UBND PHƯỜNG TÂN PHÚ
TRƯỜNG THCS HOÀNG DIỆU

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH THAM GIA HSG CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC: 2026 - 2027
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 120 phút
(Không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 31/10/2026

Bài 1 (3,0 điểm): Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $(a+2)(b+2)=2026$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M=\frac{\sqrt{(a^2+4a+2030)(b^2+4b+2030)}}{a+b+4}$$

Bài 2 (5,0 điểm):

a) Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-4=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=4$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

Bài 3 (4,0 điểm):

a) Cho số thực dương x. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x^2+1}\geq -\frac{4}{9}x+\frac{7}{9}$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2025a^2}{2a^2+1}+\frac{2025b^2}{2b^2+1}+\frac{2025c^2}{2c^2+1}$$

Bài 4 (6,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn ($AB<AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H ($D\in AC, E\in AB$). Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH, F là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh bốn điểm I, E, M, D cùng thuộc một đường tròn và ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

b) Đường thẳng ED cắt đường thẳng BC tại K, MI cắt ED tại P. Chứng minh rằng $MP\cdot MI=ME^2$ và $KB\cdot FC=KC\cdot FB$.

Bài 5 (2,0 điểm): Gọi T là tập hợp các số nguyên dương có thể biểu diễn được dưới dạng x^2+2y^2 với x,y là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu m và n là hai phần tử của tập hợp T thì mn cũng là một phần tử của tập hợp T.

–HẾT–

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

thuvientoanhoc.com

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

Bài 1.

Từ $(a+2)(b+2)=2026$ ta có:

$a^2+4a+2030=(a+2)^2+2026=(a+2)^2+(a+2)(b+2)=(a+2)(a+b+4)$.

Tương tự $b^2+4b+2030=(b+2)(a+b+4)$.

Suy ra $(a^2+4a+2030)(b^2+4b+2030)=(a+2)(b+2)(a+b+4)^2=2026(a+b+4)^2$.

Vì $a,b>0$ nên $a+b+4>0$, do đó $M=\dfrac{\sqrt{2026(a+b+4)^2}}{a+b+4}=\dfrac{\sqrt{2026}(a+b+4)}{a+b+4}=\sqrt{2026}$.

Vậy $M=\sqrt{2026}$.

Bài 2.

a) Ta có $\Delta=(2m-1)^2-4(m^2-4)=17-4m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0\Leftrightarrow m<\dfrac{17}{4}$.

Theo định lí Vi-ét: $x_1+x_2=2m-1$, $x_1x_2=m^2-4$.

$|x_1-x_2|=4\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$

$\Leftrightarrow(2m-1)^2-4(m^2-4)=16\Leftrightarrow 17-4m=16\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\dfrac{1}{4}$.

b) Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 6$.

Phương trình tương đương: $\left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow(x-5)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$.

Với $-\dfrac{1}{3}\le x\le 6$ thì $3x+1\ge 0$ nên biểu thức trong ngoặc luôn dương.

thuvientoanhoc.com

Do đó $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 3.

a) Với $x>0$, ta có $2x^2+1>0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$9 \geq (7-4x)(2x^2+1) \Leftrightarrow 9 \geq 14x^2+7-8x^3-4x \Leftrightarrow 8x^3-14x^2+4x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+2) \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với $x>0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

b) Ta có $\frac{2025a^2}{2a^2+1}=\frac{2025}{2}\cdot\frac{2a^2}{2a^2+1}=\frac{2025}{2}\left(1-\frac{1}{2a^2+1}\right)$.

Tương tự với b, c. Suy ra $P=\frac{2025}{2}\left(3-\frac{1}{2a^2+1}-\frac{1}{2b^2+1}-\frac{1}{2c^2+1}\right)$.

Áp dụng câu a) cho $a,b,c>0$:

$$\frac{1}{2a^2+1}+\frac{1}{2b^2+1}+\frac{1}{2c^2+1} \geq -\frac{4}{9}(a+b+c)+\frac{21}{9}=-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{21}{9}=1.$$

Do đó $P \leq \frac{2025}{2}(3-1)=2025$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2025, đạt được khi $a=b=c=1$.

Bài 4.

a) Tam giác AEH vuông tại E có EI là đường trung tuyến nên $IE=IA=IH=\frac{AH}{2}$, suy ra tam giác IAE cân tại I, do đó $\widehat{IEA}=\widehat{IAE}=\widehat{BAF}$.

Tam giác BEC vuông tại E có EM là đường trung tuyến nên $ME=MB=MC=\frac{BC}{2}$, suy ra tam giác MBE cân tại M, do đó $\widehat{MEB}=\widehat{MBE}=\widehat{ABC}$.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AF \perp BC$, suy ra $\widehat{BAF}+\widehat{ABC}=90^\circ$.

Do đó $\widehat{IEM}=180^\circ-\widehat{IEA}-\widehat{MEB}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{IDM}=90^\circ$.

Suy ra bốn điểm I, E, M, D cùng thuộc đường tròn đường kính IM.

Vì $\widehat{AEH}=90^\circ$ nên E thuộc đường tròn đường kính AH (tâm I). Mà $ME \perp IE$ tại E nên ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

thuvientoanhoc.com

b) Chứng minh $MP \cdot MI = ME^2$:

Theo câu a) ta có $ME = MD = \dfrac{BC}{2}$ và $IE = ID = \dfrac{AH}{2}$ nên MI là đường trung trực của đoạn ED, suy ra $MI \perp ED$ tại P.

Tam giác MEI vuông tại E có EP là đường cao nên $MP \cdot MI = ME^2$.

Chứng minh $KB \cdot FC = KC \cdot FB$:

Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BEDC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{BED} = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Vì $\widehat{AFB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABFD$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BAF}$.

Mà $\widehat{BCE} = \widehat{BAF}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) nên $\widehat{BDE} = \widehat{BDF}$.

Vì $AB < AC$ nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, suy ra $\widehat{BED} + \widehat{EBC} = 180^\circ - \widehat{ACB} + \widehat{ABC} > 180^\circ$. Do đó hai đường thẳng ED và BC cắt nhau tại điểm K nằm khác phía với C đối với đường thẳng AB, tức là B nằm giữa K và F, E nằm giữa K và D.

Suy ra DB là tia phân giác của $\widehat{KDF}$. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác DKF ta có $\dfrac{KB}{FB} = \dfrac{DK}{DF}$.

Qua F kẻ đường thẳng song song với DC, cắt đoạn DK tại G. Vì $DC \perp DB$ nên $FG \perp DB$.

Gọi L là giao điểm của DB và GF. Vì G thuộc đoạn DK nên DL là đường phân giác của $\widehat{GDF}$. Mặt khác $FG \perp DB$ nên $DL \perp GF$.

Tam giác DGF có đường phân giác DL đồng thời là đường cao nên cân tại D, suy ra $DG = DF$.

Tam giác KDC có $FG \parallel DC$ nên theo định lí Thales: $\dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KG}{KD}$, suy ra $\dfrac{KC - KF}{KC} = \dfrac{KD - KG}{KD}$, hay $\dfrac{FC}{KC} = \dfrac{GD}{KD}$.

Do đó $\dfrac{KC}{FC} = \dfrac{KD}{GD} = \dfrac{DK}{DF}$.

Suy ra $\dfrac{KB}{FB} = \dfrac{KC}{FC}$, hay $KB \cdot FC = KC \cdot FB$.

Bài 5.

Giả sử $m, n \in T$, khi đó tồn tại các số nguyên a, b, c, d sao cho $m = a^2 + 2b^2$ và $n = c^2 + 2d^2$.

Ta có $mn = (a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2) = a^2c^2 + 4b^2d^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2$

$= \left(a^2c^2 - 4abcd + 4b^2d^2\right) + 2\left(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2\right)$

thuvientoanhoc.com

$= (ac - 2bd)^2 + 2(ad + bc)^2$.

Đặt $x = ac - 2bd$, $y = ad + bc$ thì x, y là các số nguyên và $mn = x^2 + 2y^2$.

Mặt khác m, n là các số nguyên dương nên mn là số nguyên dương.

Vậy $mn \in T$.

---------- HẾT ----------

thuvientoanhoc.com