ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI HSG TOÁN 9 TPBMT 2024

HOÀNG VĂN QUYỀN* NGUYỄN HUY GIA BẢO †

NGUYỄN NGỌC DUY ‡

Ngày 27 tháng 2 năm 2024

§1 ĐỀ THI

Câu 1 (4,0 điểm).

1. Cho biểu thức: $M = \left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].\dfrac{5}{x+1}$ với $x > 0$

   Rút gọn biểu thức M và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $\dfrac{15}{4M} - \dfrac{3}{2}$ là số nguyên tố

2. Giải phương trình: $x^2 + x + 4 - (2+x)\sqrt{x^2 - x + 4} = 0$

Câu 2 (4,0 điểm).

1. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m-1)x - m + 3$.
   Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho A và B cách đều trục Oy. Khi đó tính độ dài đường trung tuyến OM của tam giác OAB.

2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{z+x^2} + \frac{y^3}{x+y^2} + \frac{z^3}{y+z^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Câu 3 (4,0 điểm).

1. Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\dfrac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

2. Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác $3, 5$ và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là số chính phương.

Câu 4 (2,0 điểm). Công ty X và công ty Y là hai công ty có uy tín tại Hà Nội mà anh Minh đang có nhu cầu xin vào làm việc. Cả hai công ty đều có chế độ thu hút người tài và đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Công ty X: Anh Minh nhận được 1500 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1800 USD.

Công ty Y: Anh Minh nhận được 2500 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương

*10A5 THCS-THPT ĐÔNG DU

†9A6 THCS PHẠM VĂN ĐỒNG

‡GV THCS-THPT ĐÔNG DU

thuvientoanhoc.com

1600 USD.

Em hãy tư vấn giúp anh Minh lựa chọn công ty nào để thử việc sao cho tổng số tiền thử việc nhận được là lớn nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE không đi qua tâm đường tròn $(O;R)$ (B, C là tiếp điểm; D nằm giữa A và E). Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Gọi H là giao điểm của AO và BC.

1. Chứng minh $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$.
2. Chứng minh $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$.
3. Tính số đo góc $\angle IOK$ khi $OA = 2R$.
4. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Chứng minh rằng $IP + KQ \geq PQ$.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB ở E, tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$, tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tứ giác $BMNC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

thuvientoanhoc.com

§2 LỜI GIẢI

Câu 1 (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $M=\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].\dfrac{5}{x+1}$ với $x>0$

   Rút gọn biểu thức M và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $\dfrac{15}{4M}-\dfrac{3}{2}$ là số nguyên tố

2. Giải phương trình: $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0$

Lời giải.

1. ĐKXĐ: $x>0$

   Ta có $M=\left[\dfrac{3}{3+(2\sqrt{x}+1)^2}+\dfrac{3}{3+(2\sqrt{x}-1)^2}\right].\dfrac{5}{x+1}$

   $=\dfrac{18+3(2\sqrt{x}+1)^2+3(2\sqrt{x}-1)^2}{[3+(2\sqrt{x}+1)^2]\,[3+(2\sqrt{x}-1)^2]}.\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{24(x+1)}{16x^2+16x+16}.\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{15}{2x^2+2x+2}.$

   Do đó $\dfrac{15}{4M}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{x^2+x-2}{2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{2}$. Đặt $\dfrac{(x-1)(x+2)}{2}=p$ (p là số nguyên tố)

   Ta có x là số tự nhiên nên $x+2>x-1$ suy ra $\left[\begin{array}{l}x-1=1\\x-1=2\end{array}\right.$.

   TH1: $x-1=1\Rightarrow x=2\Rightarrow p=\dfrac{x+2}{2}=2$ (thoả mãn)

   TH2: $x-1=2\Rightarrow x=3\Rightarrow p=x+2=5$ (thỏa mãn).

   Vậy $x\in\{2;3\}$

2. ĐKXĐ: $x^2-x+4>0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$ (luôn đúng)

   $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0\Leftrightarrow x^2+x+4=(2+x)\sqrt{x^2-x+4}$

   $\Rightarrow(x^2+x+4)^2=(2+x)^2(x^2-x+4)\Leftrightarrow x^4+2x^3+9x^2+8x+16=x^4+3x^3+4x^2+12x+16$

   $\Leftrightarrow x^3-5x^2+4x=0\Leftrightarrow x(x^2-5x+4)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=4\end{array}\right.$

   Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\{0;1;4\}$

Nhận xét 2.1.

1. Đây là bài toán rút gọn biểu thức đại số khá quen thuộc, kèm theo câu hỏi phụ về số học
2. Ngoài cách giải bằng phương pháp bình phương hai vế, chúng ta còn một cách giải khác bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn:
   Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}$, khi đó phương trình đã cho trở thành:
   $t^2+2x-(2+x)=0\Leftrightarrow(t-2)(t-x)=0$
   Ta xét 2 trường hợp

   a) $t=2\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

   b) $t=x\Leftrightarrow x=4$

   Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;1;4\}$

Bài tập tương tự.

thuvientoanhoc.com

Bài tập 1. Cho $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$

1. Rút gọn P
2. So sánh P với 4
3. Tìm x thoả mãn điều kiện: $x\sqrt{x}(P-2)+x+4 = 3\sqrt{x^3+4x}$

Bài tập 2. Cho biểu thức $P = \left[\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right] : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ Với $x>0, x\neq 1$

1. Rút gọn P
2. Tính P khi $x = 3+\sqrt{3}$
3. Với giá trị nào của x thì $\dfrac{1}{P} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$

Bài tập 3. Với a, b, c là 3 số thực đôi một phân biệt, chứng minh rằng

$$3 + \frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)} = \frac{2a+b}{a-b} + \frac{2b+c}{b-c} + \frac{2c+a}{c-a}$$

Bài tập 4. Giải các phương trình sau

1. $x^2+1-(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = 0$
2. $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$
3. $(2x+7)\sqrt{2x+7} = 9x^2+9x+7$
4. $x^2+3x+8 = (x+5)\sqrt{x^2+x+2}$

Câu 2 (4,0 điểm)

1. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m + 3$.
   Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho A và B cách đều trục Oy. Khi đó tính độ dài đường trung tuyến OM của tam giác OAB.
2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx = 3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{z+x^2} + \frac{y^3}{x+y^2} + \frac{z^3}{y+z^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Lời giải.

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = 2(m-1)x - m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 (1)$
   Điều kiện để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt hay $\triangle' > 0 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$ (luôn đúng)
   Kẻ $AH, BK \perp Oy (H, K \in Oy)$.Không mất tính tổng quát, do A, B cách đều trục Oy,A, B phân biệt, giả sử $x_A > 0, x_B < 0$. Khi đó $AH = x_A, BK = -x_B$. Vì $AH = BK$ nên $x_A = -x_B$ hay $x_A + x_B = 0$
   Theo định lý Vi-ét, ta có $x_A + x_B = 2(m-1)$. Vậy khi đó $2(m-1) = 0$ nên $m = 1$
   Lúc này $(d): y = 2$. $A(\sqrt{2}, 2), B(-\sqrt{2}, 2)$. Vậy nên A, B đối xứng qua Oy. Do đó Oy đi qua trung điểm M của AB
   Giao điểm của Oy với d là $M(0; 2)$. Vậy $OM = 2$
   Tóm lại $m = 1; OM = 2$

thuvientoanhoc.com

2. Từ giả thiết, ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}$. khi đó $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$

Yêu cầu bài toán trở thành chứng minh $\frac{a}{b(a+b^2)}+\frac{b}{c(b+c^2)}\frac{c}{a(c+a^2)}\geq\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$\frac{a}{b(a+b^2)}=\frac{a+b^2-b^2}{b(a+b^2)}=\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\geq\frac{1}{b}-\frac{b}{2\sqrt{a}b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Chứng minh tương tự rồi cộng lại vế theo vế áp dụng thêm bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta được:

$\frac{a}{b(a+b^2)}+\frac{b}{c(b+c^2)}+\frac{c}{a(c+a^2)}$

$\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2\sqrt{b}}-\frac{1}{2\sqrt{c}}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\frac{3}{2}(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}})-3$

$\geq\frac{3}{2}.\frac{9}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}-3$

$\geq\frac{27}{2}\frac{1}{\sqrt{3(a+b+c)}}=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$

Nhận xét 2.2.

1. Đây là bài toán tương giao giữa đường thẳng và parabol quen thuộc, sử dụng phương trình hoành độ giao điểm, định lý Vi-ét.
2. Bài toán có giả thiết $xy+yz+zx=3xyz$ nghĩ đến việc chia hai vế giả thiết cho $xyz>0$ rồi đặt ẩn phụ, sau đó sử dụng kĩ thuật thêm bớt khá giống với kĩ thuật $Cauchy$ ngược dấu rồi xử lí khúc sau bằng $Cauchy-Schwarz$.

Bài tập tương tự.

Bài tập 5. Cho hai đường thẳng $(d_1):mx+(m-1)y-2m+1=0,(d_2):(1-m)x+my-4m+1=0$

1. Tìm các điểm cố định mà $(d_1),(d_2)$ luôn đi qua
2. Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất
3. Chứng minh rằng hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I. Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi
4. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích $\triangle IAB$ với A,B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1),(d_2)$ luôn đi qua

Bài tập 6. Một xe tải có chiều rộng là 2,4m và chiều cao là 2,5m muốn đi qua một cái cổng hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$m (Bỏ qua độ dày của cổng)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy gọi parabol $(P):y=ax^2$ với $a<0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a=-1$
2. Hỏi xe tải có đi qua cổng được không ?. Tại sao ?

Bài tập 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol $(P):y=x^2$, đường thẳng $(d):y=mx+3-m$ và $M(1;3)\in(d)$. Chứng mỉnh rằng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ nằm về hai phía điểm M. Giả sử $x_1<x_2$. Tìm m để $MA=2MB$

Bài tập 8. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ac}\geq\frac{3}{2}$$

thuvientoanhoc.com

Bài tập 9. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$$

Bài tập 10. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)} \geq 1$$

Câu 3 (4,0 điểm)

1. Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.
2. Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác 3, 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là số chính phương.

Lời giải.

1. Đặt $a = x+\sqrt{2024}$, $b = \frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Ta có $x = a - \sqrt{2024} \Rightarrow b = \frac{1}{x} - \sqrt{2024} = \frac{1}{a-\sqrt{2024}} - \sqrt{2024} = \frac{2025 - a\sqrt{2024}}{a - \sqrt{2024}} \Rightarrow ab - b\sqrt{2024} = 2025 - a\sqrt{2024} \Leftrightarrow ab - 2025 = (b-a)\sqrt{2024}$.
   Nếu $b - a \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2024} = \frac{ab - 2025}{b-a} \in \mathbb{Q}$ (vô lý vì $\sqrt{2024} \in \mathbb{I}$).
   Vậy nên $b - a = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x + \sqrt{2024} = \frac{1}{x} - \sqrt{2024} \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{2024}x - 1 = 0$.
   Áp dụng công thức nghiệm ta giải ra được $\left[\begin{array}{l} x = 45 - \sqrt{2024} \\ x = -45 - \sqrt{2024} \end{array}\right.$
   Vậy $x \in \{45 - \sqrt{2024}; -45 - \sqrt{2024}\}$

2. Ta có $a_1, a_2, ..., a_9$ có dạng $3^m 5^n 7^p$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$. Xét theo modulo 2 ta có $m \equiv 0, 1 \pmod 2$, $n \equiv 0, 1 \pmod 2$, $p \equiv 0, 1 \pmod 2$. Do đó ta có 2 cách chọn m, 2 cách chọn n và 2 cách chọn p. Vậy ta có $2.2.2 = 8$ cách chọn m, n, p sao cho với a_i và a_j bất kì đều không đồng thời thỏa mãn $m_i \equiv m_j \pmod 2$, $n_i \equiv n_j \pmod 2$, $p_i \equiv p_j \pmod 2$. Theo nguyên lí Dirichlet ta luôn tìm được a_i và a_j thỏa mãn tính chất trên. Suy ra $a_i.a_j = 3^{m_i+m_j} 5^{n_i+n_j} 7^{p_i+p_j}$ mà $m_i \equiv m_j \pmod 2$ nên $m_i + m_j$ chia hết cho 2. Tương tự ta có $n_i + n_j$ chia hết cho 2 và $p_i + p_j$ chia hết cho 2. Do đó tích $a_i.a_j$ là số chính phương.

Nhận xét 2.3.

1. Sử dụng tính chất quen thuộc là nếu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, c không là số chính phương mà $a + b\sqrt{c} = 0$ thì khi đó $a = b = 0$, chứng minh bằng cách giả sử phản chứng. Từ đó để làm bài thì chỉ việc đặt thêm các ẩn a, b và rút x để thế đưa về phương trình ẩn a, b từ đó giải quyết bài toán
2. Để ý rằng trong đề có nhắc tới ước nguyên tố, ta nghĩ tới phân tích tiêu chuẩn của các số đã cho, để một số là số chính phương thì các số mũ trong phân tích tiêu chuẩn phải là số chẵn, từ đó các số mũ tương ứng của các số nguyên tố trong 2 thừa số đem nhân vào phải có cùng tính chẵn lẻ, mà có 8 bộ trạng thái chẵn lẻ dạng (x, y, z) từ đó áp dụng nguyên lí *Dirichlet*

Bài tập tương tự.

Bài tập 11. Cho số thực x thỏa mãn $x^4 - x$ và $x^5 - x$ đồng thời là số nguyên, chứng minh rằng x là số nguyên.

thuvientoanhoc.com

Bài tập 12. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn trong các số $x+\sqrt{5}, x^2-4\sqrt{5}, x-\dfrac{1}{x}, x^3+x$ có đúng một số không nguyên.

Bài tập 13. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $x+2\sqrt{2}$ và $\dfrac{1}{x}-2\sqrt{2}$ đều là số hữu tỉ.

Bài tập 14. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $x+\frac{5}{x}$ là số nguyên và $\left(x^3-\frac{125}{x^3}\right)^{13}$ là số hữu tỉ.

Bài tập 15. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ bậc hai với hệ số nguyên thỏa mãn

1. $\sqrt[3]{7}$ là nghiệm của đa thức
2. $\sqrt[3]{2}$ là nghiệm của đa thức

Bài tập 16. Từ 19 điểm (trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng) có tọa độ nguyên trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có đỉnh là 3 trong 19 điểm đó có trọng tâm có tọa độ nguyên.

Bài tập 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một ngũ giác, chứng minh rằng tồn tại một điểm nằm trên cạnh hoặc trong ngũ giác đó có tọa độ nguyên.

Bài tập 18. Cho 6 số nguyên dương đôi một khác nhau và nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Câu 4 (2,0 điểm)

Công ty X và công ty Y là hai công ty có uy tín tại Hà Nội mà anh Minh đang có nhu cầu xin vào làm việc. Cả hai công ty đều có chế độ thu hút người tài và đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Công ty X: Anh Minh nhận được 1500 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1800 USD.

Công ty Y: Anh Minh nhận được 2500 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1600 USD.

Em hãy tư vấn giúp anh Minh lựa chọn công ty nào để thử việc sao cho tổng số tiền thử việc nhận được là lớn nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Lời giải. Gọi n là số tháng thử việc của cả hai công ty $(n \in \mathbb{N}, 3 \le n \le 8)$
Khi đó số tiền thử việc ở công ty X là $A = 1800n + 1500$, số tiền thử việc ở công ty Y là $B = 1600n + 2500$
Xét hiệu $A - B = 200n - 1000$
Khi đó ta có $A = B \Leftrightarrow n = 5$
$A > B \Leftrightarrow n > 5$
$A < B \Leftrightarrow n < 5$
Vậy ta có kết luận nếu thời gian thử việc là 5 tháng thì cả hai công ty là như nhau, còn thời gian thử việc lớn hơn 5 tháng thì chọn công ty X, nếu thời gian thử việc ít hơn 5 tháng thì chọn công ty Y

Nhận xét 2.4. Đây là bài toán thực tế, giải bằng cách gọi n

Bài tập tương tự.

Bài tập 19. Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A, B cách nhau $180km$, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết ô tô có vận tốc lớn hơn xe máy $10km/h$

Bài tập 20. Trong một giải bóng đá có các đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (2 đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận). Đối thắng được 3 điểm, đội hoà được 1 điểm, đội thua không được điểm. Kết thúc giải, người ta nhận thấy rằng tổng số trận thắng và số trận thua gấp đôi số trận hoà. Tổng số điểm của các đội là 176 điểm. Hỏi có bao nhiêu đội tham gia giải

thuvientoanhoc.com

Bài tập 21. Cho một bảng ô vuông mxn (gồm m dòng và n cột). Cho quy tắc tô màu bảng ô vuông như sau: Mỗi ô vuông đơn vị được tô bằng màu đỏ hoặc màu xanh sao cho bất kì bảng ô vuông $2x3$ hoặc $3x2$ nào cũng có đúng hai ô được tô màu đỏ

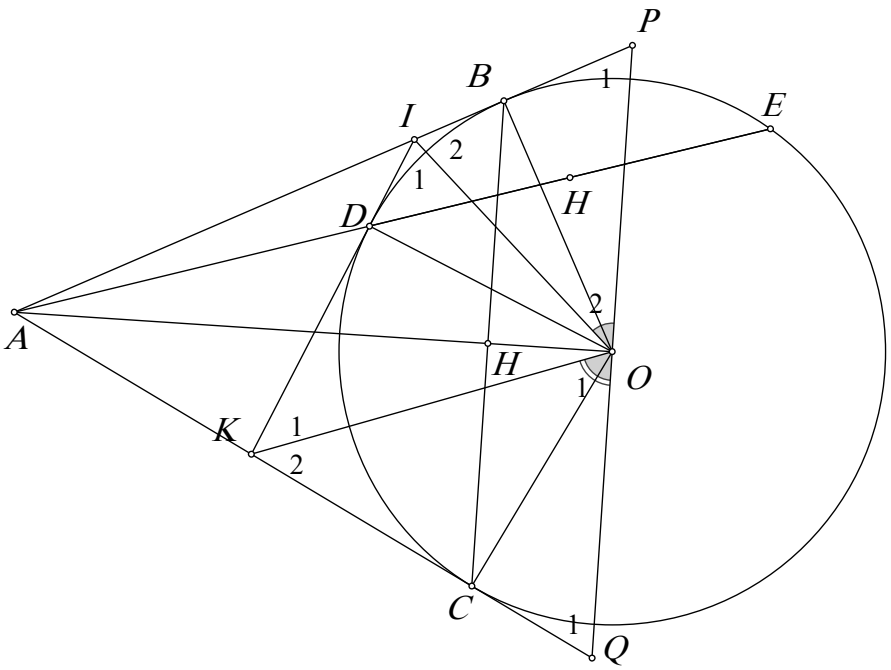
1. Hãy chỉ ra một cách tô màu theo quy tắc trên cho bảng ô vuông 4x6 (Điền chữ Đ vào ô được tô màu đỏ, chữ X vào ô được tô màu xanh)
2. Người ta đã tô bảng ô vuông 2021x2022 theo quy tắc trên. Hỏi có bao nhiêu ô được tô màu đỏ

Câu 5 (4,0 điểm)

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE không đi qua tâm đường tròn $(O;R)$ (B, C là tiếp điểm; D nằm giữa A và E). Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Gọi H là giao điểm của AO và BC.

1. Chứng minh $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$.
2. Chứng minh $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$.
3. Tính số đo góc $\angle IOK$ khi $OA = 2R$.
4. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Chứng minh rằng $IP + KQ \geq PQ$.

Lời giải.



1. Vì $\angle ABO = \angle ACO = 90°$ nên $ABOC$ nội tiếp, do đó $\angle BAO = \angle BCO$ (cùng chắn cung BO)
2. Ta có $\angle ABD = \angle AEB$ (Cùng chắn cung BD). Do đó $\triangle ADB \sim \triangle ABE(g.g)$. Do đó $AD.AE = AB^2 = AH.AO$. Từ đó thì $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$
3. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì OI là phân giác $\angle BOD$, OK là phân giác $\angle COD$. Từ đó thì $\angle IOK = \angle IOD + \angle DOK = \dfrac{1}{2}\angle BOD + \dfrac{1}{2}\angle COD = \dfrac{1}{2}\angle BOC = \angle AOB$ Mặt khác, $\cos\angle AOB = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$. Do đó $\angle AOB = 60°$.Vậy $\angle IOK = 60°$

thuvientoanhoc.com

4. Vì AO là phân giác BAC mà $OA \perp PQ$ nên $\triangle PAQ$ cân tại A
Ta có $\angle I_2 + \angle O_2 = 180^\circ - \angle P_1 = 180^\circ - \angle Q_1 = \angle O_1 + \angle K_2$ (1),$\angle I_2 + \angle K_2 = \angle I_1 + \angle K_1 = 180^\circ - \angle IOK = \angle O_1 + \angle O_2$ (2)
Lấy (1) cộng (2) vế theo vế, ta được $2\angle I_2 + \angle O_2 + \angle K_2 = 2\angle O_1 + \angle K_2 + \angle O_2$, do đó $\angle I_2 = \angle O_1$ nên $\angle O_2 = \angle K_2$ do đó $\triangle IOP \sim \triangle OKQ(g.g)$. Vậy $IP.KQ = OQ.OP$.
Do đó $IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ} = 2\sqrt{OP.OQ} = 2OP = PQ$ (Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $IP = KQ = OP = OQ$, khi đó $\angle I_1 = \angle I_2 = \angle O_2$, khi đó $IK \parallel PQ$, mà $OD \perp IK$, khi đó $OD \perp PQ$, mà $OA \perp PQ$ nên O, A, D thẳng hàng, rõ ràng điều này mâu thuẫn với giả thiết, vậy dấu bằng không xảy ra. Do đó ta có $IP + KQ > PQ$

Nhận xét 2.5. Bài toán sử dụng mô hình tiếp tuyến cát tuyến quen thuộc, kết hợp thêm tạo bất đẳng thức hình học từ dạng tích bằng cách sử dụng tam giác đồng dạng, từ đó $AM - GM$ để chuyển thành dạng tổng

Bài tập tương tự.

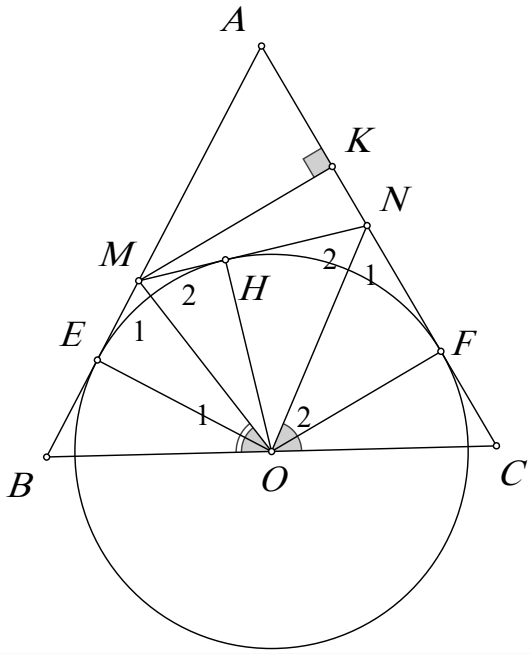
Bài tập 22 (Mô hình tiếp tuyến cát tuyến). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB , đến đường tròn (O) (A,là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại IH. Chứng minh rằng

1. 5 điểm M, A, E, O, B nằm trên một đường tròn.
2. ME là tia phân giác của $\angle AEB$.
3. $MA^2 = MC.MD$.
4. $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$
5. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB
6. Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.
7. AB chứa đường phân giác của $\angle CHD$
8. $\angle CAD = \angle BHD$
9. OE kéo dài cắt AB tại K thì KC, KD là tiếp tuyến của (O) .
10. AE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F(F khác với A). Khi đó $BF \parallel CD$

Câu 6 (2,0 điểm)
Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB ở E, tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$, tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tứ giác $BMNC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

thuvientoanhoc.com

Lời giải. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $\angle M_1 = \angle M_2, \angle N_1 = \angle N_2$
Vậy $\angle M_1 + \angle O_1 = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB = \angle N_1 + \angle O_2$
Mặt khác $\angle M_1 + \angle N_1 = \angle M_2 + \angle N_2 = 180^\circ - \angle MON = \angle O_1 + \angle O_2 (2)$
Lấy (1) cộng vế theo vế với (2), ta có: $2\angle M_1 + \angle O_1 + \angle N_1 = 2\angle O_2 + \angle O_1 + \angle N_1$. Do đó $\angle M_1 = \angle O_2$. Từ đó thì $\triangle OBM \sim \triangle NCO (g.g)$.
Suy ra $BM.CN = OB.OC = OB^2$
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $BM + CN \geq 2OB$
Kẻ $MK \perp AN (K \in AN)$
Khi đó theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì:
$S_{AMN} = \dfrac{1}{2} MK.AN = \dfrac{1}{2} AM.AN. \sin \angle BAC$
$\leq \dfrac{1}{8} (AM + AN)^2 . \sin \angle BAC = \dfrac{1}{8} . \sin \angle BAC . (2AB - BM - CN)^2$
$\leq \dfrac{1}{8} . \sin \angle BAC . (2AB - 2OB)^2$ (không đổi)
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN = OB = OC, AM = AN$. Từ đó thì $\angle M_1 = \angle M_2 = \angle O_1$. Do đó $MN \parallel BC$. Vậy $OH \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên O, H, A thẳng hàng
Từ đó thì H là giao điểm OA với (O)
Tóm lại $MaxS_{AMN} = \dfrac{1}{8} . \sin \angle BAC . (2AB - 2OB)^2$ khi H là giao điểm của OA với (O)



Nhận xét 2.6. Bài toán này có cấu trúc giống ý 4 câu 5, chỉ cần xử lí khéo léo khúc cuối đưa diện tích tam giác về tích hai cạnh là trọn vẹn bài toán

Bài tập tương tự.

Bài tập 23. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$. Chứng minh rằng $AP \geq AI$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài tập 24. Cho tam giác nhọn ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ thỏa mãn $a + b + c = 2p$ không đổi. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đặt $S = HA + HB + HC$. Khi S lớn nhất thì tam giác ABC là tam giác gì? Tính giá trị lớn nhất đó theo p.

Bài tập 25. Cho ABC là tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi A' là tâm của đường tròn đi qua C và tiếp xúc AB tại A, gọi B' là tâm của đường tròn đi qua A và tiếp xúc BC tại B. Gọi C' là tâm của đường tròn đi qua B và tiếp xúc CA tại C. Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC

thuvientoanhoc.com