SỞ GD&ĐT THỪA THIÊN HUẾ
TRƯỜNG THPT THUẬN AN

THI HỌC SINH GIỎI TOÁN KHỐI 11

NĂM HỌC 2012-2013

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh :..... Số báo danh : .....

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1: (4 điểm) Giải các phương trình sau :

1. $4\sin x.\cos x+\tan(\frac{10\pi}{3})(2\sin^2 x-1)=2\sin 3x$

2. $1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

Bài 2: (2 điểm) Bạn Tùng có 10 người bạn thân, trong đó có Long và Lân. Tùng muốn mời 5 bạn đến tham dự sinh nhật của mình. Hỏi bạn Tùng có bao nhiêu cách mời, biết rằng hai bạn Long và Lân rất ghét nhau nên Tùng không thể đồng thời mời cả hai bạn này cùng có mặt.

Bài 3: (3 điểm)

1. Chứng minh: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+...+C_{2n+1}^{2n}$.

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newtơn $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$,

   biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$

Bài 4: (2 điểm) Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=5u_n-4\end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của u_n theo n.

Bài 5: (2 điểm) Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân; đồng thời chúng theo thứ tự là số hạng thứ nhất, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín của một cấp số cộng. Tìm 3 số đó biết tổng của chúng bằng 13.

Bài 6: (3 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC. Biết B,C nằm trên đường thẳng $d: x+y-3=0$, A nằm trên đường thẳng $d': 3x+y+2=0$, trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ và diện tích tam giác ABC bằng 10. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết hoành độ của điểm A không âm.

Bài7: (2 điểm) Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác, dựng 3 tam giác đều ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 8: (2 điểm) Cho 3 số dương a, b, c thỏa : $a+b+c=\frac{1}{2}$.

Chứng minh : $\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c+3a}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a+3b}}\geq 3$

----------Hết----------

thuvientoanhoc.com

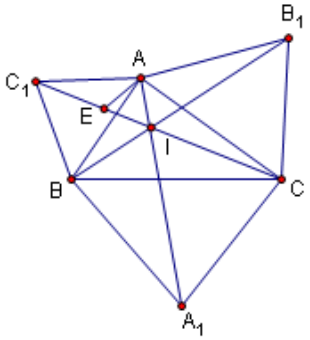
ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Bài	Đáp án	Điểm
1) (4điểm)	1)(2điểm) Giải phương trình: $4\sin x.\cos x+\tan(\frac{10\pi}{3})(2\sin^2 x-1)=2\sin 3x$	
	Phương trình đã cho tương đương với: $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin 3x$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin 3x$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin 3x$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$	0,5
	2)(2điểm) Giải phương trình: $1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$	
	Phương trình đã cho tương đương với: $\sin x(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.\sin x-1)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin x(2\sin^3\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1)=0$	0,5
	• $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$	0,5
	• $2\sin^3\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1=0\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow x=\pi+k4\pi$	0,5
2) (2điểm)	Bạn Tùng có 10 người bạn thân, trong đó có Long và Lân. Tùng muốn mời 5 bạn đến tham dự sinh nhật của mình. Hỏi bạn Tùng có bao nhiêu cách mời, biết rằng hai bạn Long và Lân rất ghét nhau nên không thể đồng thời có mặt.	
	Số cách bạn Tùng chọn 5 người bạn trong 10 người đến dự sinh nhật của mình là : $C_{10}^5=252$	0,5
	Số cách bạn Tùng mời 5 người bạn trong 10 người đồng thời có cả Long và Lân là: $C_8^3=56$	0,5
	Vì hai bạn Long và Lân rất ghét nhau nên không thể đồng thời có mặt, vì vậy bạn Tùng chỉ có thể mời nhiều nhất là 1 bạn Long hoặc Lân dự sinh nhật.	0,5
	Vậy, số cách bạn Tùng mời 5 bạn đến dự sinh nhật là: $252-56=196$	0,5

thuvientoanhoc.com

3) (3điểm)	1) (1,0 điểm) Chứng minh: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+...+C_{2n+1}^{2n}$	
	Vì $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k}\quad \forall k\in\mathbb{N},k\le 2n+1$ nên: $C_{2n+1}^1=C_{2n+1}^{2n};C_{2n+1}^2=C_{2n+1}^{2n-1};.....;C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}$	0,5
	Do đó: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+...+C_{2n+1}^{2n}$ (đpcm)	0,5
	2) (2,0 điểm) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai nhị thức New tơn $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$	
	Theo câu 1) và từ $C_{2n+1}^0=C_{2n+1}^{2n+1}=1$ ta có: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=\frac{1}{2}(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^{2n+1})-1$ (1)	0,5
	Mà $2^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)	0,5
	Do đó, từ (1), (2) và từ giả thiết đã cho suy ra: $\frac{1}{2}2^{2n+1}-1=2^{20}-1\Leftrightarrow n=10$	0,5
	Với $n=10$, tính được hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai nhị thức New tơn $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}$ là $C_{10}^6=210$	0,5
4) (2điểm)	(2 điểm) Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=5u_n-4,\forall n\ge 1\end{cases}$ Tìm số hạng tổng quát của u_n theo n.	
	Ta có: $u_{n+1}=5u_n-4\Leftrightarrow(u_{n+1}-1)=5(u_n-1)$	0,5
	Do đó, đặt $v_n=u_n-1$ thì ta được dãy $(v_n):\begin{cases}v_1=1\\v_{n+1}=5v_n,\forall n\ge 1\end{cases}$	0,5
	Dãy (v_n) là cấp số nhân với công bội q=5 và $v_1=1$ nên $v_n=\frac{5^n-1}{4}$	0,5
	Vậy số hạng tổng quát theo n của dãy (u_n) là: $u_n=\frac{5^n-5}{4}$	0,5
5) (2điểm)	Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân; đồng thời chúng theo thứ tự là số hạng thứ nhất, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín của một cấp số cộng. Tìm 3 số đó biết tổng chúng bằng 13.	
	Vì x, y, z theo thứ tự là số hạng thứ nhất, thứ 3 và thứ 9 của một cấp số cộng, do đó nếu gọi d là công sai của cấp số cộng thì ta có: $y=x+2d;\ z=x+8d$	0,5

thuvientoanhoc.com

	Tổng của 3 số là 13 nên: $x+y+z=13 \Leftrightarrow 3x+10d=13$	0,5
	X, y, z theo thứ tự lập thành 1 cấp số nhân nên: $xz=y^2 \Leftrightarrow x(x+8d)=(x+2d)^2 \Leftrightarrow xd-d^2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d=0 \\ x=d \end{bmatrix}$	0,5
	• $d=0 \Rightarrow x=y=z=\frac{13}{3}$ • $x=d \Rightarrow x=1,\ y=3,\ z=9$	0,5
6) (3điểm)	Trong mặt phẳng Oxy, cho $\triangle ABC$. Biết B,C nằm trên đường thẳng $d: x+y-3=0$, A nằm trên đường thẳng $d': 3x+y+2=0$, trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ và diện tích tam giác là 10. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết hoành độ của A không âm.	
	Vì $A \in d': 3x+y+2=0$ và hoành độ A không âm nên $A(a;-3a-2),\ a \geq 0$	0,5
	$B,C \in d: x+y-3=0$ và G là trọng tâm nên: $d(A,BC)=3d(G,BC)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (*)	0,5
	Mà $d(A,BC)=\frac{\lvert 2a+5\rvert}{\sqrt{2}}$ nên ta có : $\frac{\lvert 2a+5\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a=0 \\ a=-5 \end{bmatrix}$ Vì $a \geq 0$ nên ta nhận giá trị $a=0 \Rightarrow A(0;-2)$	0,5
	Ngoài ra, từ (*) và diện tích tam giác ABC bằng 10, ta suy ra được $BC=4\sqrt{2}$ và tọa độ trung điểm I của BC là I(1;2)	0,5
	$B \in d: x+y-3=0 \Rightarrow B(b;3-b)$ và $IB=\sqrt{(b-1)^2+(1-b)^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=-1 \\ b=3 \end{bmatrix}$	0,5
	• $b=-1 \Rightarrow B(-1;4),\ C(3;0)$ • $b=3 \Rightarrow B(3;0),\ C(-1;4)$	0,5
7) (2điểm)	Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác, dựng 3 tam giác đều ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy	
		0,5

thuvientoanhoc.com

	Xét phép quay tâm B, góc quay 60^0, ta có: $Q_{(B,60^0)}(A_1)=C,\ Q_{(B,60^0)}(A)=C_1 \Rightarrow Q_{(B,60^0)}(A_1A)=CC_1 \Rightarrow (A_1A,C_1C)=60^0$	
	Gọi I là giao điểm của AA_1, CC_1 thì $\widehat{AIC_1}=60^0$. Trên C_1I, lấy điểm E sao cho IE=IA, suy ra tam giác IAE đều.	0,5
	Xét phép quay tâm A, góc quay 60^0, ta có $Q_{(A,60^0)}(C)=B_1,\ Q_{(A,60^0)}(E)=I,\ Q_{(A,60^0)}(C_1)=B$	0,5
	Mà C,E,C_1 thẳng hàng, suy ra B_1,I,B thẳng hàng. Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại I	0,5
8) (2điểm)	Cho 3 số dương a,b,c thỏa : $a+b+c=\frac{1}{2}$. Chứng minh : $\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c+3a}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a+3b}}\geq 3$	
	Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số ta có: $\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{(a+2b+3c)}{2}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{(a+2b+3c)}{2}\geq\frac{3}{2}$	0,5
	Tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{b+2c+3a}}+\frac{(b+2c+3a)}{2}\geq\frac{3}{2};\ \ \frac{1}{\sqrt{c+2a+3b}}+\frac{(c+2a+3b)}{2}\geq\frac{3}{2}$	0,5
	Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được: $\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c+3a}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a+3b}}+(3a+3b+3c)\geq\frac{9}{2}$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a+2b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c+3a}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a+3b}}\geq 3$ (đpcm)	0,5

thuvientoanhoc.com