BÀI GIẢNG 1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

.....PHẦN 1...

Biên soạn: Nguyễn Đăng Dũng

Bài toán 1. Xác định mặt cầu

Phương pháp:

- *Muốn chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một mặt cầu ta chứng minh các điểm đó cùng cách đều một điểm O cố định một khoảng $R>0$ không đổi.*
- *Muốn chứng minh một đường thẳng D tiếp xúc với một mặt cầu $S(O;R)$, ta chứng minh $d(O,D)=R$.*
- *Muốn chứng minh một mặt phẳng (P) tiếp xúc với một mặt cầu $S(O;R)$, ta chứng minh $d(O,(P))=R$.*
- *Tập hợp các điểm M trong không gian nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB.*

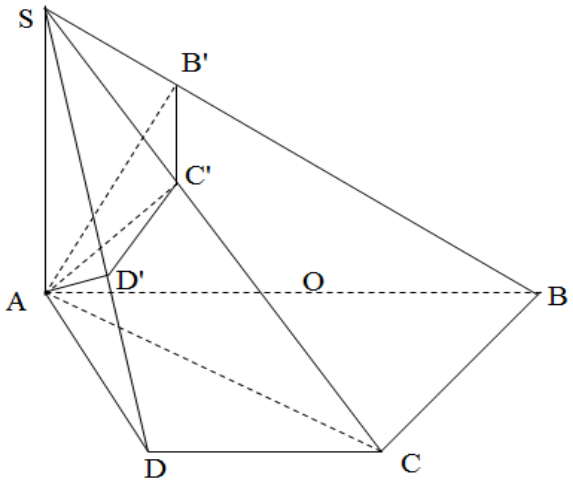
Ví dụ 1:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa hình lục giác đều, $AB=2a, BC=CD=DA=a$, $SA\perp(ABCD), SA=h$. Mặt phẳng qua A vuông góc với SB, cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh rằng các điểm A,B,C,D, B',C',D' cùng thuộc một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đó

Giải

Ta có các điểm B',C',D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB,SC,SD.

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều với $AB=2a, BC=CD=DA=a$, nên nếu gọi O là trung điểm của AB thì $OA=OB=OC=OD$ (1)



Suy ra ΔACB vuông tại C, ΔADB vuông tại D.

Vì $BC\perp SA, BC\perp AC\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AC'$

Mặt khác

$AC'\perp SC\Rightarrow AC'\perp(SBC)\Rightarrow AC'\perp BC'$

Tương tự ta cũng có $AD'\perp BD'$

Do đó

$\Delta AB'B$ vuông tại $B'\Rightarrow OA=OB=OB'$ (2)

$\Delta AC'B$ vuông tại $C'\Rightarrow OA=OB=OC'$ (3)

$\Delta AD'B$ vuông tại $D'\Rightarrow OA=OB=OD'$ (4)

thuvientoanhoc.com

Từ (1), (2), (3), (4) ta có $OA=OB=OC=OD=OB'=OC'=OD'=a$

Vậy rằng các điểm A,B,C,D, B',C',D' cùng thuộc một mặt cầu tâm O bánh kính bằng a.

Ví dụ 2:

Cho tam giác ABC đều , cạnh a, nội tiếp đường tròn tâm (O) chứa trong mặt phẳng (P). Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), dựng $SD\perp(P)$ và $SD=a.$

1) Chứng minh rằng ΔSAC và ΔSAB vuông.
2) Xác định tâm mặt cầu đi qua 5 điểm S,A,B,C,D.

Giải

1) Do AD là đường kính của (O) nên

$\angle DCA=90^0\Rightarrow CA\perp DC$

Mà $SD\perp(ABC)\Rightarrow SD\perp CA$

$\Rightarrow CA\perp(SDC)\Rightarrow CA\perp SC$

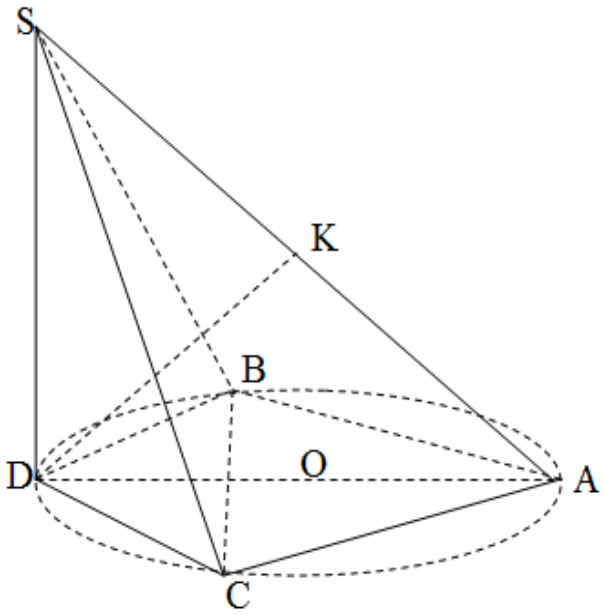
SAC là tam giác vuông tại C.

Tương tự ta có

$\begin{cases}AB\perp BD\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SDB)\Rightarrow AB\perp SB$

$\Rightarrow SAB$ là tam giác vuông tại B.

(đpcm)



2). Gọi K là trung điểm cuả SA

Theo chứng minh câu 1 ta có

SAC là tam giác vuông tại C

$\Rightarrow KA=KS=KC$

SAB là tam giác vuông tại B

$\Rightarrow KA=KS=KB$

SAD là tam giác vuông tại D

$\Rightarrow KA=KS=KD$

$\Rightarrow KA=KA=KC=KD=KS$

Vậy K là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, D, S

Bài tập

1. Cho hình chóp đều $S.ABC$, cạnh đáy $AB=a$, cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60°. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. *Đáp số :* $R=\frac{2a}{3}$.

thuvientoanhoc.com

2. Cho mặt cầu đường kính $AB = 2R$ Cắt mặt cầu bằng một mặt phẳng vuông góc với AB sao cho $AH = x$ $(0 < x < 2R)$ ta được thiết diện là đường tròn (T). Gọi $MNPQ$ là hình vuông nội tiếp đường tròn (T).

a) Tính theo R và x bán kinh đường tròn (T), cạnh của hình vuông $MNPQ$ và các đoạn thẳng AM, BM .*Đáp số: Cạnh hình vuông :* $\sqrt{2}.\sqrt{2xR - x^2}$, $AM = \sqrt{2xR}$; $BM = \sqrt{4R^2 - 2xR}$.

b) Tính thể tích của khối đa diện tạo bởi hai hình chóp $AMNPQ$ và $BMNPQ$. Tính x để thể tích này đạt giá trị lớn nhất. $V = \frac{4}{3}R\left(2xR - x^2\right)$; $V_{Max} = \frac{4}{3}R^3 \Leftrightarrow x = R$.

3. Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân $ABCD$ với $AB = 2a$, $BC = CD = DA = a$. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy một điểm di động S. Một mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại P, Q, R theo thứ tự đó.

a) CMR 7 điểm A,B,C,D,P,Q,R luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính diện tích mặt cầu đó.*Đáp số: Mặt cầu đường kính AB và* $S = 4\pi a^2$.

b) CMR tứ giác $CDRQ$ là một tứ giác nội tiếp và đường thẳng QR luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên nửa đường thẳng Ax.

c) Cho $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.APQR$ và diện tích của tứ giác $APQR$.*Đáp số:* $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}, S_{APQR} = \frac{45\sqrt{7}a^2}{224}$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a,\ AD = DC = a,\ SA \perp (ABC),\ SA = a$.

a) Tìm tâm mặt cầu (S) qua 4 điểm S, A, C, D . Tìm chu vi đường tròn giao tuyến của (SAB) với mặt cầu (S) .*Đáp số:* $P = \pi a\sqrt{2}$.

b) Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.

c) Chứng minh AD tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

thuvientoanhoc.com

BÀI GIẢNG 1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

.....PHẦN 2...

Biên soạn: Nguyễn Đăng Dũng

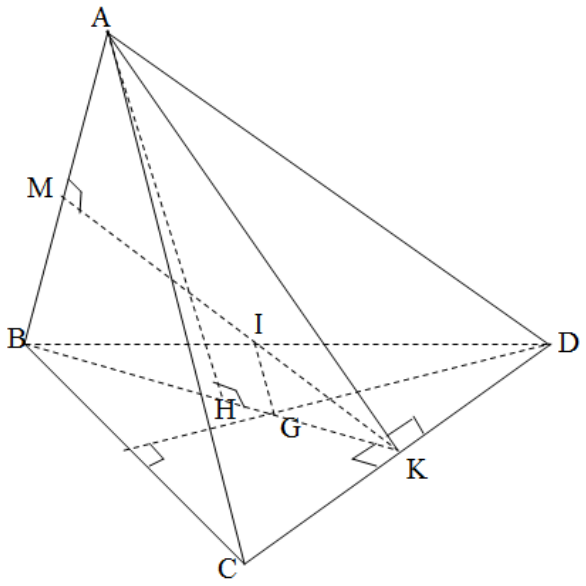
Bài toán 1: Diện tích và thể tích khối cầu

Phương pháp:

- *Mặt cầu bán kính* R *có diện tích là:* $S = 4\pi R^2$.
- *Khối cầu bán kính* R *có thể tích là:* $V : \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ví dụ 1: Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a

Giải



Trong mặt phẳng (BCD)

gọi K là trung điểm CD, G là trọng tâm của ΔBCD

Do ΔBCD và ΔACD đều nên

$BK \perp CD, AK \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABK)$

Trong mặt phẳng (ABK) dựng

$AH \perp BK \Rightarrow AH \perp (BCD)$

Qua G dựng đường thẳng

$d // AH \Rightarrow d \perp (BCD)$

Dựng đường trung trực của AB cắt d tại I

Khi đó I là tâm mặt cầu

Tam giác BCD đều cạnh a, BK là đường cao

$\Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ACD đều cạnh a, AK là đường cao

thuvientoanhoc.com

$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta ABK$ đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$MK = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{4}a$

$GK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; BG = 2GK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta KBM \sim \Delta KIG \Rightarrow \frac{BM}{GI} = \frac{MK}{GK} \Rightarrow GI = \frac{BM.GK}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{3}{4}a} = \frac{a}{6}$

$BI^2 = BG^2 + IG^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{13a^2}{36} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

Vậy khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm I,bán kính $R = BI = \frac{2a}{3}$.Khối cầu có thể tích là

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^3 = \frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3 \left(dvtt\right)$

Ví dụ 2:

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Biết $AM \perp CN$. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

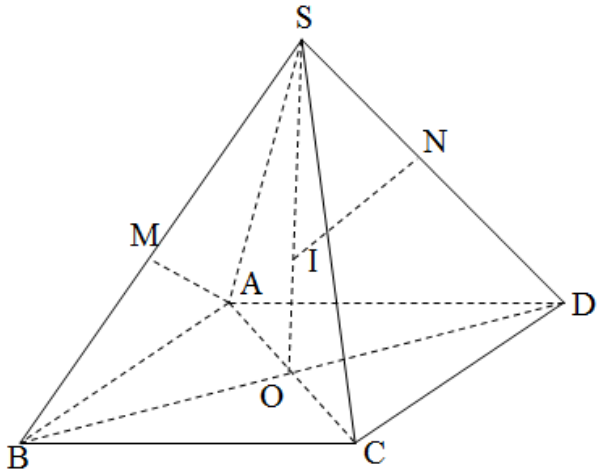
Giải

thuvientoanhoc.com

Do $AM \perp CN$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}}{2}.\dfrac{\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{CD}}{2} = 0$

$\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \qquad (1)$



Đặt $x = SA = SB = SC = SD$, ta có

$(1) \Leftrightarrow x^2\cos\angle ASC - ax\cos\angle SCD - ax\cos\angle SAB - a^2 =$

$\Leftrightarrow x^2\cos\angle ASC - 2ax\cos\alpha - a^2 = 0 \qquad (2)$

$(\alpha = \angle SAB = \angle SCD)$

Xét ΔASB có

$SB^2 = AS^2 + AB^2 - 2AS.AB.\cos\angle SAB$

$\Rightarrow x^2 = x^2 + a^2 - 2ax.\cos\angle SAB$

$\Rightarrow a^2 = 2ax.\cos\angle SAB \qquad (3)$

Xét ΔASC có

$SC^2 = AS^2 + AC^2 - 2AS.AC.\cos\angle SAC$

$\Rightarrow 2a^2 = 2x^2 - 2ax.\cos\angle SAC$

$\Rightarrow x^2\cos\angle SAC = x^2 - a^2 \qquad (4)$

Từ (2), (3), (4) ta có $x = a\sqrt{3}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ thì I là giao điểm của SO với mặt phẳng trung trực của SD. Nghĩa là $I \in SO, IN \perp SD$

Ta có ΔSIN đồng dạng với $\Delta SDO \Rightarrow \dfrac{SI}{SD} = \dfrac{SN}{SO}$

$$\Rightarrow SI = \frac{SN.SD}{SO} = \frac{\frac{1}{2}SD.SD}{SO} = \frac{3a^2}{2\sqrt{SD^2 - OD^2}} = \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}a}{2\sqrt{5}}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I và bánh kính $R = SI = \dfrac{3\sqrt{2}a}{2\sqrt{5}}$

thuvientoanhoc.com

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4.\pi\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{18}{5}\pi a^2\,(dvdt)$

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\pi a^3\,(dvtt)$

Bài tập

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $SH = \frac{3R}{2}$, nội tiếp mặt cầu $(O;R)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SC.

a) Tìm giao tuyến của (BMN) và $(ABCD)$. Chứng minh giao tuyến này tiếp xúc với mặt cầu $(O;R)$.

b) Chứng minh 6 điểm A, B, C, D, M, N cùng thuộc một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu này. *Đáp số:* $S = 3\pi a^2$.

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với SB tại S, cắt khối cầu $(O;R)$. Tính diện tích thiết diện thu được. *Đáp số:* $S = \frac{\pi R^2}{4}$.

d) Tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài toán 2: Tiếp tuyến của mặt cầu

Phương pháp:

1) *Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.*

2) *Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R) \Leftrightarrow d(O,\Delta) = R$.*

3) *Trong trường hợp điểm A nằm ngoài mặt cầu thì:*

- *Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu, chúng nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu A.*

thuvientoanhoc.com

- *Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.*
- *Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.*

Ví dụ 1:

Cho hình cầu (S) tâm O bán kính $R=5$. Tam giác ABC với ba cạnh $BC=13, CA=14, AB=15$, trong đó cả ba cạnh cùng tiếp xúc với mặt cầu. Tính khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC)

Giải

Giả sử AB, BC, CA lần lượt tiếp xúc với mặt cầu tại N, M, P. Như vậy ta có

$ON \perp AB, OM \perp BC, OP \perp CA$.

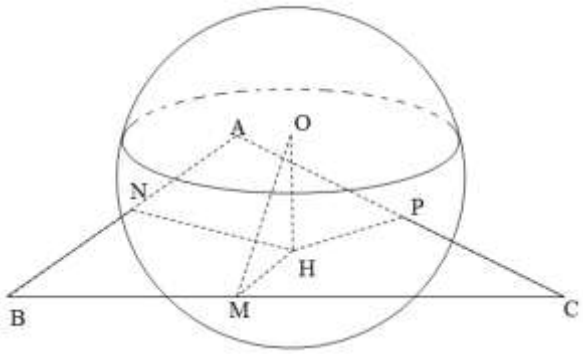
Kẻ $OH \perp (ABC)$. Theo định lí ba đường vuông góc ta có

$HM \perp BC, HN \perp BC, HP \perp CA$

Vì $OM = ON = OP = R \Rightarrow HM = HN = HP$

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với bán kính $r = HM$

Áp dụng công thức $r = \frac{S}{p}$.



Ta có $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$

Theo công thức Hê-rông ta có

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21.8.7.6} = 84$ Từ

đó ta có $r = 4$.

Do vậy theo định lí Pitago thì khoảng cách từ O tới (ABC) là

$OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Ví dụ 2:

Giải

thuvientoanhoc.com

Bài tập

1. Cho khối cầu tâm O bán kính R và đường kính SS'. Một mặt phẳng vuông góc với SS' cắt khối cầu theo một đường tròn tâm H. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn này. Đặt $SH = x$ $(0 < x < 2R)$.

a) Tính các cạnh của tứ diện $S.ABC$ theo R và x. *Đáp số:* $SA = SB = SC = \sqrt{2xR}$

b) Xác định x để $S.ABC$ là tứ diện đều, khi đó tính thể tích của tứ diện và CMR $S'A,\ S'B,\ S'C$ đôi một vuông góc. *Đáp số* $x = \dfrac{4R}{3}$.

2. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và (P) cách O một khoảng cách h $(0 < h < R)$. Gọi (L) là giao tuyến của mặt cầu (S) và (P). Lấy A là một điểm cố định thuộc (L). Một góc vuông xAy trong (P) quay quanh điểm A. Các cạnh Ax, Ay cắt (L) ở C và D. Đường thẳng đi qua A là vuông góc với (P) cắt mặt cầu ở B.

a) CMR $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ luôn không đổi.

b) Với vị trí nào của CD là diện tích ΔBCD lớn nhất?

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CD. CMR H luôn thuộc một đường tròn cố định.

3. Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C tùy ý. Kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc đoạn AB). Gọi I là trung điểm CH. Trên nửa đường thẳng $Ix \perp (ABC)$ tại I, lây điểm S sao cho $ASB = 90^\circ$.

a) CMR $\Delta CAB = \Delta SAB$.

b) CMR khi C chạy trên nửa đường tròn đó thì (SAB) cố định.

c) Cho $AH = x$. Tính thể tích tứ diện $S.ABCD$ theo R, x. Tìm x để thể tích ấy đạt giá trị lớn nhất. *Đáp số:* $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6} Rx(2R - x)$, $V_{Max} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} R^3 \Leftrightarrow x = R$.

d) CMR khi C chạy trên nửa đường tròn đó thì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABI$ thuộc một đường thẳng cố định.

thuvientoanhoc.com