12\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$. **C.** $\vec{u}=12\vec{a}+6\vec{b}+3\vec{c}$. **D.** $\vec{u}=12\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$.

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Tính cosin góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{DM}$

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{-1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a}(1;1;-2),\vec{b}(-2;1;4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ là

A. $(5;-1;-10)$. **B.** $(5;1;10)$. **C.** $(5;-1;10)$. **D.** $(5;1;-10)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện trực tâm $ABCD$ (có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau). Biết $A(1;2;0),B(2;3;1),C(1;8;3)$. Giá trị nhỏ nhất của $2OD$ là

A. $11\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm A,B,C thỏa mãn $AC=4CB$ và $AB-AC=BC$. Biết rằng $A(1;3;2),B(4;0;8)$. Tổng các thành phần tọa độ của C là

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Câu 10. Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu sau:

Thời gian (giờ)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Số lượng	6	12	13	10	3

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất bao nhiêu giờ?

A. 7,2. **B.** 6,3. **C.** 5,4. **D.** 6,25.

Câu 11. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 52 **B.** 42 **C.** 53. **D.** 54.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ và $\frac{2027\pi}{2}<\alpha<\frac{2029\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. **C.** $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

Câu 13. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $T=\frac{3\pi}{4}$. **B.** $T=\frac{7\pi}{8}$. **C.** $T=\frac{21\pi}{8}$. **D.** $T=\frac{11\pi}{4}$.

Câu 14. Cho $\log_{18}2=a$. Biết $\log_{54}108=\frac{ma+n}{p-a}$ (m,n,p là các số nguyên dương). Giá trị biểu thức m^2+2n-p bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 5.

thuvientoanhoc.com

Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2^x.3^y = 5^z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{z}{x}.\frac{z}{y}$ là

A. $\log_5 16.\log_5 3$ **B.** $\log_2 125.\log_3 5$ **C.** $\log_5 2.\log_5 27$ **D.** $\log_5 2.\log_3 16$

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 8, u_5 = 17$. Công sai d bằng

A. $d = -3$. **B.** $d = 3$. **C.** $d = -5$. **D.** $d = 5$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4}, \text{ khi } x \neq -2 \\ a \qquad\qquad , \text{ khi } x = -2 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x = -2$ khi

A. $a = \frac{1}{4}$. **B.** $a = \frac{3}{4}$. **C.** $a = -\frac{3}{4}$. **D.** $a = -\frac{1}{4}$.

Câu 18. Cho một đa giác lồi có n đỉnh với $n \geq 4$. Biết rằng, số tứ giác lồi mà 4 đỉnh thuộc tập hợp các đỉnh của đa giác đã cho gấp 6 lần số đường chéo của đa giác đó. Tổng tất cả các góc của đa giác đó là

A. 1260^0. **B.** 1620^0. **C.** 1800^0. **D.** 1440^0.

Câu 19. Một đài truyền hình cần sắp xếp ngẫu nhiên 10 đoạn video quảng cáo khác nhau vào một khung giờ nghỉ giải lao chiếu liên tục. Trong 10 video này có: 4 quảng cáo Dược phẩm (thuốc, thực phẩm chức năng...), 2 quảng cáo Nước giải khát, 4 quảng cáo Đồ gia dụng. Theo quy tắc tối ưu hóa trải nghiệm người xem của đài, một lịch phát sóng được đánh giá là "đạt chuẩn" nếu không có 2 quảng cáo Dược phẩm nào phát sóng liên tiếp nhau (tránh gây nhàm chán, lo âu) và 2 quảng cáo Nước giải khát cũng không được phát sóng liên tiếp nhau (tránh cạnh tranh trực tiếp). Tính xác suất P để phần mềm trộn ngẫu nhiên tạo ra được một lịch phát sóng đạt chuẩn.

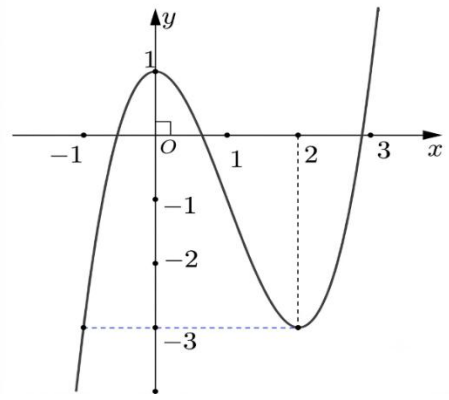
A. $P = \frac{1}{7}$. **B.** $P = \frac{1}{5}$. **C.** $P = \frac{3}{7}$. **D.** $P = \frac{2}{7}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Biết $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$, $DA = 5$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V = \frac{2\sqrt{30}}{3}$. **B.** $V = \frac{4\sqrt{30}}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $V = \frac{5\sqrt{30}}{3}$.

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) trong mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề



a) Điểm cực đại hàm số $y = f(x)$ nhỏ hơn điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

thuvientoanhoc.com

b) $8a+4b+2c-d+3=0.$

c) Có đúng hai số thực m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm nguyên.

d) Có tất cả 8 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)=-3$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.

Câu 2. Cho bất phương trình $1+\log_2(8x^4+8x^2+2)\le \log_{\sqrt{2}}(yx^2-6x+y-2)$ với y là tham số thực và $y\in(-10;10)$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề

a) Bất phương trình đã cho tương đương với $(y-4)x^2-6x+y-4\ge 0$.

b) Khi $y=4,$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}.$

c) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số *y* để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $[7;+\infty)$.

d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của y để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 3. Một công ty điện lực thực hiện khảo sát mức tiêu thụ điện năng (đơn vị: kWh/tháng) của 400 hộ gia đình tại một khu đô thị để lập kế hoạch điều chỉnh giá điện. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức tiêu thụ (kWh/tháng)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)
Số hộ gia đình	60	140	120	50	30

Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề

a) Độ dài của mỗi nhóm là 50.

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng $206,25.$

c) Tứ phân vị thứ ba thuộc nhóm $[250;300)$.

d) Biết rằng công ty dự kiến phân loại 25% số hộ gia đình có mức tiêu thụ điện thấp nhất vào nhóm tiết kiệm và 25% số hộ gia đình có mức tiêu thụ điện cao nhất vào nhóm tiêu thụ lớn. Phân khúc 50% số hộ gia đình ở mức trung bình còn lại có độ chênh lệch giữa mức tiêu thụ cao nhất và thấp nhất (làm tròn đến hàng phần mười, đơn vị kWh) là $77,4.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;4;-1);B(1;4;-1);C(2;4;3)$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề

a) Trọng tâm tam giác ABC có cao độ dương.

b) $\cos B>\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

c) Điểm K trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) sao cho K cách đều ba điểm A,B,C thì K cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng bằng 1.

d) Biết rằng có số thực k và điểm H để $HB^2+(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC})^2=k(2.\overrightarrow{HB}-k\overrightarrow{HC})\overrightarrow{HC}$. Khi đó H có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu 5. Cho tập X gồm các số tự nhiên nhỏ hơn 2027. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề

a) Có 675 cách chọn được một số chia hết cho 3.

b) Có 136 cách chọn được một số chia hết cho 3 và chia hết cho 5

c) Có 964 cách chọn được một số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5

thuvientoanhoc.com

d) Xác suất để chọn được một số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 5 là phân số tối giản $P=\frac{a}{b}(a,b>0)$. Khi đó $a+b=3108$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=4a$ và $BAD=120°$. Gọi H là trung điểm của AO. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

a) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$, khi đó $\tan\alpha=1$.

b) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSH.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $12a^3$.

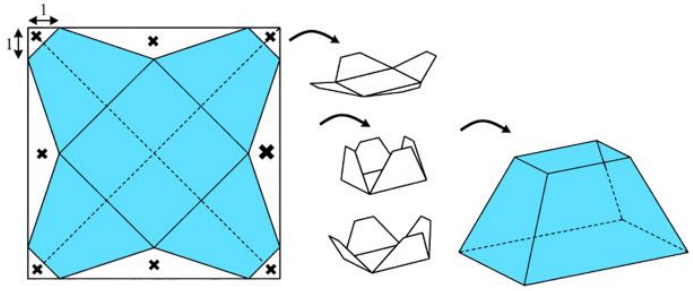
d) Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD,BC và SA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

PHẦN III. ***Câu trắc nghiệm yêu cầu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Gọi S là tập các số nguyên m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tính số phần tử của S.

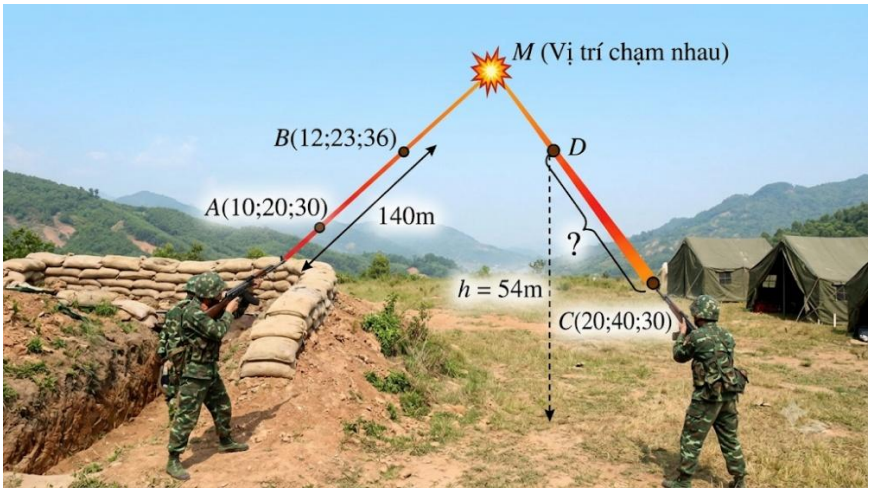
Câu 2. Bác An có một cửa hàng chuyên bán buôn cam sành. Bác nhận thấy rằng: Nếu bán mỗi kilogram cam với giá 20 nghìn đồng thì mỗi tuần có 40 đơn hàng và mỗi đơn hàng mua 20 kilogram. Nếu cứ tăng giá mỗi kilogram cam thêm 1 nghìn đồng thì hàng tuần số đơn hàng giảm đi 2 đơn, đồng thời số lượng cam mà mỗi đơn hàng đặt mua cũng giảm đi 1 kilogram. Hỏi bác An cần bán mỗi kilogram cam với giá bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận hàng tuần thu được là lớn nhất, biết giá nhập mỗi kilogram cam là 16 nghìn đồng và giá bán không vượt quá 40 nghìn đồng/kg?

Câu 3. Một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng $10cm$ (như trong hình vẽ) người ta cắt đi 8 phần được đánh dấu X, 4 phần bị cắt đi bằng nhau ở mỗi góc là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 1, bốn phần bị cắt đi còn lại là những tam giác cân và bằng nhau. Phần được giữ lại được gấp thành một hình chóp cụt đều. Tính thể tích lớn nhất của hình chóp cụt đều này (đơn vị cm^3, làm tròn đến hàng phần chục).

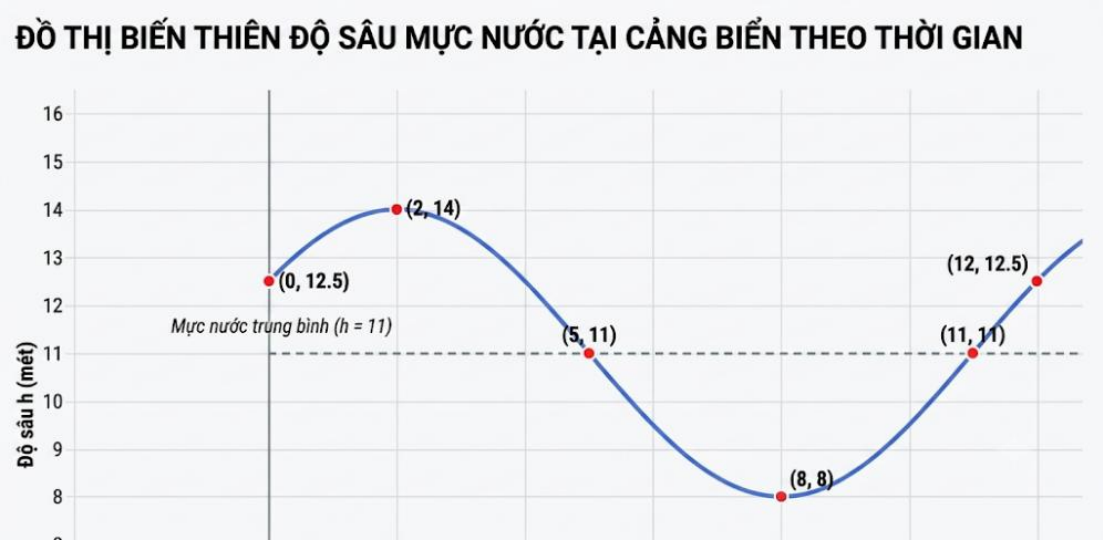


Câu 4: Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(10;20;30)$ và $B(12;23;36)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(20;40;30)$ và D (điểm D ở độ cao 54m so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm vào nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng 140m. Hỏi điểm D cách điểm C một khoảng bao nhiêu mét?

thuvientoanhoc.com



Câu 5. Tại cảng biển Nghi Sơn, độ sâu h (tính bằng mét) của mực nước biển biến thiên điều hòa theo thời gian t (tính bằng giờ, $0 \le t \le 24$) trong một ngày và được mô phỏng bởi hàm số lượng giác: $h(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \varphi\right) + B \quad (A > 0, \varphi \in [-\pi;\pi])$. Đồ thị biểu diễn sự thay đổi độ sâu $h(t)$ của mực nước tại cảng trong 12 giờ đầu tiên của ngày như sau:



Một tàu chở hàng cỡ lớn có mớn nước (phần thân tàu chìm dưới nước) là $11{,}5\,\text{m}$. Để đảm bảo an toàn tuyệt đối khi ra vào cảng, khoảng cách từ đáy tàu đến đáy biển (độ dự trữ dưới sống tàu) không được nhỏ hơn $1\,\text{m}$. Trong khoảng thời gian một ngày (từ 0 giờ đến 24 giờ), tàu chở hàng trên có thể lưu thông an toàn qua cảng trong tổng cộng bao nhiêu giờ?

Câu 6. Một nhóm có 12 học sinh trong đó có 3 học sinh lớp **A**, 4 học sinh lớp **B** và 5 học sinh lớp **C**. Giáo viên gọi ngẫu nhiên lần lượt từng học sinh lên tham gia một trò chơi cho đến khi có đủ học sinh của cả ba lớp. Tính xác suất để giáo viên phải gọi đến học sinh thứ 6 (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

----------HẾT----------

Thí sinh thực hiện nghiêm túc Quy chế thi. CBCT không giải thích gì thêm.

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

MÃ ĐỀ 1200

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LẦN 8 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: **18 /11/2026**
(Đề gồm 06 trang)

ĐÁP ÁN

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

1.B	**2.A**	**3.A**	**4.C**	**5.D**	**6.A**	**7.A**	**8.A**	**9.C**	**10.A**
11.A	**12.C**	**13.D**	**14.A**	**15.A**	**16.B**	**17.C**	**18.D**	**19.B**	**20.B**

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5	CÂU 6
a) Đúng	a) Đúng	a) Đúng	a)Đúng	a) Sai	a)Đúng
b) Sai	b) Sai	b) Đúng	b) Sai	b) Đúng	b) Sai
c) Đúng	c) Đúng	c) Sai	c) Đúng	c)Sai	c) Đúng
d) Đúng	d) Đúng	d) Đúng	d)Đúng	d) Đúng	d)Đúng

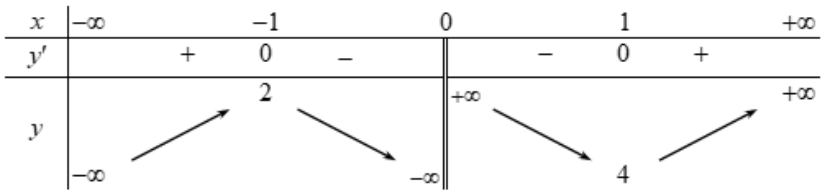
PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	6	24	39,8	26	8	0,13

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. ***Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.***

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

thuvientoanhoc.com

Câu 2. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x+2}$ trên đoạn $[-1;7]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-7$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x+2}$ liên tục trên đoạn $[-1;7]$. Ta có $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=1 \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in [-1;7]$. Tính các giá trị tại các điểm biên và điểm cực trị: $f(-1)=-1-2\sqrt{-1+2}=-3$, $f(7)=7-2\sqrt{7+2}=7-2\cdot 3=1$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất $m=-3$ và giá trị lớn nhất $M=1$. Do đó, tổng $S=2m+3M=2\cdot(-3)+3\cdot 1=-3$.

Đáp án: **A**

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx+2+\dfrac{m^2-m-3}{x-1}$ (với m là tham số). Khi hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=0$ thì giá trị $f\left(2\right)$ bằng:

D. 14. **B.** 12. **C.** 13.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f'\left(x\right)=m-\dfrac{m^2-m-3}{\left(x-1\right)^2}$; $f''\left(x\right)=\dfrac{2\left(m^2-m-3\right)}{\left(x-1\right)^3}$.

Như vậy $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow f'\left(0\right)=0 \Leftrightarrow m=m^2-m-3$

$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Thử lại:

* Với $m=-1$: $f'\left(x\right)=-1+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

thuvientoanhoc.com

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

do đó $x=0$ là điểm cực tiểu (không thỏa mãn).

* Với $m=3$: $f'(x)=3-\dfrac{3}{x-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	11	$\nearrow$	$+\infty$

do đó $x=0$ là điểm cực đại (thỏa mãn). Khi đó $f(2)=11$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G, tam giác MNP có trọng tâm là K Biết $GK=10$. Khi đó độ dài vec tơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng

A. 10. **B.** 20. **C.** 30. **D. 40.**

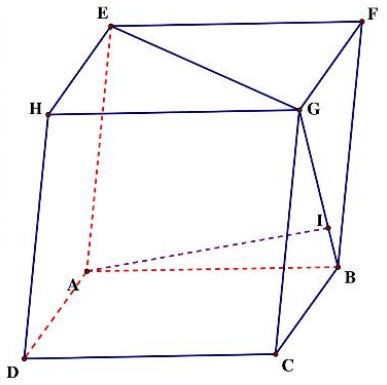
Lời giải

Đáp án C.

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KM})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KN})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KP})$

$(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+3\overrightarrow{GK}+(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{PK})=3\overrightarrow{GK}$. **Suy ra** $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}|=3|\overrightarrow{GK}|=3GK=30.$

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AE}=\vec{c}.$ Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BG sao cho $4BI=BG$.



Biểu thị vectơ $\vec{u}=12\overrightarrow{AI}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được

A. $\vec{u}=12\vec{a}+21\vec{b}+21\vec{c}$. **B.** $\vec{u}=12\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$.

thuvientoanhoc.com

C. $\vec{u}=12\vec{a}+6\vec{b}+3\vec{c}$. **D.** $\vec{u}=12\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D

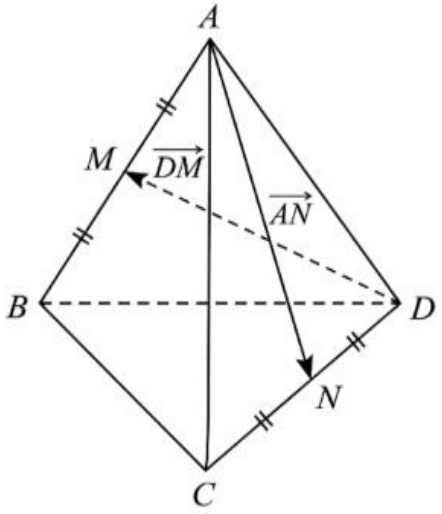
$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$ (theo giả thiết $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$) $=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$ (vì $BCGF$ là hình bình hành) $=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ (vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp)$=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\Rightarrow\vec{u}=12\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$.

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Tính cosin góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{DM}$

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{-1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Lời giải

Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a $(a>0)$.

Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{DM}$ được xác định bởi công thức: $\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DM}\right|}$

AN là đường trung tuyến của tam giác đều ACD cạnh a: $AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AN}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

DM là đường trung tuyến của tam giác đều ABD cạnh a: $DM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{DM}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ làm các vectơ cơ sở. Do $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên ta có:

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=a$. Các góc giữa từng cặp vectơ cơ sở đều bằng 60°

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$. Vì N là trung điểm của CD: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

Vì M là trung điểm của AB: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

thuvientoanhoc.com

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right]=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}^2\right)$

Thay các giá trị tích vô hướng và độ dài vào:

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}-2\left(\frac{a^2}{2}\right)+\frac{a^2}{2}-2a^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2}-2a^2\right)=\frac{1}{4}\left(-2a^2\right)=-\frac{a^2}{2}$

$\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{4}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$

Kết luận

Côsin của góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là $-\frac{2}{3}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a}(1;1;-2),\vec{b}(-2;1;4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ là

A. $(5;-1;-10)$. **B.** $(5;1;10)$. **C.** $(5;-1;10)$. **D.** $(5;1;-10)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện trực tâm $ABCD$ (có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau). Biết $A(1;2;0),B(2;3;1),C(1;8;3)$. Giá trị nhỏ nhất của $2OD$ là

A. $11\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A

Với $A(1;2;0),B(2;3;1),C(1;8;3)$, ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(0;6;3)$. Gọi tọa độ điểm D là $(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{CD}=$ (x-1; y-8; z-3), $\overrightarrow{BD}=$ (x-2; y-3; z-1)

Từ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0:\ 1(x-1)+1(y-8)+1(z-3)=0$ suy ra $x+y+z=12$ (1)

Từ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0:\ 0(x-2)+6(y-3)+3(z-1)=0\Leftrightarrow 6y-18+3z-3=0$

$6y+3z=21\Leftrightarrow 2y+z=7\Leftrightarrow z=7-2y$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $x+y+(7-2y)=12$, $x-y+7=12\Leftrightarrow x=y+5$

Vậy tọa độ điểm D có dạng: $D(y+5;y;7-2y)$ *.(Lưu ý: Để A, B, C, D tạo thành tứ diện thì D không thuộc mặt phẳng (ABC), giải ra ta được điều kiện $y\neq 2$).*

Khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đến điểm D được tính bằng:

$OD^2=x^2+y^2+z^2=(y+5)^2+y^2+(7-2y)^2=(y^2+10y+25)+y^2+(4y^2-28y+49)$

thuvientoanhoc.com

$OD^2 = 6y^2 - 18y + 74$. Xét hàm số $f(y) = 6y^2 - 18y + 74$. Đây là một parabol bề lõm hướng lên trên, đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh: $y = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2\cdot 6} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn 2) thay y = 3/2 vào hàm số:

$$OD^2_{min} = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{2}\right) + 74 = 6\cdot\frac{9}{4} - 27 + 74 = \frac{27}{2} + 47 = \frac{121}{2}$$

Suy ra $OD_{min} = \sqrt{\frac{121}{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của 2OD là: $2\cdot OD_{min} = 2\cdot\frac{11\sqrt{2}}{2} = 11\sqrt{2}$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm A, B, C thỏa mãn $AC = 4CB$ và $AB - AC = BC$. Biết rằng $A(1;3;2), B(4;0;8)$. Tổng các thành phần tọa độ của C là

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C.

Theo đề bài, ta có 2 điều kiện về độ dài các đoạn thẳng:

(1) $AC = 4CB$ (hay $AC = 4BC$)

(2) $AC - AB = BC \Leftrightarrow AC = AB + BC$

Từ điều kiện (2), theo bất đẳng thức tam giác, đẳng thức $AC = AB + BC$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm *A, B, C* thẳng hàng và **điểm** B **nằm giữa hai điểm** A **và** C.

2. Thiết lập mối quan hệ vectơ: Thế điều kiện (1) vào điều kiện (2), ta được:

$4BC = AB + BC \Leftrightarrow AB = 3BC$. Vì B nằm giữa A và C nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Kết hợp với tỉ lệ độ dài ở trên, ta có đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$

3. Tính tọa độ điểm C: Biết tọa độ $A(1;3;2)$ và $B(4;0;8)$, ta tính được

$\overrightarrow{AB} = (4-1;0-3;8-2) = (3;-3;6)$. Gọi tọa độ của điểm C là $(x;y;z)$, ta có

$\overrightarrow{BC} = (x-4;y-0;z-8) = (x-4;y;z-8)$. Thay vào đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$, ta có hệ phương trình:

$3 = 3(x-4) \Rightarrow x-4 = 1 \Rightarrow x = 5$; $-3 = 3y \Rightarrow y = -1$; $6 = 3(z-8) \Rightarrow z-8 = 2 \Rightarrow z = 10$

Vậy tọa độ điểm C là $C(5;-1;10)$. Tổng các thành phần tọa độ của điểm C là:
$x + y + z = 5 + (-1) + 10 = 14$

Đối chiếu với các đáp án, ta chọn **A. 14**.

Câu 10. Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu sau:

Thời gian (giờ)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Số lượng	6	12	13	10	3

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất bao nhiêu giờ?

A. 7,2. **B.** 6,3. **C.** 5,4. **D.** 6,25.

thuvientoanhoc.com

Lời giải

Chọn A

Cỡ mẫu là $n = 6+12+13+10+3 = 44$.

Tứ phân vị thứ hai Q_2 là giá trị của $\frac{x_{22}+x_{23}}{2}$ thuộc nhóm $[6;7)$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là giá trị của $\frac{x_{11}+x_{12}}{2}$ thuộc nhóm $[5;6)$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là giá trị của $\frac{x_{33}+x_{34}}{2}$ thuộc nhóm $[7;8)$.

Do $x_{33}; x_{34}$ thuộc nhóm $[7;8)$ nên nhóm này chứa Q_3.

Do đó, $p = 4; a_4 = 7; m_4 = 10; m_1+m_2+m_3 = 6+12+13 = 31; a_5 - a_4 = 1$ và ta có

$$Q_3 = a_4 + \frac{\frac{132}{4} - (m_1+m_2+m_3)}{m_4}.(a_5 - a_4) = 7 + \frac{33-31}{10}.1 = 7,2.$$

Vậy tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 7,2$ nên 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất là $7,2$ giờ.

Câu 11. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 52 **B.** 42 **C.** 53. **D.** 54.

Lời giải

Chọn A

Tần số lớn nhất là 12 nên nhóm chứa mốt là $[40;60)$.

Ta có $j = 3,\ a_3 = 40,\ m_3 = 12,\ m_2 = 9,\ m_4 = 10,\ h = 20$

Do đó $M_0 = a_3 + \frac{m_3 - m_2}{(m_3 - m_2)+(m_3 - m_4)}.h = 40 + \frac{12-9}{(12-9)+(12-10)}.20 = 52$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\frac{5}{12}$ và $\frac{2027\pi}{2} < \alpha < \frac{2029\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. **C.** $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hệ thức cơ bản: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{169}{144} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169}$

Xét điều kiện của góc α: $\frac{2027\pi}{2} < \alpha < \frac{2029\pi}{2} \Leftrightarrow 1013,5\pi < \alpha < 1014,5\pi$

thuvientoanhoc.com

$\Leftrightarrow 1012\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<1012\pi+\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+506\cdot 2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}+506\cdot 2\pi$. Vì $\tan\alpha=-\frac{5}{12}<0$, nên điểm biểu diễn của góc α bắt buộc phải nằm ở góc phần tư thứ IV. Tại góc phần tư thứ IV, ta có $\cos\alpha>0$. Do đó: $\cos\alpha=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$. Lại có: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow \sin\alpha=\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}$

Câu 13. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $T=\frac{3\pi}{4}$. **B.** $T=\frac{7\pi}{8}$. **C.** $T=\frac{21\pi}{8}$. **D.** $T=\frac{11\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $0<x<2\pi\longrightarrow 0<-\frac{\pi}{8}+k\pi<2\pi\Leftrightarrow \frac{1}{8}<k<\frac{17}{8}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=1\rightarrow x=\frac{7\pi}{8}\\ k=2\rightarrow x=\frac{15\pi}{8}\end{array}\right.$.

$\longrightarrow T=\frac{7\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=\frac{11}{4}\pi$.

Câu 14. Cho $\log_{18}2=a$. Biết $\log_{54}108=\frac{ma+n}{p-a}$ (m,n,p là các số nguyên dương). Giá trị biểu thức m^2+2n-p bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a=\log_{18}2=\frac{\log_3 2}{\log_3 18}=\frac{\log_3 2}{\log_3(3^2\cdot 2)}=\frac{\log_3 2}{2+\log_3 2}$.

Suy ra $a(2+\log_3 2)=\log_3 2\Leftrightarrow 2a+a\log_3 2=\log_3 2\Leftrightarrow \log_3 2(1-a)=2a\Leftrightarrow \log_3 2=\frac{2a}{1-a}$.

Biến đổi biểu thức cần tính: $\log_{54}108=\frac{\log_3 108}{\log_3 54}=\frac{\log_3(3^3\cdot 2^2)}{\log_3(3^3\cdot 2)}=\frac{3+2\log_3 2}{3+\log_3 2}$.

Thay $\log_3 2=\frac{2a}{1-a}$ vào biểu thức, ta được: $\log_{54}108=\frac{3+2\cdot\frac{2a}{1-a}}{3+\frac{2a}{1-a}}=\frac{\frac{3(1-a)+4a}{1-a}}{\frac{3(1-a)+2a}{1-a}}=\frac{a+3}{3-a}$.

thuvientoanhoc.com

Do đó $\begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ p=3 \end{cases}$. Suy ra $m^2+2n-p=1^2+2\cdot 3-3=4.$

Đáp án: **A**

Câu 15. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $2^x.3^y=5^z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{z}{x}.\frac{z}{y}$ là

A. $\log_5 16.\log_5 3$ **B.** $\log_2 125.\log_3 5$ **C.** $\log_5 2.\log_5 27$ **D.** $\log_5 2.\log_3 16$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $x\ln 2+y\ln 3=z\ln 5\Rightarrow (x\ln 2+y\ln 3)^2=z^2\ln^2 5$

$\Rightarrow z^2\ln^2 5\geq 4xy\ln 2.\ln 3\Rightarrow \frac{z}{x}.\frac{z}{y}\geq 4\log_5 2.\log_5 3=\log_5 16.\log_5 3$. Dấu bằng khi $x\ln 2=y\ln 3=z\frac{\ln 5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\log_5 16.\log_5 3$.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=8,u_5=17$. Công sai d bằng

A. $d=-3$. **B.** $d=3$. **C.** $d=-5$. **D.** $d=5$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có: $u_2=8,u_5=17\Rightarrow \begin{cases} u_1+d=8 \\ u_1+4d=17 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ u_1=5 \end{cases}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{-x^2-x+2}{x^2-4}, \text{ khi } x\neq -2 \\ a \qquad\qquad , \text{ khi } x=-2 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=-2$ khi

A. $a=\frac{1}{4}$. **B.** $a=\frac{3}{4}$. **C.** $a=-\frac{3}{4}$. **D.** $a=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{-x^2-x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{-(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{x-2}=-\frac{3}{4}$ và $f(-2)=a$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x=-2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)\Leftrightarrow a=-\frac{3}{4}$

Câu 18. Cho một đa giác lồi có n đỉnh với $n\geq 4$. Biết rằng, số tứ giác lồi mà 4 đỉnh thuộc tập hợp các đỉnh của đa giác đã cho gấp 6 lần số đường chéo của đa giác đó. Tổng tất cả các góc của đa giác đó là

A. 1260^0. **B.** 1620^0. **C.** 1800^0. **D.** 1440^0.

Lời giải

Chọn D

thuvientoanhoc.com

Số tứ giác lồi mà 4 đỉnh thuộc tập hợp các đỉnh của đa giác đã cho là $C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

Số đường chéo của đa giác đã cho là $C_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Theo giả thiết ta có $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 6\dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$

Giải được $n = 10$. Tổng các góc của đa giác là $(n-2).180^0 = 1440^0$. Chọn **A**

Câu 19. Một đài truyền hình cần sắp xếp ngẫu nhiên 10 đoạn video quảng cáo khác nhau vào một khung giờ nghỉ giải lao chiếu liên tục. Trong 10 video này có: 4 quảng cáo Dược phẩm (thuốc, thực phẩm chức năng...), 2 quảng cáo Nước giải khát, 4 quảng cáo Đồ gia dụng. Theo quy tắc tối ưu hóa trải nghiệm người xem của đài, một lịch phát sóng được đánh giá là "đạt chuẩn" nếu không có 2 quảng cáo Dược phẩm nào phát sóng liên tiếp nhau (tránh gây nhàm chán, lo âu) và 2 quảng cáo Nước giải khát cũng không được phát sóng liên tiếp nhau (tránh cạnh tranh trực tiếp). Tính xác suất P để phần mềm trộn ngẫu nhiên tạo ra được một lịch phát sóng đạt chuẩn.

A. $P = \dfrac{1}{5}$. **B.** $P = \dfrac{1}{7}$. **C.** $P = \dfrac{3}{7}$. **D.** $P = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

1. Tính không gian mẫu ($n(\Omega)$): Sắp xếp ngẫu nhiên 10 video quảng cáo (phân biệt) thành một chuỗi phát sóng liên tiếp. Tổng số cách sắp xếp là:

$n(\Omega) = 10! = 3.628.800$ cách

Trường hợp 1: 2 quảng cáo Nước giải khát được tách nhau sẵn bởi các quảng cáo Đồ gia dụng.

Xếp thứ tự 4 quảng cáo Đồ gia dụng $\Rightarrow$ Có $4! = 24$ cách. 4 quảng cáo Đồ gia dụng tạo ra 5 khoảng trống xen kẽ. Chọn 2 khoảng trống để đặt 2 quảng cáo Nước giải khát vào $\rightarrow$ Có $A_5^2 = 20$ cách.

Lúc này chuỗi phát sóng đã có 6 video (4 Gia dụng, 2 Nước giải khát) đứng rời nhau. 6 video này tạo ra 7 khoảng trống. Để chèn 4 quảng cáo Dược phẩm vào mà không bị trùng lặp sát nhau, ta xếp chúng vào 4 trong 7 khoảng trống này $\rightarrow$ Có $A_7^4 = 840$ cách. Số cách xếp của TH1: $24 \times 20 \times 840 = 403.200$ cách .

Trường hợp 2: 2 quảng cáo Nước giải khát xếp sát nhau, nhưng được hệ thống sửa lỗi bằng cách chèn ĐÚNG 1 quảng cáo Dược phẩm vào giữa.
Coi 2 quảng cáo Nước giải khát là 1 "khối" liên tiếp. (Có $2! = 2$ cách hoán vị 2 video này trong khối).

Xếp "khối" Nước giải khát này cùng 4 video Đồ gia dụng (tổng 5 đối tượng) $\rightarrow$ Có $5! = 120$ cách. Ở giữa 2 video Nước giải khát đang dính liền có 1 vị trí ranh giới. Bắt buộc phải chọn 1 quảng cáo Dược phẩm chèn vào đúng vị trí này để tách chúng ra $\rightarrow$ Có $C_4^1 = 4$ cách chọn. Xung quanh 6 video (4 Gia dụng, 2 Nước giải khát) tạo ra 6 khoảng trống bên ngoài (không tính khe ranh giới đã chèn ở trên). Ta xếp 3 quảng cáo Dược phẩm còn lại vào 6 khoảng trống này $\rightarrow$ Có $A_6^3 = 120$ cách.

Số cách xếp của TH2: $2 \times 120 \times 4 \times 120 = 115.200$ cách .

Tổng số cách xếp lịch phát sóng đạt chuẩn là: $n(X) = 403.200 + 115.200 = 518.400$ cách

thuvientoanhoc.com

Xác suất để hệ thống tự động tạo ra lịch phát sóng đạt chuẩn là: $P(X)=\dfrac{n(X)}{n(\Omega)}=\dfrac{518.400}{3.628.800}=\dfrac{1}{7}$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Biết $AB=2$, $BC=3$, $CD=4$, $DA=5$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{30}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{5\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tính diện tích đáy $ABCD$

Cách 1: Sử dụng định lý hàm số cosin Gọi α là góc $\hat{B}$ của tứ giác nội tiếp $S.ABCD$. Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\hat{D}=180^\circ-\alpha$. Kẻ đường chéo AC. Áp dụng định lý cosin cho hai tam giác ABC và ADC. Xét ΔABC: $AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos B$

$\Rightarrow AC^2=2^2+3^2-2.2.3.\cos\alpha=13-12\cos\alpha$ (1). Xét $\Delta ADC: AC^2=AD^2+CD^2-2.AD.CD.\cos D$

$\Rightarrow AC^2=5^2+4^2-2.5.4.\cos(180^\circ-\alpha)$ Mà $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, nên: $\Rightarrow AC^2=41+40\cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $13-12\cos\alpha=41+40\cos\alpha\Rightarrow 52\cos\alpha=-28\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{7}{13}$

Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ và $\alpha\in(0^\circ,180^\circ)$ nên $\sin\alpha>0$:

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{7}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{49}{169}}=\sqrt{\dfrac{120}{169}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{13}$. Diện tích tứ giác $ABCD$ là:

$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=\dfrac{1}{2}AB.BC.\sin B+\dfrac{1}{2}AD.CD.\sin D$ Vì $\sin D=\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, ta có:

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.2.3.\dfrac{2\sqrt{30}}{13}+\dfrac{1}{2}.5.4.\dfrac{2\sqrt{30}}{13}=\dfrac{6\sqrt{30}}{13}+\dfrac{20\sqrt{30}}{13}=\dfrac{26\sqrt{30}}{13}=2\sqrt{30}$

Cách 2: Sử dụng công thức: Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, áp dụng công thức Brahmagupta. Nửa chu vi p của tứ giác là: $p=\dfrac{AB+BC+CD+DA}{2}=\dfrac{2+3+4+5}{2}=7$

Diện tích đáy S_{ABCD} là: $S_{ABCD}=\sqrt{(p-AB)(p-BC)(p-CD)(p-DA)}$

$S_{ABCD}=\sqrt{(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)}=\sqrt{5\times4\times3\times2}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$

- Tính thể tích khối chóp

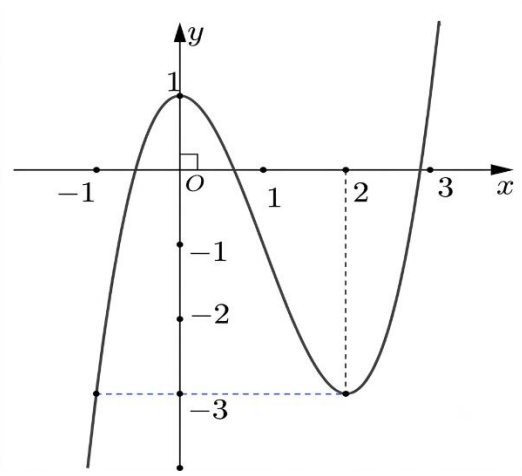
Vì $SA\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng đáy là AB. Do đó, góc giữa SB và đáy chính là góc $SBA=45^\circ$. Xét tam giác vuông SAB vuông tại A: $SA=AB.\tan(45^\circ)=2\times1=2$

Thể tích $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA$ $V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{30}\times2=\dfrac{4\sqrt{30}}{3}$. Vậy Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{4\sqrt{30}}{3}$ (đvtt).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

thuvientoanhoc.com

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0$ và $x=2$.



a) Điểm cực đại hàm số $y=f(x)$ nhỏ hơn điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

b) $8a+4b+2c-d+3=0.$

c) Có đúng hai số thực m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm nguyên.

d) Có tất cả 8 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)=-3$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	**S**	**Đ**	**Đ**

a) Đúng. Xét phát biểu a): Điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là hoành độ điểm cực đại: $x_{CĐ}=0.$

Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là hoành độ điểm cực tiểu: $x_{CT}=2.$ Vì $0<2$ nên điểm cực đại của hàm số nhỏ hơn điểm cực tiểu của hàm số $\Rightarrow$ Phát biểu a) ĐÚNG.

b) Sai. Xét phát biểu b): Ta có đạo hàm: $f'(x)=3ax^2+2bx+c.$ Đồ thị có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên $f'(0)=0\Leftrightarrow c=0.$ Đồ thị đi qua điểm cực đại $(0;1)\Rightarrow f(0)=d=1.$ { - Đồ thị đi qua điểm cực tiểu $(2;-3)\Rightarrow f(2)=8a+4b+2c+d=-3\Leftrightarrow 8a+4b+1=-3\Leftrightarrow 8a+4b=-4.$ Lại có $f'(2)=0\Leftrightarrow 12a+4b=0\Rightarrow b=-3a.$ Thay $b=-3a$ vào $8a+4b=-4$, ta được: $8a+4(-3a)=-4\Leftrightarrow -4a=-4\Leftrightarrow a=1.$ Suy ra $b=-3.$ Vậy hàm số là $f(x)=x^3-3x^2+1.$

Thay bộ hệ số $a=1,b=-3,c=0,d=1$ vào biểu thức ta có:

$$8a+4b+2c-d+3=8(1)+4(-3)+2(0)-1+3=8-12+0-1+3=-2\neq 0.$$

Phát biểu **b) sai.**

c) Đúng. Xét phát biểu c):

Từ đồ thị suy ra điều kiện cần để phương trình có hai nghiệm thực là $m\in[-3;1]$

thuvientoanhoc.com

Thử trực tiếp các giá trị m ta được $m-3; m=1$. Vậy **c) Đúng.**

d) Đúng. Xét phát biểu d): Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=-3$ tiếp xúc và cắt đồ thị tại hai hoành độ $u=2$ và $u=-1$. Do đó: $f(u)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \end{array}\right.$

Đặt $u=x^3-3x^2+m$, ta được hệ: $\left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+m=-1 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^3+3x^2-1 \quad (1) \\ m=-x^3+3x^2+2 \quad (2) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x^2$ trên đoạn $[-1;2]$: $g'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \in [-1;2] \\ x=2 \in [-1;2] \end{array}\right.$

Giá trị tại các đầu mút và cực trị: $g(-1)=4, g(0)=0, g(2)=4$. Suy ra tập giá trị của $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $[0;4]$. Khi đó

+ Phương trình (1) có nghiệm $x \in [-1;2] \Leftrightarrow m \in [0-1;4-1]=[-1;3]$.

+ Phương trình (2) có nghiệm $x \in [-1;2] \Leftrightarrow m \in [0+2;4+2]=[2;6]$.

- Phương trình ban đầu có nghiệm $x \in [-1;2]$ khi và chỉ khi: $m \in [-1;3] \cup [2;6]=[-1;6]$.

- Các giá trị nguyên của m là $m \in \{-1;0;1;2;3;4;5;6\}$, gồm tất cả 8 giá trị.

$\Rightarrow$ Phát biểu **d) đúng**

Câu 2. Cho bất phương trình $1+\log_2(8x^4+8x^2+2) \le \log_{\sqrt{2}}(yx^2-6x+y-2)$ với y là tham số thực và $y \in (-10;10)$.

a) Bất phương trình đã cho tương đương với $(y-4)x^2-6x+y-4 \ge 0$.

b) Khi $y=4$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số y để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là $[7;+\infty)$.

d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của y để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	**S**	**Đ**	**Đ**

Bất phương trình tương đương với $2+\log_{\sqrt{2}}(2x^2+1) \le \log_{\sqrt{2}}(yx^2-6x+y-2)$

a) Đúng vì $2+\log_{\sqrt{2}}(2x^2+1)=\log_{\sqrt{2}}(2)+\log_{\sqrt{2}}(2x^2+1)=\log_{\sqrt{2}}(4x^2+2)$. Do cơ số $\sqrt{2}>1$, bất phương trình tương đương $4x^2+2 \le yx^2-6x+y-2 \Leftrightarrow (y-4)x^2-6x+y-4 \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Sai vì khi $y=4$, bất phương trình trở thành $-6x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$, không nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng vì bất phương trình $(y-4)x^2-6x+y-4 \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y-4>0$ và $\Delta'=(-3)^2-(y-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow 9-(y-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow (y-4)^2 \ge 9 \Leftrightarrow y-4 \ge 3 \Leftrightarrow y \ge 7$. Do đó tập tất cả các giá trị thỏa mãn là $[7;+\infty)$.

thuvientoanhoc.com

d) Đúng vì $y \in (-10;10)$ kết hợp với $y \geq 7$ suy ra $y \in \{7;8;9\}$, nghĩa là có đúng 3 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 3. Một công ty điện lực thực hiện khảo sát mức tiêu thụ điện năng (đơn vị: kWh/tháng) của 400 hộ gia đình tại một khu đô thị để lập kế hoạch điều chỉnh giá điện. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức tiêu thụ (kWh/tháng)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)
Số hộ gia đình	60	140	120	50	30

a) Độ dài của mỗi nhóm là 50.

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 206,25.

c) Tứ phân vị thứ ba thuộc nhóm [250;300).

d) Biết rằng công ty dự kiến phân loại 25% số hộ gia đình có mức tiêu thụ điện thấp nhất vào nhóm tiết kiệm và 25% số hộ gia đình có mức tiêu thụ điện cao nhất vào nhóm tiêu thụ lớn. Phân khúc 50% số hộ gia đình ở mức trung bình còn lại có độ chênh lệch giữa mức tiêu thụ cao nhất và thấp nhất (đúng đến hàng phần mười, đơn vị kWh) là 77,4.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	**Đ**	**S**	**Đ**

a) Đúng vì độ dài của mỗi nhóm là $150-100=50$.

b) Đúng vì giá trị đại diện của các nhóm lần lượt là $x_1=125, x_2=175, x_3=225, x_4=275, x_5=325$. Số trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x}=\dfrac{60\cdot 125+140\cdot 175+120\cdot 225+50\cdot 275+30\cdot 325}{400}=\dfrac{82500}{400}=206,25$.

c) Sai vì tổng số hộ gia đình là $N=400$. Ta có $\dfrac{3N}{4}=300$. Tần số tích lũy của các nhóm lần lượt là $60,200,320,370,400$. Do $200<300\leq 320$ nên tứ phân vị thứ ba Q_3 thuộc nhóm [200;250).

d) Đúng vì nhóm 50% số hộ gia đình ở mức trung bình có khoảng tiêu thụ từ tứ phân vị thứ nhất Q_1 đến tứ phân vị thứ ba Q_3. Ta có $\dfrac{N}{4}=100$, do $60<100\leq 200$ nên Q_1 thuộc nhóm [150;200). Khi đó $Q_1=150+\dfrac{100-60}{140}\cdot 50=\dfrac{1150}{7}\approx 164,29$. Tương tự, $Q_3=200+\dfrac{300-200}{120}\cdot 50=\dfrac{725}{3}\approx 241,67$. Độ chênh lệch cần tìm là khoảng tứ phân vị $\Delta_Q=Q_3-Q_1\approx 241,67-164,29=77,38\approx 77,4$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;4;-1); B(1;4;-1); C(2;4;3)$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề

a) Trọng tâm tam giác ABC có cao độ dương.

b) $\cos B>\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

c) Điểm K trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) sao cho K cách đều ba điểm A, B, C thì K cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng bằng 1.

thuvientoanhoc.com

d) Biết rằng có số thực k và điểm H để $HB^2+(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC})^2=k(2.\overrightarrow{HB}-k\overrightarrow{HC})\overrightarrow{HC}$. Khi đó H có hoành độ nhỏ hơn 2.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	S	Đ	Đ

a) Trọng tâm tam giác là $G\left(\frac{5}{3};4;\frac{1}{3}\right)$. Vậy **a) đúng**

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;0;0);\overrightarrow{AC}=(0;0;4)$. Nhận thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$. Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại A. Do tam giác ABC là tam giác vuông tại A. Nên $\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$. Khi đó $\cos B<\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Vậy **b) sai.**

c) Gọi $K(x_K;y_K;z_K)$.

Do $K\in(Oxz)\Rightarrow K(x_K;0;z_K)$. K cách đều ba điểm A, B, C, nên:

$$\begin{cases}AK=BK\\AK=CK\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AK^2=BK^2\\AK^2=CK^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_K-2)^2+16+(z_K+1)^2=(x_K-1)^2+16+(z_K+1)^2\\(x_K-2)^2+16+(z_K+1)^2=(x_K-2)^2+16+(z_K-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=\frac{3}{2}\\z_K=1\end{cases}$$

Vậy $K\left(\frac{3}{2};0;1\right)$. K cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng bằng 1. Vậy **c) đúng.**

d) Từ đẳng thức ta có $HB^2+(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC})^2=k(2.\overrightarrow{HB}-k\overrightarrow{HC})\overrightarrow{HC}$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{HB}-k\overrightarrow{HC})^2+(\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HB}-k\overrightarrow{HC}=\vec{0}\\\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$$

Suy ra $H(x_H;y_H;z_H)$ là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;0;4),\overrightarrow{BH}=(x_H-1;y_H-4;z_H+1)$

Khi đó tồn tại số $t\neq0$, sao cho $\overrightarrow{BH}=t\cdot\overrightarrow{BC}$

Suy ra: $\begin{cases}x_H-1=t\\y_H-4=0\\z_H+1=4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=t+1\\y_H=4\\z_H=4t-1\end{cases}\Rightarrow H(t+1;4;4t-1)$. Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t-1;0;4t)$.

Mà $AH\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{17}$. Vậy $H\left(\frac{18}{17};4;\frac{-13}{17}\right)$.

Khi đó H có hoành độ nhỏ hơn 2. Vậy **d) đúng.**

Câu 5. Cho tập X gồm các số tự nhiên nhỏ hơn 2027. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề

a) Có 675 cách chọn được một số chia hết cho 3.

b) Có 136 cách chọn được một số chia hết cho 3 và chia hết cho 5

c) Có 964 cách chọn được một số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5

d) Xác suất để chọn được một số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 5 là phân số tối giản $P=\frac{a}{b}(a,b>0)$. Khi đó $a+b=3108$.

thuvientoanhoc.com

Lời giải

a)	b)	c)	d)
S	**Đ**	**S**	**Đ**

Tập hợp X gồm các số tự nhiên nhỏ hơn 2027, tức là $X=\{0;1;2;...;2026\}$. Số phần tử của không gian mẫu (số cách chọn ngẫu nhiên 1 số từ X) là: $n(\Omega)=2027$.

a) Có bao nhiêu cách chọn được một số chia hết cho 3. Các số chia hết cho 3 trong X có dạng $3k$ $(k\in\mathbb{N})$. Ta có: $0\le 3k\le 2026\Leftrightarrow 0\le k\le 675,33$. Vì k là số tự nhiên nên $k\in\{0;1;2;\ldots;675\}$.
Số các số chia hết cho 3 là: $(675-0)+1=676$ số.
Vậy có 676 cách chọn. **Vậy a) sai.**

b) Có bao nhiêu cách chọn được một số chia hết cho 3 và chia hết cho 5.

Số chia hết cho cả 3 và 5 là số chia hết cho 15 (BCNN của 3 và 5). Các số này có dạng $15k(k\in\mathbb{N})$.

Ta có: $0\le 15k\le 2026\Leftrightarrow 0\le k\le 135,06$. Vì k là số tự nhiên nên $k\in\{0;1;2;\ldots;135\}$. Số các số chia hết cho 15 là: $(135-0)+1=136$ số. Vậy có 136 cách chọn. Vậy **b) đúng.**

c) Có bao nhiêu cách chọn được một số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5. Gọi A là tập các số chia hết cho $3\Rightarrow n(A)=676$ (đã tính ở câu a). Gọi B là tập các số chia hết cho 5. Các số này có dạng 5k.
$0\le 5k\le 2026\Leftrightarrow 0\le k\le 405,2\Rightarrow k\in\{0;...;405\}\Rightarrow n(B)=406$ số. Tập các số chia hết cho cả 3 và 5 (tức là $A\cap B$) có số phần tử là: $n(A\cap B)=136$ (đã tính ở câu b). Áp dụng quy tắc cộng mở rộng (nguyên lý bù trừ), số cách chọn một số chia hết cho 3 hoặc 5 là:
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=676+406-136=946$. Vậy có **946** cách chọn. Vậy **c) sai**

d) Xác suất để chọn được một số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 5. Gọi C là tập các số chia hết cho 2. Gọi D là tập các số chia hết cho $3\Rightarrow n(D)=676$. Gọi E là tập các số chia hết cho 5. Yêu cầu bài toán là tìm số phần tử của tập $(C\cup D)\setminus E$.

- Tìm số phần tử chia hết cho 2 hoặc 3 (Tập $C\cup D$)

Số chia hết cho 2 (Tập C): $0\le 2k\le 2026\Rightarrow 0\le k\le 1013\Rightarrow n(C)=1014$ số.

Số chia hết cho cả 2 và 3 (chia hết cho 6, tập $C\cap D$): $0\le 6k\le 2026\Rightarrow 0\le k\le 337\Rightarrow n(C\cap D)=338$ số.

Số các số chia hết cho 2 hoặc 3 là: $n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)=1014+676-338=1352$ số.

- Tìm số phần tử chia hết cho 2 hoặc 3, và cũng chia hết cho 5 Tức là ta cần tìm số phần tử của tập $(C\cup D)\cap E=(C\cap E)\cup(D\cap E)$.

Số chia hết cho cả 2 và 5 (chia hết cho 10, tập $C\cap E$): $0\le 10k\le 2026\Rightarrow 0\le k\le 202\Rightarrow n(C\cap E)=203$ số.

Số chia hết cho cả 3 và 5 (tập $D\cap E$): bằng 136 số (tính ở câu b))

Số chia hết cho 2, 3 và 5 (chia hết cho 30, tập $C\cap D\cap E$):
$0\le 30k\le 2026\Rightarrow 0\le k\le 67\Rightarrow n(C\cap D\cap E)=68$ số.

Số các số thuộc $(C\cup D)$ mà chia hết cho 5 là: $n((C\cap E)\cup(D\cap E))=203+136-68=271$ số.

thuvientoanhoc.com

- Tính xác suất: Số lượng các số thoả mãn yêu cầu (chia hết cho 2 hoặc 3 nhưng KHÔNG chia hết cho 5) là: $1352-271=1081$ số. Xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{1081}{2027}=\dfrac{a}{b}$. Suy ra $a+b=3108$. Vậy **d) đúng.**

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=4a$ và $BAD=120°$. Gọi H là trung điểm của AO. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

a) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$, khi đó $\tan\alpha=1$.

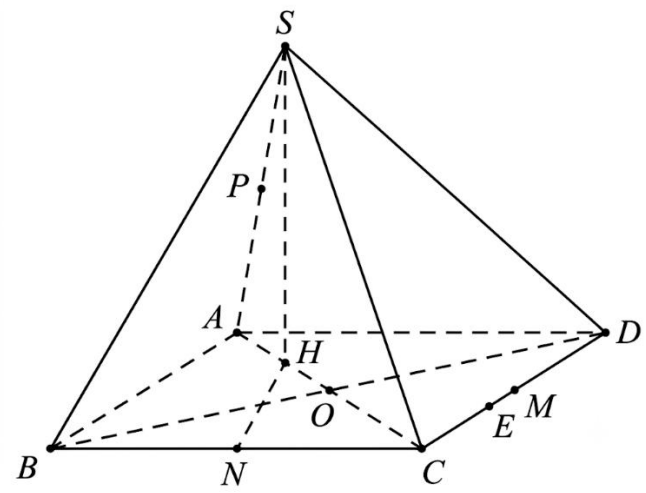
b) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSH.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $12a^3$.

d) Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD,BC và SA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	**S**	**Đ**	**Đ**



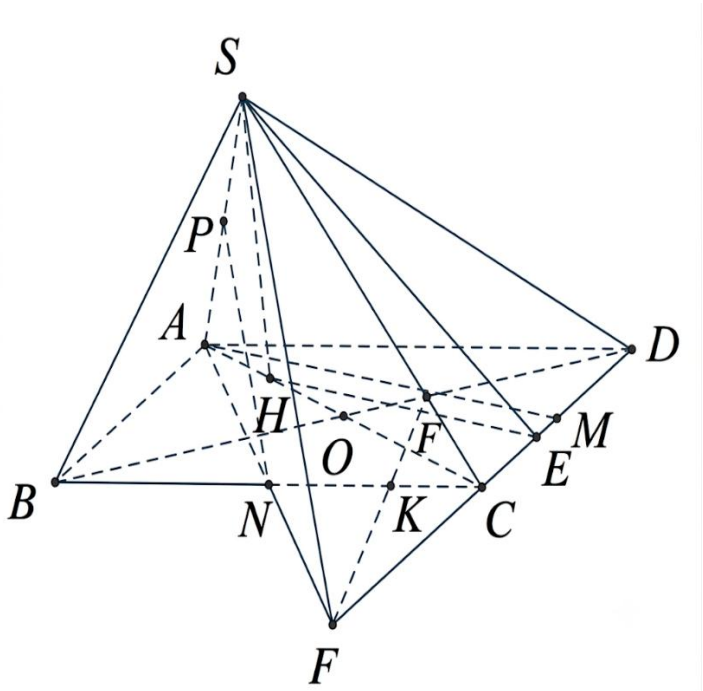
a) Đúng vì kẻ $HK\perp CD$ tại K. Do $SH\perp(ABCD)$ nên $SK\perp CD$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$ là góc $SKH=\alpha$. Ta có $d(A,CD)=AD\cdot\sin 60°=4a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2a\sqrt{3}$. Do H là trung điểm AO nên $HC=\dfrac{3}{4}AC$, suy ra $HK=d(H,CD)=\dfrac{3}{4}d(A,CD)=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\tan\alpha=\dfrac{SH}{HK}=\dfrac{\frac{3a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a\sqrt{3}}{2}}=1$.

b) Sai vì $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp BD$. Mặt khác $AC\perp BD$ nên $BD\perp(SAC)$. Do đó, hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAC) là điểm O. Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) là góc BSO, không phải BSH.

thuvientoanhoc.com

c) Đúng vì diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 120° = 4a \cdot 4a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8a^2\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot 8a^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = 12a^3$.

d) Đúng



Cách 1. Gọi K là trung điểm của SB. Xét ΔSAB, PK là đường trung bình nên $PK \parallel AB$. Mà $AB \parallel CD \Rightarrow PK \parallel CD$. Xét $\triangle SBC$, KN là đường trung bình nên $KN \parallel SC$. Từ đó suy ra mặt phẳng $(PKN) \parallel (SCD)$. Vì $PN \subset (PKN)$ và $SM \subset (SCD)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng: $d(PN, SM) = d((PKN), (SCD)) = d(P, (SCD))$. Vì P là trung điểm SA, ta có $d(P, (SCD)) = \dfrac{1}{2} d(A, (SCD))$. Hình thoi ABCD có $BAD = 120^\circ \Rightarrow ADC = 60^\circ$. Tam giác ADC cân tại D có góc 60° nên là tam giác đều cạnh $4a \Rightarrow AC = 4a$. H là trung điểm của AO nên $AH = \dfrac{1}{4} AC \Rightarrow HC = \dfrac{3}{4} AC$. Đường thẳng AH cắt (SCD) tại C, áp dụng tỉ số khoảng cách:

$d(A, (SCD)) = \dfrac{AC}{HC} d(H, (SCD)) = \dfrac{4}{3} d(H, (SCD))$ Suy ra:

$d(PN, SM) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} d(H, (SCD)) = \dfrac{2}{3} d(H, (SCD))$. Kẻ $HE \perp CD$ tại E. Do $ACD = 60^\circ$ (tam giác đều), xét ΔHEC vuông : $HE = HC \cdot \sin 60^\circ = 3a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. Nhận thấy $SH = HE = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, do đó $\triangle SHE$ vuông cân tại H. Kẻ $HF \perp SE$ tại F, ta có $HF \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HF$. Đường cao của tam giác vuông cân SHE: $HF = \dfrac{SH}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{4}$. Vậy $d(PN, SM) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc $O(0;0;0)$, tia OC thuộc trục Ox, tia OB thuộc trục Oy, tia song song với HS thuộc trục Oz. Khi đó $A(-2a;0;0)$, $C(2a;0;0)$, $B(0;2a\sqrt{3};0)$, $D(0;-2a\sqrt{3};0)$,

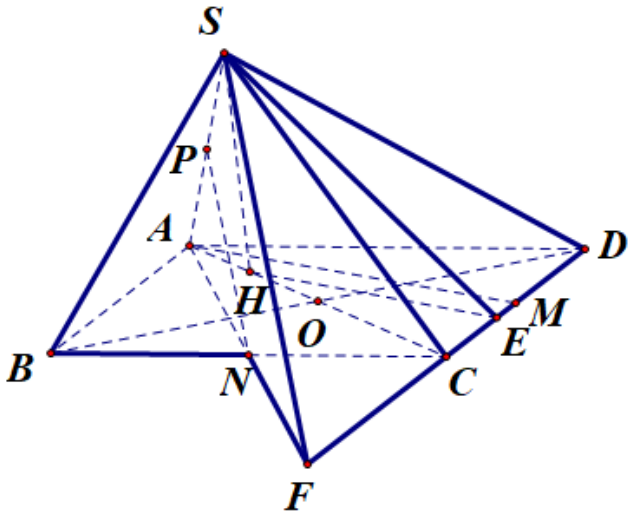
thuvientoanhoc.com

$H(-a;0;0)$, $S\left(-a;0;\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\right)$. Tọa độ các trung điểm là $M(a;-a\sqrt{3};0)$, $N(a;a\sqrt{3};0)$, $P\left(-\dfrac{3a}{2};0;\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SM}=\left(2a;-a\sqrt{3};-\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PN}=\left(\dfrac{5a}{2};a\sqrt{3};-\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SP}=\left(-\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$. Suy ra

$[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{PN}]=\left(\dfrac{27a^2}{4};-\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4};\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}\right)$ có độ dài là $\left|[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{PN}]\right|=\dfrac{9a^2\sqrt{6}}{2}$ và $|[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{PN}]\cdot\overrightarrow{SP}|=\dfrac{27a^3}{2}$.

Khoảng cách giữa PN và SM là $d(PN,SM)=\dfrac{|[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{PN}]\cdot\overrightarrow{SP}|}{\left|[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{PN}]\right|}=\dfrac{\dfrac{27a^3}{2}}{\dfrac{9a^2\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



PHẦN III. Trả lời ngắn

Câu 1. Gọi S là tập các số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tính số phần tử của S.

Lời giải

Đáp án 6.

Ta có $y'=mx^2-4mx+3m+5$.

Với $a=0\Leftrightarrow m=0\Rightarrow y'=5>0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ (2m)^2-m(3m+5)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2-5m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\leq m\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 5.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5\}$. Vậy số phần tử của S là 6.

thuvientoanhoc.com

Câu 2. Bác An có một cửa hàng chuyên bán buôn cam sành. Bác nhận thấy rằng: Nếu bán mỗi kilogram cam với giá 20 nghìn đồng thì mỗi tuần có 40 đơn hàng và mỗi đơn hàng mua 20 kilogram. Nếu cứ tăng giá mỗi kilogram cam thêm 1 nghìn đồng thì hàng tuần số đơn hàng giảm đi 2 đơn, đồng thời số lượng cam mà mỗi đơn hàng đặt mua cũng giảm đi 1 kilogram. Hỏi bác An cần bán mỗi kilogram cam với giá bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận hàng tuần thu được là lớn nhất, biết giá nhập mỗi kilogram cam là 16 nghìn đồng và giá bán không vượt quá 40 nghìn đồng/kg?

Lời giải.

Đáp án 24.

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền tăng thêm trên mỗi kilogram cam ($0 \le x \le 20$).

Khi đó: Giá bán mỗi kilogram cam là $20+x$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được trên mỗi kilogram cam là $(20+x)-16=x+4$ (nghìn đồng). Số đơn hàng trong tuần là $40-2x=2(20-x)$ (đơn).

Số lượng cam của mỗi đơn hàng là $20-x$ (kg). Tổng lợi nhuận hàng tuần bác An thu được là:

$L(x)=(x+4)\cdot 2(20-x)\cdot(20-x)=2(x+4)(20-x)^2$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $L(x)=2(x+4)(20-x)^2$ trên đoạn $[0;20]$.

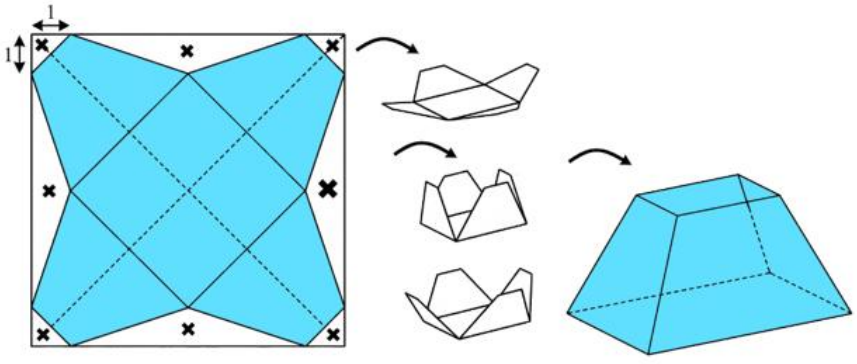
Ta có $L'(x)=2\left[(20-x)^2-2(x+4)(20-x)\right]=2(20-x)(20-x-2x-8)=6(20-x)(4-x).$

Giải phương trình $L'(x)=0$ trên đoạn $[0;20]$, ta được $x=4$ hoặc $x=20$.

Tính các giá trị: $L(0)=3200;\ L(4)=2\cdot 8\cdot 16^2=4096;\ L(20)=0.$

So sánh các giá trị, ta thấy $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=4$. Vậy giá bán mỗi kilogram cam để lợi nhuận hàng tuần thu được lớn nhất là $20+4=24$ (nghìn đồng).

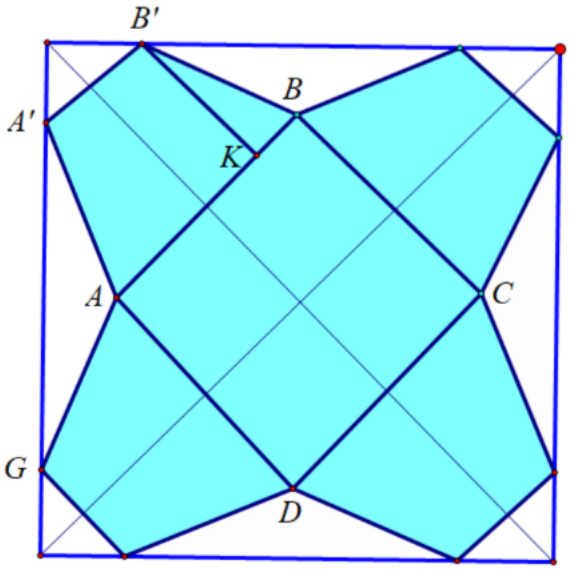
Câu 3. Một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng $10cm$ (như trong hình vẽ) người ta cắt đi 8 phần được đánh dấu X, 4 phần bị cắt đi bằng nhau ở mỗi góc là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 1, 4 phần bị cắt đi còn lại là những tam giác cân và bằng nhau. Phần được giữ lại được gấp thành một hình chóp cụt đều. Tính thể tích lớn nhất có thể của hình chóp cụt đều này (đơn vị cm^3, làm tròn đến hàng phần chục).

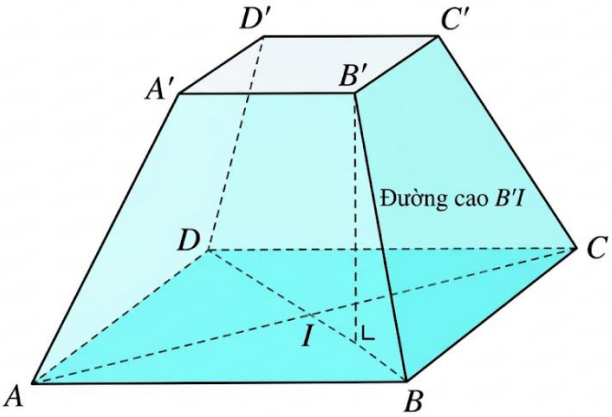


Lời giải

Đáp án 39,8.

thuvientoanhoc.com





Đặt $AB = BC = x$; $B'A' = \sqrt{2}$. Ta có $B'K = \dfrac{10\sqrt{2} - x - \sqrt{2}}{2} = \dfrac{9\sqrt{2} - x}{2}$

$BB'^2 = B'K^2 + KB^2 = \left(\dfrac{9\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x - \sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Trong hình chóp cụt: $h^2 = B'I^2 = BB'^2 - BI^2 = BB'^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{2} - 2}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{9\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x - \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{2} - 2}{2}\right)^2 = \dfrac{162 - 18\sqrt{2}x + x^2 + x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - 2x^2 + 4\sqrt{2}x - 4}{4}$

$= 40 - 4\sqrt{2}x \Rightarrow h = \sqrt{40 - 4\sqrt{2}x}$. Ta có $V_{cc} = \dfrac{1}{3}h\left(x^2 + 2 + \sqrt{2x^2}\right) = \dfrac{1}{3}\sqrt{40 - 4\sqrt{2}x} \cdot \left(x^2 + \sqrt{2}x + 2\right)$.

Đặt $f(x) = V^2 = \dfrac{4}{9}\left(10 - \sqrt{2}x\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 2\right)^2$

$f'(x) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\left(x^2 + \sqrt{2}x + 2\right)^2 + \dfrac{2 \cdot 4}{9}\left(10 - \sqrt{2}x\right) \cdot (2x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$

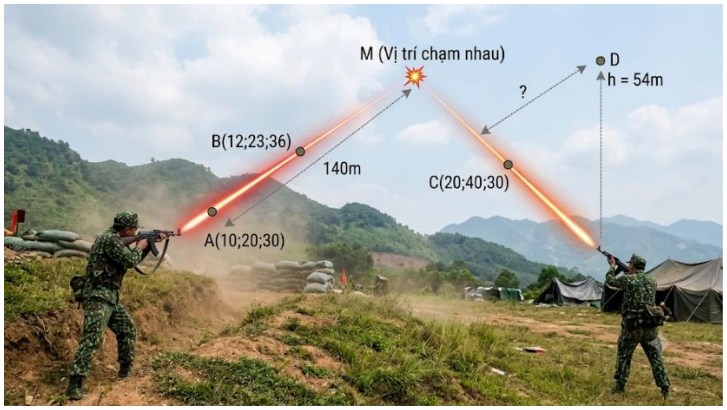
thuvientoanhoc.com

$$=\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)\left[-\frac{4\sqrt{2}}{9}x^2-\frac{8x}{9}-\frac{8\sqrt{2}}{9}+\frac{8}{9}\left(20x+10\sqrt{2}-2\sqrt{2}x^2-2x\right)\right].$$

$$=\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)\cdot\left(-\frac{20\sqrt{2}}{9}x^2+\frac{136}{9}x+8\sqrt{2}\right),\ f'(x)=0\ \Rightarrow x\approx 5,4668$$

$$\Rightarrow V_{\max}\approx 39,8\ \ cm^3$$

Câu 4: Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(10;20;30)$ và $B(12;23;36)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(20;40;30)$ và D (điểm D ở độ cao $54\,\text{m}$ so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm vào nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng $140\,\text{m}$. Hỏi điểm D cách điểm C một khoảng bao nhiêu mét?



Lời giải

Đáp án 26.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;3;6)$ suy ra độ dài $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7\,\text{m}.$

Gọi M là vị trí hai viên đạn chạm vào nhau. Vì viên đạn di chuyển từ A qua B nên véc tơ $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$. Do $AM=140\,\text{m}$, ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{140}{7}\cdot\overrightarrow{AB}=20\cdot(2;3;6)=(40;60;120).$

Suy ra tọa độ điểm M là $M(10+40;20+60;30+120)=(50;80;150).$ Viên đạn thứ hai đi qua C và M, ta có $\overrightarrow{CM}=(50-20;80-40;150-30)=(30;40;120).$ Độ dài đoạn CM là $CM=\sqrt{30^2+40^2+120^2}=130\,\text{m}.$ Điểm D thuộc đường thẳng CM và có độ cao $z_D=54\,\text{m}.$

Vì $z_C=30\,\text{m}$ và $z_M=150\,\text{m}$, tỉ số khoảng cách là: $k=\frac{z_D-z_C}{z_M-z_C}=\frac{54-30}{150-30}=\frac{24}{120}=0,2.$

Vậy khoảng cách từ D đến C là $CD=0,2\cdot CM=0,2\cdot 130=26\,\text{m}.$

Câu 5. Tại cảng biển Nghi Sơn, độ sâu h (tính bằng mét) của mực nước biển biến thiên điều hòa theo thời gian t (tính bằng giờ, $0\le t\le 24$) trong một ngày và được mô phỏng bởi hàm số lượng giác

thuvientoanhoc.com

$h(t)=A\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t+\varphi\right)+B \quad (A>0,\varphi\in[-\pi;\pi])$. Đồ thị biểu diễn sự thay đổi độ sâu $h(t)$ của mực nước tại cảng trong 12 giờ đầu tiên của ngày như sau:



Một tàu chở hàng cỡ lớn có mớn nước (phần thân tàu chìm dưới nước) là $11{,}5\,\text{m}$. Để đảm bảo an toàn tuyệt đối khi ra vào cảng, khoảng cách từ đáy tàu đến đáy biển (độ dự trữ dưới sống tàu) không được nhỏ hơn $1\,\text{m}$. Trong khoảng thời gian một ngày (từ 0 giờ đến 24 giờ), tàu chở hàng trên có thể lưu thông an toàn qua cảng trong tổng cộng bao nhiêu giờ?

Lời giải

Đáp án 8.

1. Xác định công thức hàm số $h(t)$

Từ đồ thị trên đoạn $[0;12]$, ta khai thác các thông số hình học của đường hình sin:

- Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

- Đỉnh cao nhất của đồ thị là $(2;14)\Rightarrow h_{\max}=14\,\text{m}$, đáy thấp nhất của đồ thị là $(8;8)\Rightarrow h_{\min}=8\,\text{m}$.

- Tìm biên độ A và trục cân bằng B. Ta có $A=\dfrac{h_{\max}-h_{\min}}{2}=\dfrac{14-8}{2}=3,\ B=\dfrac{h_{\max}+h_{\min}}{2}=\dfrac{14+8}{2}=11.$

- Tìm pha ban đầu φ: Tại $t=2$, hàm số đạt giá trị lớn nhất $h(2)=14$. Ta có phương trình

$3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\cdot 2+\varphi\right)+11=14$. Tương đương $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$. Suy ra: $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Do đó: $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$. Do $\varphi\in[-\pi;\pi]$, ta chọn $k=0\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

(Kiểm tra lại tại $t=0$: $h(0)=3\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+11=3\cdot\dfrac{1}{2}+11=12{,}5$ khớp hoàn toàn với đồ thị).

Vậy công thức của hàm số là: $h(t)=3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{3}\right)+11.$

2. Tính tổng thời gian tàu lưu thông an toàn trong một ngày

* Điều kiện an toàn của mực nước: Độ sâu mực nước $h(t)$ phải lớn hơn hoặc bằng tổng của mớn nước tàu và độ dự trữ an toàn: $h(t)\geq 11{,}5+1=12{,}5$ (m).

Giải bất phương trình lượng giác: $3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{3}\right)+11\geq 12{,}5\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{3}\right)\geq\dfrac{1}{2}.$

thuvientoanhoc.com

Sử dụng đường tròn lượng giác, ta có: $-\frac{\pi}{3}+k2\pi \le \frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Biến đổi tương đương: $k2\pi \le \frac{\pi}{6}t \le \frac{2\pi}{3}+k2\pi$. Ta có: $12k \le t \le 4+12k \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện trong một ngày $t\in[0;24]$

Với $k=0:\ 0\le t\le 4$ (khoảng thời gian dài 4 giờ, từ 0h đến 4h).

Với $k=1:\ 12\le t\le 16$ (khoảng thời gian dài 4 giờ, từ 12h đến 16h).

Với $k=2:\ 24\le t\le 28$, giao với $[0;24]$ chỉ tại thời điểm tức thời $t=24$ (thời lượng bằng 0).

Kết luận: Tổng thời gian tàu có thể lưu thông an toàn qua cảng trong một ngày là: $4+4=8$ (giờ).

Đáp số: 8 **giờ.**

Câu 6. Một nhóm có 12 học sinh trong đó có 3 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 5 học sinh lớp C. Giáo viên gọi ngẫu nhiên lần lượt từng học sinh lên tham gia một trò chơi cho đến khi có đủ học sinh của cả ba lớp. Tính xác suất để giáo viên phải gọi đến học sinh thứ 6 (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Đáp án 0,13.

Cách 1: Để giáo viên phải gọi đến học sinh thứ 6 mới có đủ 3 lớp, ta chia làm 3 trường hợp độc lập dựa vào học sinh được gọi ở lượt thứ 6. Áp dụng quy tắc nhân xác suất cho từng biến cố liên tiếp:

Trường hợp 1: 5 lượt đầu có đủ lớp B và C; lượt thứ 6 gọi học sinh lớp A

Xác suất 5 lượt đầu chỉ gọi trúng nhóm 9 học sinh lớp B và C (có thể toàn lớp C) là tích của các xác suất liên tiếp: $P(B\cup C)=\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{21}{132}$

Xác suất 5 lượt đầu chỉ gọi trúng nhóm 5 học sinh lớp C (cần loại đi) là: $P(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{792}$

(Không cần trừ trường hợp chỉ gọi toàn học sinh lớp B vì lớp B có 4 học sinh, không thể gọi đủ trong 5 lượt).

Xác suất 5 lượt đầu có mặt cả lớp B và lớp C là: $P_{1(5)}=\frac{21}{132}-\frac{1}{792}=\frac{125}{792}$

Đến lượt thứ 6, tổng số học sinh còn lại chưa được gọi là 7 (trong đó nguyên vẹn 3 học sinh lớp A). Xác suất gọi trúng lớp A là $\frac{3}{7}$. Theo quy tắc nhân xác suất, xác suất xảy ra Trường hợp 1 là:

$P_1=P_{1(5)}\cdot\frac{3}{7}=\frac{125}{792}\cdot\frac{3}{7}=\frac{125}{1848}$

Trường hợp 2: 5 lượt đầu có đủ lớp A và C; lượt thứ 6 gọi học sinh lớp B

Xác suất 5 lượt đầu chỉ gọi trúng nhóm 8 học sinh lớp A và C: $P(A\cup C)=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{7}{99}$

thuvientoanhoc.com

Tương tự, xác suất gọi trúng 5 học sinh lớp C (cần loại đi) là $\frac{1}{792}$.

Xác suất 5 lượt đầu có mặt cả lớp A và lớp C là: $P_{2(5)} = \frac{7}{99} - \frac{1}{792} = \frac{56}{792} - \frac{1}{792} = \frac{55}{792}$

Lượt thứ 6, còn lại 7 học sinh (có 4 học sinh lớp B). Xác suất gọi trúng lớp B là $\frac{4}{7}$.

Theo quy tắc nhân, xác suất Trường hợp 2 là: $P_2 = P_{2(5)} \cdot \frac{4}{7} = \frac{55}{792} \cdot \frac{4}{7} = \frac{55}{1386}$

Trường hợp 3: 5 lượt đầu có đủ lớp A và B; lượt thứ 6 gọi học sinh lớp C

Xác suất 5 lượt đầu chỉ gọi trúng nhóm 7 học sinh lớp A và B: $P(A \cup B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{264}$

Vì tổng số học sinh lớp A (3) và B (4) đều nhỏ hơn 5 nên không thể xảy ra trường hợp toàn A hoặc toàn B. Xác suất 5 lượt đầu có cả lớp A và B chính là $P_{3(5)} = \frac{7}{264}$.

Lượt thứ 6, còn 7 học sinh (có 5 học sinh lớp C). Xác suất gọi trúng lớp C là $\frac{5}{7}$.

Theo quy tắc nhân, xác suất Trường hợp 3 là: $P_3 = P_{3(5)} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7}{264} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{264}$

Kết luận: Theo **quy tắc cộng xác suất** cho 3 trường hợp xung khắc, xác suất cần tìm là:

$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{125}{1848} + \frac{55}{1386} + \frac{5}{264}$ hay $P = \frac{375}{5544} + \frac{220}{5544} + \frac{105}{5544} = \frac{700}{5544} = \frac{25}{198} \approx 0{,}13.$

Cách 2. Gọi biến cố cần tính xác suất là X: "Giáo viên phải gọi đến học sinh thứ 6 thì mới có đủ học sinh của cả ba lớp".

Để sự việc này xảy ra, hai điều kiện sau đây phải được thoả mãn đồng thời:

1. Trong 5 lượt gọi đầu tiên: Chỉ gọi được học sinh của **đúng 2 lớp**.
2. Ở lượt gọi thứ 6: Học sinh được gọi phải thuộc **lớp còn lại** (lớp chưa được gọi trong 5 lượt đầu) để hoàn thành đủ 3 lớp.

Do đó, ta chia bài toán làm 3 trường hợp tương ứng với lớp còn thiếu sau 5 lượt đầu tiên:

Trường hợp 1: Thiếu học sinh lớp A trong 5 lượt đầu (lượt thứ 6 gọi học sinh lớp A)

Ở 5 lượt đầu, giáo viên chỉ gọi học sinh thuộc lớp B (4 hs) và lớp C (5 hs). Số học sinh của lớp B và C là $4 + 5 = 9$ học sinh.

Đồng thời, trong 5 lượt đầu này phải có cả học sinh của lớp B và lớp C (không được chỉ toàn học sinh lớp B hoặc toàn học sinh lớp C).

Số cách chọn 5 học sinh từ nhóm B và C là: $C_9^5 = 126$cách.

Trừ đi trường hợp 5 lượt đầu chỉ chọn toàn học sinh lớp C (không có hs lớp B): $C_5^5 = 1$cách. *(Không thể có trường hợp chỉ chọn toàn học sinh lớp B vì lớp B chỉ có 4 học sinh, không đủ cho 5 lượt chọn)*. ⇒Số

thuvientoanhoc.com

cách chọn 5 học sinh ở 5 lượt đầu thoả mãn: $126-1=125$cách. Xếp thứ tự cho 5 học sinh này có: $125\times 5!=15000$cách.

Lượt thứ 6 gọi 1 học sinh lớp A (trong số 3 học sinh lớp A): $C_3^1=3$cách.

6 lượt còn lại (lượt 7 đến lượt 12) là xếp thứ tự cho 6 học sinh còn lại: $6!=720$cách.

⇒Số kết quả thuận lợi cho Trường hợp 1 là: $N_1=15000\times 3\times 720=32.400.000$

Trường hợp 2: Thiếu học sinh lớp B trong 5 lượt đầu (lượt thứ 6 gọi học sinh lớp B)

Ở 5 lượt đầu, giáo viên chỉ gọi học sinh thuộc lớp A (3 hs) và lớp C (5 hs). Số học sinh của hai lớp này là $3+5=8$ học sinh. Trong 5 lượt đầu này phải có cả học sinh của lớp A và lớp C.

Số cách chọn 5 học sinh từ nhóm A và C là: $C_8^5=56$cách.

Trừ đi trường hợp chỉ toàn chọn học sinh lớp C: $C_5^5=1$cách. *(Không thể chọn toàn học sinh lớp A vì lớp A chỉ có 3 học sinh, không đủ cho 5 lượt)*. ⇒Số cách chọn 5 học sinh thoả mãn: $56-1=55$cách. Xếp thứ tự cho 5 học sinh này: $55\times 5!=6600$cách.

Lượt thứ 6 gọi 1 học sinh lớp B (trong số 4 học sinh lớp B): $C_4^1=4$cách.

Xếp thứ tự cho 6 học sinh còn lại: $6!=720$cách.

⇒Số kết quả thuận lợi cho Trường hợp 2 là: $N_2=6600\times 4\times 720=19.008.000$

Trường hợp 3: Thiếu học sinh lớp C trong 5 lượt đầu (lượt thứ 6 gọi học sinh lớp C)

Ở 5 lượt đầu, giáo viên chỉ gọi học sinh thuộc lớp A (3 hs) và lớp B (4 hs). Số học sinh của hai lớp này là $3+4=7$học sinh.

Trong 5 lượt đầu này phải có cả học sinh của lớp A và lớp B.

Số cách chọn 5 học sinh từ nhóm A và B là: $C_7^5=21$cách. Trừ đi các trường hợp không thoả mãn:

+ Không thể chỉ toàn chọn học sinh lớp A (lớp A chỉ có 3 học sinh).

+ Không thể chỉ toàn chọn học sinh lớp B (lớp B chỉ có 4 học sinh). ⇒Tất cả 21 cách chọn đều thoả mãn luôn có cả học sinh lớp A và lớp B. Xếp thứ tự cho 5 học sinh này: $21\times 5!=2520$cách.

Lượt thứ 6 gọi 1 học sinh lớp C (trong số 5 học sinh lớp C): $C_5^1=5$cách.

Xếp thứ tự cho 6 học sinh còn lại: $6!=720$cách.

⇒Số kết quả thuận lợi cho Trường hợp 3 là: $N_3=2520\times 5\times 720=9.072.000$

Tính xác suất:

Không gian mẫu: Gọi ngẫu nhiên lần lượt cả 12 học sinh $n(\Omega)=12!=479.001.600$

Tổng số kết quả thuận lợi: $n(X)=N_1+N_2+N_3=32.400.000+19.008.000+9.072.000=60.480.000$.

Xác suất cần tìm: $P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}=\frac{60.480.000}{479.001.600}=\frac{25}{198}\approx 0{,}13$.

thuvientoanhoc.com