UBND HUYỆN NHO QUAN
**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG**
**HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2015 - 2016**
**Môn thi: TOÁN - Lớp 9**
Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)
(Đề thi gồm 05 câu trong 01 trang).

**Câu I** *(4,5 điểm).*

Cho hai biểu thức $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$, với $x>0,\ x\neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức $P$ khi $x=10-(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})$

2. Rút gọn biểu thức $Q$.

3. Tìm giá trị của $x$ để biểu thức $\dfrac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu II** (*4,5 điểm*).

1. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho ba đường thẳng $d_1: y=-x+2$, $d_2: y=2x+3-k$, $d_3: y=-2(k+1)x-k-3$ ($k$ là tham số).

a) Tìm giá trị của $k$ để đường thẳng $d_2$ đi qua gốc tọa độ.

b) Tìm giá trị của $k$ để đường thẳng $d_1$ cắt đường thẳng $d_2$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

c) Chứng minh rằng khi $k$ thay đổi, các đường thẳng $d_3$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

2. Giải phương trình sau: $\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$

**Câu III** (*3,5 điểm*).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2012x^{2015}+2013y^{2018}=2015$

2. Cho các số thực $x, y, z$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ và $x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=3^{2016}$. Tìm $x, y, z$.

3. Cho $x, y$ là hai số không âm thỏa mãn điều kiện $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$. Tính giá trị của biểu thức: $T=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

**Câu IV** (*6,0 điểm*).

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng $d$ cố định, $d$ không có điểm chung với đường tròn. Gọi $M$ là điểm thuộc đường thẳng $d$. Qua $M$ kẻ hai tiếp tuyến $MA, MB$ tới đường tròn ($A, B$ là các tiếp điểm). Từ $O$ kẻ $OH$ vuông góc với đường thẳng $d$ ($H\in d$). Nối $A$ với $B$, $AB$ cắt $OH$ tại $K$ và cắt $OM$ tại $I$. Tia $OM$ cắt $(O;R)$ tại $E$.

a) Chứng minh rằng năm điểm $A, O, B, H, M$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $OK.OH=OI.OM$.

c) Chứng minh $E$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $MAB$.

d) Tìm vị trí của $M$ trên đường thẳng $d$ để diện tích tam giác $OIK$ đạt giá trị lớn nhất.

**Câu V** (*1,5 điểm*).

Cho $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

**..... HẾT .....**

thuvientoanhoc.com

UBND HUYỆN NHO QUAN

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**HDC ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG**

**HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2015 - 2016**

**Môn thi: TOÁN - Lớp 9**

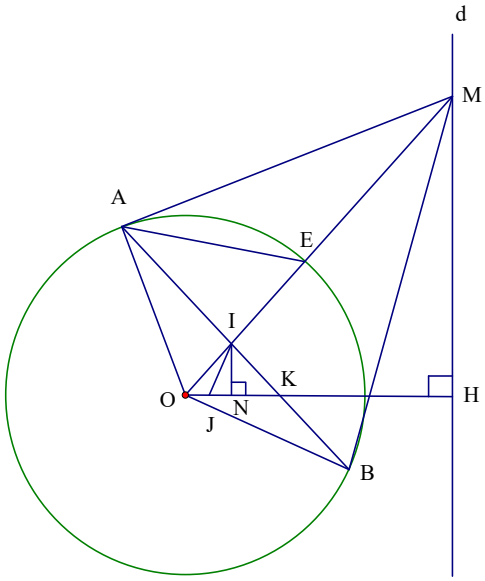
(HDC gồm 04 trang).

| Câu | Ý | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|---|
| Câu I | 1 (1,0) | $x = 10 - (\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}) = 10 - (\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ $= 10 - (\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}) = 10-1 = 9$ | 0,5 |
| | | Với $x = 9 \Rightarrow P = \dfrac{9+3}{\sqrt{9}-2} = \dfrac{12}{3-2} = 12$ | 0,5 |
| | 2 (1,5đ) | | |
| | | với $x > 0, x \neq 4$ ta có $Q = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ | 0,5 |
| | | $Q = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ | 0,5 |
| | | $= \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)}$ | 0,5 |
| | 3 (2,0đ) | | |
| | | Với $x > 0, x \neq 4$ thì $\dfrac{P}{Q}$ được xác định. | 0,25 |
| | | $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ | 0,5 |
| | | Áp dụng BĐT AM-GM ta có $\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$. | 0,5 |
| | | Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \dfrac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$ | 0,5 |
| | | Vậy $\text{Min}\, Q = 2\sqrt{3}$ *Khi* $x = 3$ | 0,25 |
| | | | |
| II | 1 | a) $d_2 : y = 2x + 3 - k$ đi qua gốc tọa độ thì $x = 0, y = 0$ và $3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$ | 0,5 |
| | | b) Ta thấy $d_1$ và $d_2$ luôn cắt nhau | 0,25 |
| | | Đường thẳng $d_1$ cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$ | 0,25 |
| | | Đường thẳng $d_2$ cắt trục hoành tại điểm $B(\dfrac{k-3}{2};0)$ | 0,25 |
| | | Để hai đường thẳng $d_1, d_2$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì $A \equiv B$ tức là $\dfrac{k-3}{2} = 2 \Leftrightarrow k = 7$ | 0,5 |

thuvientoanhoc.com

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Vậy $k=7\ldots$ | **0,25** |
| | | | |
| | **2** | Giả sử $M(x_0;y_0)$ là một điểm cố định mà mọi đường thẳng đã cho luôn đi qua thì phương trình $2(k+1)x_0+y_0+3+k=0$ (1) luôn đúng với mọi $k$<br>Ta có $(1)\Leftrightarrow(2x_0+1)k+2x_0+y_0+3=0$ | **0,5** |
| | | ĐK để phương trình này luôn đúng với mọi $k$ là $\begin{cases}2x_0+1=0\\2x_0+y_0+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-\frac{1}{2}\\y_0=-2\end{cases}$ | **0,5** |
| | | $\Rightarrow\ M(-\frac{1}{2};-2)$ | **0,25** |
| | | Thay tọa độ điểm $M(-\frac{1}{2};-2)$ vào $d_3$ ta thấy luôn đúng với mọi $k$.<br>Vậy điểm cố định cần tìm là $M(-\frac{1}{2};-2)$ | **0,25** |
| | | | |
| | | **ĐK** $x\geq 0$ | **0,25** |
| | | PT $\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x+9=x+\frac{8}{x+1}+\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}$ | **0,25** |
| | | $\Leftrightarrow\ \frac{9x+1}{x+1}-\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{8x}{x+1}-\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}+1=0$ | **0,25** |
| | | $\Leftrightarrow(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}-1)^2=0\ \Leftrightarrow\ \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}=1\Leftrightarrow 8x=x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$ (TMĐK) | **0,25** |
| **III** | **1** | | |
| | | Với mọi $x$ nguyên thì $2012x^{2015}:4$ nên là số chẵn | **0,25** |
| | | +) Nếu $y$ chẵn thì $y^{2018}$ là số chẵn nên 2013 $y^{2018}$ là số chẵn<br>$\Rightarrow\ 2012x^{2015}+2013y^{2018}$ là số chẵn | **0,25** |
| | | mà 2015 là số lẻ nên PTVN | **0,25** |
| | | +) Nếu $y$ lẻ thì $y^{1009}$ là số lẻ, Đặt $y^{1009}=2k+1,k\in\mathbb{Z}$<br>$2013y^{2018}=2013(2k+1)^2=2013(4k^2+4k+1)=4.2013(k^2+k)+2013$<br>chia cho 4 dư 1 nên $2012x^{2015}+2013y^{2018}$ chia cho 4 dư 1, mà 2015 chia cho 4 dư 3. | **0,5** |
| | | Vậy không có số nguyên $x,y$ nào thỏa mãn ycbt | **0,25** |
| | **2** | Từ $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\ \Leftrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ | **0,25** |
| | | $\Leftrightarrow x=y=z$ | **0,25** |
| | | Khi đó $x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=3x^{2015}=3^{2016}\Leftrightarrow x^{2015}=3^{2015}\Leftrightarrow x=3$ | **0,5** |

thuvientoanhoc.com

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Vậy $x=y=z=3$ | **0,25** |
| | **3** | | |
| | | Từ $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1\Leftrightarrow\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1-xy\Rightarrow(1+x^2)(1+y^2)=(1-xy)^2$ | **0,25** |
| | | $\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2=1-2xy+x^2y^2$ | **0,25** |
| | | $\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=0\Leftrightarrow(x+y)^2=0\Leftrightarrow y=-x$ | **0,25** |
| | | Với $y=-x\ \Rightarrow T=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=0$ | **0,25** |
| **IV** | **6,0 điểm** | | |
| | |  | **0,25** |
| | | a) $MA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)\Rightarrow\widehat{OAM}=90^0$<br>$\Rightarrow A\in$ đường tròn đường kính $OM$ | **0,25** |
| | | Tương tự ta có $B\in$ đường tròn đường kính $OM$ | **0,25** |
| | | $OH\perp d$ (gt) $\Rightarrow\widehat{OHM}=90^0\ \Rightarrow H\in$ đường tròn đường kính $OM$ | **0,25** |
| | | Vậy 5 điểm $A,O,B,H,M$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OM$ | **0,25** |
| | | | |
| | | b) Ta có $MA=MB$ ( theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)<br>$\Rightarrow M\in$ trung trực của $AB$ (1) | **0,5** |
| | | $OA=OB(=R)\Rightarrow O\in$ trung trực của $AB$ (2) | **0,5** |
| | | Từ (1) và (2) $\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB\ \Rightarrow\ OM\perp AB$ tại $I$ | **0,5** |
| | | Xét $\Delta OIK$ và $\Delta OHM$<br>Có $\hat{I}=\hat{H}=90^0$ , $\hat{O}$ chung<br>$\Rightarrow\Delta OIK\#\Delta OHM\,(g.g)\ \Rightarrow\dfrac{OI}{OH}=\dfrac{OK}{OM}\Rightarrow OK.OH=OI.OM$ | **1,0** |
| | | c) Ta có $MI$ là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ (theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) (3) | **0,25** |

thuvientoanhoc.com

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | Lại có $\widehat{IAE}+\widehat{IEA}=90^0$, $\widehat{IEA}=\widehat{OAE}$ (vì $\Delta OAE$ cân tại $O$ )<br>$\Rightarrow \widehat{OAE}+\widehat{IAE}=90^0$ | **0,25** |
| | | mà $\widehat{OAE}+\widehat{MAE}=90^0 \Rightarrow \widehat{IAE}=\widehat{MAE}$<br>$\Rightarrow AE$ là tia phân giác của $\widehat{MAB}$ (4) | **0,25** |
| | | Từ (3) và (4) suy ra $E$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta MAB$ | **0,25** |
| | | | |
| | | d) $\Delta OAM$ vuông tại $A$ , có $AI \perp OM \Rightarrow OI.OM = OA^2 = R^2$ | **0,25** |
| | | Theo chứng minh trên $OK.OH = OI.OM$<br>$\Rightarrow OK.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$ .<br>$R, OH$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow OK$ không đổi | **0,25** |
| | | Gọi $IN$ là đường cao của $\Delta OIK$ , $J$ là trung điểm của $ON$<br>Ta có $S_{OIK} = \dfrac{IN.OK}{2} \Rightarrow S_{OIK}$ lớn nhất $\Leftrightarrow IN$ lớn nhất | **0,25** |
| | | Lại có $IN \le IJ = \dfrac{OK}{2} \Rightarrow IN_{\max} = \dfrac{OK}{2} \Leftrightarrow N \equiv J \Leftrightarrow \Delta IOK$ vuông cân $\Leftrightarrow \Delta OMH$ vuông cân $\Leftrightarrow MH = HO$ | **0,25** |
| | | Vậy diện tích tam giác $OIK$ có giá trị lớn nhất khi $MH = HO$ | **0,25** |
| **Câu V** | **1,5 điểm** | | |
| | | Vì $a, b, c$ là các số thực dương nên Áp dụng BĐT AM-GM ta có:<br>$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \le a\cdot\dfrac{b+c}{2}+b\cdot\dfrac{a+c}{2}+c\cdot\dfrac{a+b}{2}$ | **0,25** |
| | | $\Rightarrow a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \le ab+bc+ca = 3$ (1) | **0,25** |
| | | Mặt khác $3(a^4+b^4+c^4) \ge (a^2+b^2+c^2)^2 \ge (ab+bc+ca)^2 = 9$ | **0,5** |
| | | $\Rightarrow 3 \le a^4+b^4+c^4$ (2) | **0,25** |
| | | Từ (1) và (2) ta có ĐPCM | **0,25** |

**Chú ý:**

*1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*

*2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.*

*3) Điểm bài thi là tổng điểm không làm tròn.*

thuvientoanhoc.com