SỞ GD-ĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THCS THÀNH NHÂN

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN
HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2026- 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Đề gồm 01 trang

Câu 1: (2 điểm)

1) Một người có 4 chiếc chìa khóa khác nhau và cần mở 4 chiếc ổ khóa khác nhau. Mỗi chìa chỉ mở được đúng một ổ khóa. Người đó thử ngẫu nhiên cắm 4 chìa vào 4 ổ để mở các ổ khóa. Tính xác suất để không có ổ khóa nào mở đúng ngay lần đầu tiên.

2) Một công ty X áp dụng chính sách trả lương cho nhân viên theo hai mức: ngày làm việc bình thường và ngày làm việc đặc biệt (làm vào ngày được nghỉ), biết rằng tiền lương của một ngày làm việc đặc biệt nhiều hơn tiền lương của một ngày làm việc bình thường là 225 nghìn đồng. Trong một tháng, anh Bình là nhân viên của công ty X làm việc 24 ngày, trong đó có một số ngày làm việc đặc biệt. Bình nhận được 9 triệu đồng cho những ngày làm việc bình thường và 2,7 triệu đồng cho những ngày làm việc đặc biệt. Hỏi anh Bình được nhận bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi ngày làm việc đặc biệt?

Câu 2: (2 điểm)

1) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=5$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$

2) Giải phương trình $x^2+2x-3=2(x-1)\sqrt{x+2}$.

Câu 3: (3 điểm) Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC, qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt tia BE và tia CF thứ tự tại Q và P.

a) Giả sử AD = 3HD. Chứng minh $\tan B.\tan C=3$

b) Chứng minh rằng: $AP=AQ$.

b) Qua F vẽ đường thẳng d vuông góc với BE, đường thẳng d cắt DE tại K. Lấy điểm I sao cho H là trung điểm của IK. Chứng minh rằng đường thẳng CK vuông góc với đường thẳng AI.

Câu 4: (1 điểm) Cho các số x,y,z,t khôngmg âm thoả mãn: xy+yz+zt+tx = 1

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + t^2$

Câu 5. (2 điểm)

1) Cho a, b, c, k là các số tự nhiên thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=a+b+c+k^2-2k+1$. Chứng minh rằng $k-1$ chia hết cho 3.

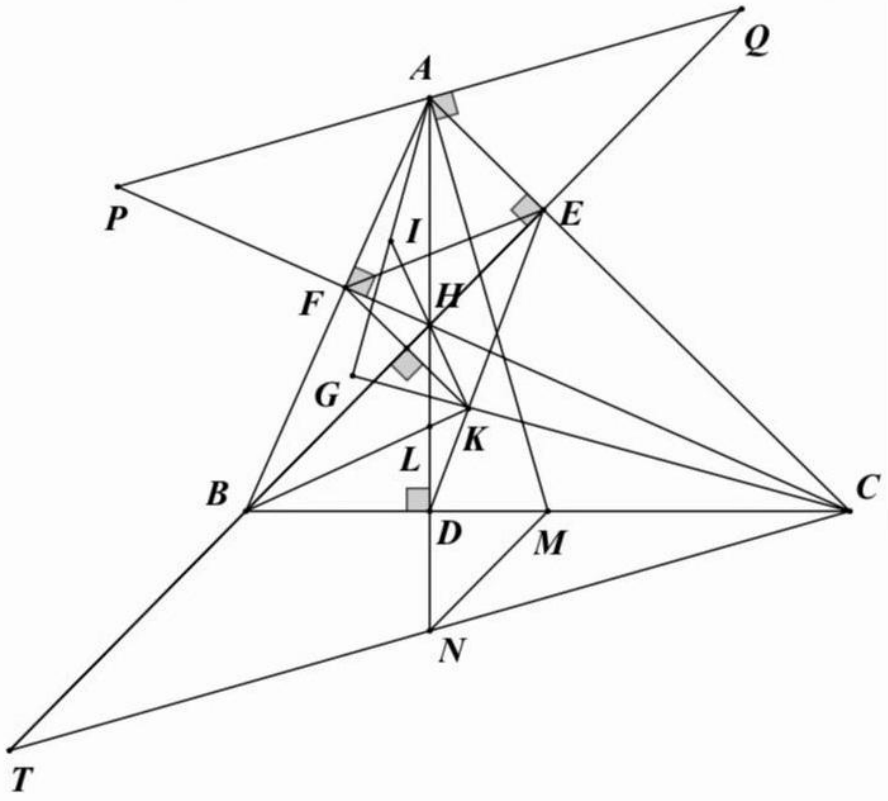
2) Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

----------HẾT----------

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Ý	Đáp án	Biểu điểm
Câu 1 2,0 điểm	*1) 1 điểm*	Vì thử ngẫu nhiên nên các kết quả đồng khả năng xảy ra. Thử chia thứ nhất có 4 cách chọn ổ khóa Thử chìa thứ 2 có 3 cách chọn ổ khóa Thử chìa thứ 3 có 2 cách chọn ổ khóa Chìa cuối cùng có 1 cách chọn ổ khóa Suy ra $n(\Omega)=4.3.2.1=24$	
		Gọi biến cố A: "Không có ổ khóa nào mở trúng ngay lần đầu tiên" Để không có ổ khóa nào mở trúng lần đầu thì: Chọn ổ khóa cho chìa của ổ 1: có 3 cách chọn (giả sử chìa 1 cắm vào ổ 2)	
		Chọn ổ khóa cho chìa của ổ 2: có 3 cách chọn Khi đó 2 chìa khóa còn lại mỗi chìa có 1 cách chọn	
		Khi đó $n(A)=3.3.1.1=9$ Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$	
	2) 1 điểm	Gọi số tiền anh Bình nhận được cho mỗi ngày làm việc đặc biệt là x (nghìn đồng), $(x>225)$ Vậy nên tiền lương một ngày bình thường của anh Bình là $x-225$ (nghìn đồng) Từ đó, ta có: Số ngày làm việc đặc biệt của anh Bình là $\frac{2700}{x}$ (ngày) Số ngày làm việc bình thường của anh Bình là $\frac{9000}{x-225}$ (ngày)	0,25
		Do anh làm tổng 24 ngày nên ta có phương trình sau: $\frac{2700}{x}+\frac{9000}{x-225}=24$	0.25
		$\frac{2700(x-225)+9000x}{x(x-225)}=24$ $11700x-607500=24x(x-225)$ $11700x-607500=24x^2-5400x$ $24x^2-17100x+607500=0$ $12(x-675)(2x-75)=0$ $\left[\begin{array}{l}x-675=0\\2x-75=0\end{array}\right.$	0.5

		$\left[\begin{array}{l} x = 675(t/\text{m}) \\ x = \dfrac{75}{2}(\text{ktm}) \end{array}\right.$ Vậy số tiền anh Bình nhận được cho một ngày làm việc đặc biệt là 675 nghìn đồng.	
Câu 2 **2,0 điểm**	*1) 1 điểm*	Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3 \Leftrightarrow a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=9 \Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$ Do đó: $a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$	0,25
		Tươngtự ta có: $b+2=b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$ $c+2=c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$	0,25
		Suy ra: $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\dfrac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}+\dfrac{\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}$ $=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$	0,25
		$=\dfrac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}=\dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$ Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.	0,25
	2) 1 điểm	Điều kiện xác định $x \geq -2$. $x^2+2x-3=2(x-1)\sqrt{x+2}$. $\Leftrightarrow (x-1)(x+3)=2(x-1)\sqrt{x+2}$. $\Leftrightarrow (x-1)\left(x+3-2\sqrt{x+2}\right)=0$.	0,5
		TH1: $x=1$, thỏa mãn. TH2: $x+3=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x+3)^2=4(x+2)$. $\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$. Thử lại thỏa mãn. Vậy $x \in \{-1;1\}$.	0,5

Câu 3 **3,0 điểm**		 	0.25
	a) 1 điểm	Xét tam giác ABD vuông tại D có $\tan B = \frac{AD}{BD}$ Xét tam giác ACD vuông tại D có $\tan C = \frac{AD}{CD}$	0.25
		Chứng minh được $\Delta BDH \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DB.DC = DH.DA$	0.25
		Khi đó $\tan B.\tan C = \frac{AD}{DC}.\frac{AD}{DB} = \frac{AD^2}{DH.DA} = \frac{AD}{DH} = 3$	0.25
	b) 1 điểm	+) Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ cắt tia AH và QH tại N và T. Có PQ vuông góc với AM. Suy ra CT vuông góc với AM. Xét ΔANC có $AM \perp CN$; $CD \perp AN$ Suy ra M là trực tâm ΔANC suy ra $NM \perp CA$	0.5
		+) Lại có $TE \perp CA$ nên $NM // TB$ Xét ΔBCT có $MB = MC$; $NM // TB$ suy ra $NT = NC$ (3)	0.25

		+) Có $PQ//TC$, áp dụng định lí tam giác đồng dạng vào ΔAHP và ΔAHQ ta có: $\frac{AP}{NC}=\frac{HA}{HN};\frac{HA}{HN}=\frac{AQ}{NT}$. Do đó $\frac{AP}{NC}=\frac{AQ}{NT}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $AP=AQ$ (đpcm).	0.25
	c) 1 điểm	Gọi L là giao điểm của của AD và BK, G là giao điểm của CK và AI Ta chỉ ra được $\Delta CDE \backsim \Delta CAB$ (c.g.c) dẫn đến: $CED=ABC$ $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c) dẫn đến: $AEF=ABC$	0.25
		Suy ra: $CED=AEF$, mà: $AEB=CEB=90^0$ Suy ra: $FEB=DEB$ Nên: EB là tia phân giác của FED ΔFEK có EB vuông góc với FK và EB là tia phân giác của FED nên ta chứng minh được EB là đường trung trực của FK. Suy ra: $\Delta BFH=\Delta BKH$ (c.c.c) Suy ra: $BKH=BFH=90^0$	0.25
		Xét ΔAFH và ΔCFB có $AFH=CFB=90^0$ và $FAH=FCB$ (Cùng phụ với ABC) Suy ra: ΔAFH đồng dạng ΔCFB (g.g), ta được: $\frac{FH}{HA}=\frac{FB}{BC}$ Suy ra: $\frac{IH}{HA}=\frac{KB}{BC}$ (Do FH = HK = HI; BF = BK) (3) Lại có: $\Delta BDL \backsim \Delta HKL$ nên $LBD=LHK$. Từ đó suy ra: $KBC=IHA$ (4)	0.25
		Từ (3) và (4) suy ra: ΔIHA đồng dạng ΔKBC (c.g.c), ta được: $BKC=AIH$ Suy ra: $GIK=GKB$ Mà: $GKI+GKB=90^0$, dẫn đến: $GKI+GIK=90^0$ Do đó ΔIGK vuông tại G nên $CK \perp AI$ (đpcm)	0.25

Câu 4 1,0 điểm		Với x và y là các số không âm Ta có $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+y \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (1) Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y $M = 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + t^2 = (x^2 +2y^2) + (z^2+2y^2) + (4x^2 + \frac{t^2}{2})+(4z^2 + \frac{t^2}{2})$	0.25
		Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có: $(x^2 +2y^2) \geq 2\sqrt{2x^2y^2} = 2\sqrt{2}xy$ $(z^2+2y^2) \geq 2\sqrt{2z^2y^2} = 2\sqrt{2}zy$ $(4x^2 + \frac{t^2}{2}) \geq 2\sqrt{4x^2\frac{t^2}{2}} = 2\sqrt{2}xt$ $(4z^2 + \frac{t^2}{2}) \geq 2\sqrt{4z^2\frac{t^2}{2}} = 2\sqrt{2}zt$	0.25
		$\Rightarrow M = 5x^2 + 4y^2 +5z^2 + t^2 = (x^2 +2y^2) + (z^2+2y^2) + (4x^2 + \frac{t^2}{2})+(4z^2 +\frac{t^2}{2}) \geq 2\sqrt{2}xy+2\sqrt{2}zy+2\sqrt{2}zt+2\sqrt{2}xt = 2\sqrt{2}$	0.25
		Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = z = \sqrt{2}y; \\ t = 2\sqrt{2}x \\ xy+yz+zt+xt = 1 \end{cases} \Rightarrow x = z = \frac{\sqrt{10\sqrt{2}}}{10}; y = \frac{\sqrt{5\sqrt{2}}}{10}; t = \frac{2\sqrt{5\sqrt{2}}}{5}$ Kết luận	0.25
Câu 5 2,0 điểm	*1)*	Bài toán phụ: Với x là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $x^3 - x$ luôn chia hết cho 3 Chứng minh: Ta có: $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ Do đó: $x^3 - x$ luôn chia hết cho 3	0,25
		Ta có : $a^3 + b^3 + c^3 = a+b+c+k^2-2k+1$ Hay $a^3-a+b^3-b+c^3-c = k^2-2k+1$ Hay: $(k-1)^2 = a^3-a+b^3-b+c^3-c$	0,25

		Áp dụng bài toán ta có: $a^3 - a \vdots 3$ $b^3 - b \vdots 3$ $c^3 - c \vdots 3$ Nên: $(k-1)^2 \vdots 3$	0,25
		Mà 3 là số nguyên tố Nên : $k-1 \vdots 3$ (đpcm)	0,25
	2) 1 điểm	Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63. Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).	0.5
		Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.	0.5

(Lưu ý: HS làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)