UBND XÃ THƯ LÂM
PHÒNG VĂN HÓA – XÃ HỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHỐI LỚP 9
NĂM HỌC 2026-2027
MÔN : TOÁN
Ngày thi: 08/11/2026
Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (6.0 điểm)

1. Giải phương trình

a) $\frac{x+1}{(x+1)^2+1}+\frac{x}{(x-1)^2+1}=\frac{2(x^3+5)}{x^4+4}$

b) $\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4$

2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ và $a^3+b^3+c^3=-8$
Tính giá trị của biểu thức P = a + b + c.

Bài 2: (4.0 điểm)

1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x-2xy\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=2x^2+4xy+y^2-x-2y+6$$
2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c^2=a^3+b^3=3ab+c$.
Chứng minh rằng: $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=a^4+b^4+c^4$
3. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x+y)^5=120y+3$

Bài 3: (2.0 điểm)

Cô Hồng gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền ban đầu là 150 (triệu đồng) với lãi suất 5% /năm, kì hạn 6 tháng, lãi kép (tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi tiếp). Hỏi để cô Hồng có số tiền ít nhất là 192 (triệu đồng) thì cô Hồng phải gửi bao nhiêu năm?

Bài 4: (6.0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AD. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC, AB. Gọi M là trung điểm của BC và N là giao điểm của AM với EF. Gọi G, K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ADB, ADC, vẽ $GH\perp BC$ tại H. Chứng minh:

a) $AE.AC=AF.AB$ và $\Delta ANE\backsim\Delta ADB$

b) $sin^3C\,.cosC=\frac{NE}{BC}$

c) ΔHKL vuông

Bài 5: (2.0 điểm)

1. Cho $a>0, b>0$ và $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=a^4+b^4+\frac{2026}{(a+b)^2}$$
2. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

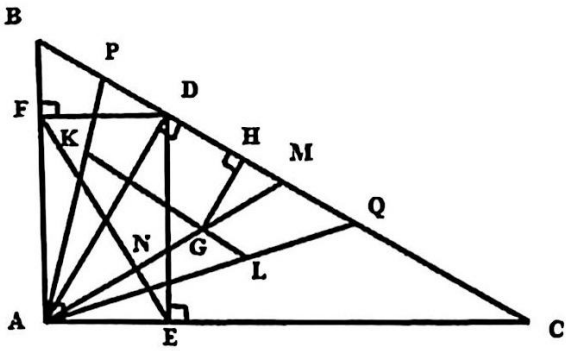
----------Hết----------

thuvientoanhoc.com

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Câu	Nội dung đáp án	Điểm
1 (6đ)	1a (2đ)	$\frac{x+1}{(x+1)^2+1}+\frac{x}{(x-1)^2+1}=\frac{2(x^3+5)}{x^4+4}$ ĐKXĐ $\in R$ $(x+1)(x^2-2x+2)+x(x^2+2x+2)=2(x^3+5)$	0,5
		$x^2+2x=8$	0,5
		$(x+4)(x-2)=0$ $x\in\{2;-4\}$	0,75
		Vậy nghiệm của PT là $x\in\{2;-4\}$	0,25
	1b (2đ)	$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4$ ĐKXĐ $x\neq\frac{4}{7};x^3\neq-2$	0,25
		$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-5+1-\frac{21x+22}{x^3+2}=0$	0,25
		$(x^3-21x-20)\left(\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}\right)=0$	0,25
		TH1: $x^3-21x-20=0$ $(x+1)((x+4)(x-5)=0$ $x\in\{-1;-4;5\}$ (TM)	0,5
		TH2: $\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}=0$ $x^3-7x+6=0$ $(x-1)(x-2)(x+3)=0$ $x\in\{1;2;-3\}$ (TM)	0,5
		Vậy nghiệm của PT là $x\in\{1;2;-3;-1;-4;5\}$	0,25
	2 (2đ)	Cho a, b, c là các số thực khác thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ *và* $a^3+b^3+c^3=-8$. *Tính GTBT* $P=a+b+c$. *Vì* $a^2+b^2+c^2=4$ *nên* $a^2,b^2,c^2<4$. *Khi đó* $-2<a,b,c<2$.	05
		Do đó $a^2(a+2)+b^2(b+2)+c^2(c+2)\geq 0$	0,5
		suy ra $a^3+b^3+c^3\geq -2(a^2+b^2+c^2)=-8$.	0,5
		Dấu=xảy ra khi $a=-2;b=c=0$ *và các hoán vị của nó.* *Vậy* $P=-2$	0,5
2 (4đ)	1 (1,5đ)	$P=2x^2+2xy+y^2-(x-2xy)-2y+6$ $P\geq 2x^2+2xy+y^2-2y+3$	0,5
		$P\geq (y+x-1)^2+(x+1)^2+1\geq 1$.	0,5
		Dấu=xảy ra khi $x=-1;y=2$.	0,25
		Vậy GTNN P = 1 khi x = -1; y = 2	0,25

thuvientoanhoc.com

	2 (1,5đ)	$c^2 = 3ab + c$ nên $c^3 = 3abc + c^2$ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = c^2$ Đặt $a+b = x$, ta có $x^3 - (c^2 - c)x = c^2$ $(x-c)(x^2 + cx + c) = 0$ $x = c$ ($vì\ x^2 + cx + c > 0\ do\ a, b, c > 0$)	0,5
		$a + b = c$ $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$ $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + c^4$ $= (c^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 + c^4 = 2c^4 - 4abc^2 + 2a^2b^2$	0,5
		$= 2c^2(c^2 - 2ab) + 2a^2b^2 \quad = 2c^2(a^2 + b^2) + 2a^2b^2$ $= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$ (đpcm)	0,5
	3 (1đ)	Vì $x, y \in N^*$ nên $(x+y)^5 = 120y + 3 < 120y + 120x = 120(x+y)$ $Suy\ ra (x+y)^4 < 120 < 121 = 11^2\ [(x+y)^2]^2 < 11^2$ $(x+y)^2 < 11 \leq 9 = 3^2$	0,5
		$2 \leq x + y \leq 3$ mà $x + y$ lẻ ($do\ 120y + 3$ lẻ) nên $x + y = 3$. Do đó $(x; y) = (1; 2)$ hoặc $(2; 1)$.	0,25
		$Thử\ lại\ chỉ\ có\ (x; y) = (1; 2)\ thích\ hợp.$ $Vậy\ x = 1; y = 2$	0,25
3 (2đ)	2đ	5%/năm = 2,5%/6 tháng, 6 tháng = 1 kì Gọi a là số tiền gửi ban đầu (150 triệu đồng), n là lãi suất (2,5%/kì), n là số kì hạn, r là lãi suất (5%/năm), T_n là số tiền cả vốn lẫn lãi có sau n kì gửi. Ta có $T_1 = a + ar = a(1+r)$ $T_2 = T_1 + T_1 r = T_1(1+r) = a(1+r)^2$ $T_3 = T_2 + T_2.r = T_2(1+r) = a(1+r)^3$ ... $T_n = a(1+r)^n$	1.0
		$Theo$ đề $bài\ ta\ có\ 150(1 + 2{,}5\%)^n \geq 192\ 1{,}025^n \geq 1{,}025^{10}$ $n \geq 10$ Vậy cô Hồng phải gửi 10 kì tức 5 năm thì được số tiền ít nhất là 192 (triệu đồng)	1,0
4 (6đ)			
	1 (2,5đ)	C/m được $AE.AC = AD^2$	0,5
		C/m $AF.AB = AD^2$	0,25
		C/m $AE.AC = AF.AB$	0,25

thuvientoanhoc.com

		suy ra $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ dẫnđến $\triangle AEF \backsim \triangle ABC(c.g.c)$ nên $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$.	0,5
		Ta có $MA=MB=MC$ nên $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}=\widehat{BAD}$.	0,5
		Suy ra $\triangle ANE \backsim \triangle ADB\ (g.g)$	0,5
	2 (2đ)	Từ c/m ở câu a suy ra $\widehat{ANE}=\widehat{ADB}=90^0$. Ta có Chú ý rằng $\widehat{NAE}=\widehat{ADE}=\widehat{BAD}=\widehat{ACB}$.	0,5
		Xét các tam giác vuông $ANE, ADE, ABD, AB\ C$ ta có: $sin\widehat{NAE}=\frac{NE}{AE}=sinC, sin\widehat{ADE}=\frac{AE}{AD}=sinC,$ $\frac{AD}{AB}=cos\widehat{BAD}=cosC, \frac{AB}{BC}=sinC$.	1,0
		Thay vào ta có $sin^3C.cosC=\frac{NE}{AE}.\frac{AE}{AD}.\frac{AD}{AB}.\frac{AB}{BC}=\frac{NE}{BC}$	0,5
	3 (1,5đ)	Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AK, AL với BC. Khi đó: P, Q lần lượt là trung điểm của BD và DC. Theo t/c trọng tâm của tam giác ta có: $\frac{AK}{AP}=\frac{AG}{AM}=\frac{AL}{AQ}=\frac{2}{3}$ nên $KG//BC, GL//BC$ dẫn đến K, G, L thẳng hàng. Suyra $KL \perp GH$.	0,5
		Theo định lý thales tacó: $\frac{GH}{AD}=\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3}, KG=\frac{2}{3}PM, GL=\frac{2}{3}QM.$ Chú ý rằng $PM=BM-BP=\frac{1}{2}(BC-BD)=\frac{1}{2}CD$, tương tự $QM=\frac{1}{2}BD$ suy ra $CD=3GK, BD=3GL$. Sử dụng hệ thức $AD^2=DB.DC$ hay $9GH^2=9GK.GL$ hay $CH^2=GK.GL$ suy ra $\frac{KG}{GH}=\frac{GH}{LG}$ điều này chứng tỏ $\triangle GLH \backsim \triangle GHK(c.g.c)$.	0,5
		Suy ra $\widehat{KHL}=\widehat{KHG}+\widehat{LHG}=\widehat{KHG}+\widehat{GKH}=90^0$. Hay $\triangle KHL$ vuông tại H	0,5
5 (2đ)	1 (1đ)	Sử dụng $\frac{x^2+y^2}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^2$ ta được $*\ a+b=a^2+b^2=2.\frac{a^2+b^2}{2} \geq 2.(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(a+b)^2}{2}$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow 0<a+b\leq 2$ $*\ P=2.\frac{(a^2)^2+(b^2)^2}{2}+\frac{2026}{(a+b)^2} \geq 2.(\frac{a^2+b^2}{2})^2+\frac{2026}{(a+b)^2}$ $=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{2026}{(a+b)^2}$	0,25
		Đặt $x=(a+b)^2, 0<x\leq 4$, ta được	0,5

thuvientoanhoc.com

		$P \geq \frac{x}{2}+\frac{2026}{x}=(\frac{x}{2}+\frac{8}{x})+\frac{2018}{x}$ $\geq 2.\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{x}}+\frac{2018}{x}=4+\frac{2018}{x}\geq 4+\frac{2018}{4}=\frac{1017}{2}$ $(do\ 0<x\leq 4).$	
		Vậy $MinP=\frac{1017}{2}$ *khi* $x=4$ *hay* $a=b=1$	0,25
2	a (0,5đ)	*Gọi 5 số tự nhiên phân biệt là* a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 *trong đó* $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ (*). *Từ* (*) *ta có* $a_5-a_3\geq 2$ *và* $a_4-a_2\geq 2$. *Theo đề bài ta có* $a_1+a_2+a_3>a_4+a_5$ *nên* $a_1>a_5-a_3+a_4-a_2\geq 2+2=4\Rightarrow a_1\geq 5.$ *Vậy có* $5\leq a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ *Như vậy tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.*	0,5
	B (0,5đ)	*Ta có* $5\leq a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ *và* $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<40$ *mà* $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\geq a_1+a_1+1+a_1+2+a_1+3+a_1+4$ $=5a_1+10$ *nên* $5a_1+10<40\Rightarrow a_1<6;\ 5\leq a_1<6, a_1\in N$ $\Rightarrow a_1=5$ *nên* $a_2+a_3+a_4+a_5<35.$ *Mặt khác* $a_2+a_3+a_4+a_5>a_2+a_2+1+a_2+2+a_2+3$ $=4a_2+6$ *nên* $4a_2+6<35\Rightarrow a_2<\frac{29}{4}.$ *Ta có* $a_2\leq 7$. *Vì* $6\leq a_2\leq 7, a_2\in N\Rightarrow a_2=6$ *hoặc* 7. *Như vậy có hai bộ gồm 5 số* $(a_1;\ a_2;a_3;a_4;a_5)$ *thỏa mãn đề bài là* (5; 6; 7; 8; 9) *và* (5; 7; 8; 9; 10);	0,5

thuvientoanhoc.com