SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

Mã đề 1201

(*Đề thi có 06 trang, gồm 32 câu*)

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LẦN 9
NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 23/11/2026

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. (8,0 điểm). **Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20.** Mỗi câu hỏi chỉ được chọn 1 phương án.

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Khi đó $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** $-\frac{a^2}{2}$ **C.** $-\frac{a^2}{6}$ **D.** $\frac{a^2}{6}$

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'},\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 3. Cho phương trình $3\sin x.\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x$. Gọi (H) là đa giác có đỉnh là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác. Tính diện tích hình (H).

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; N là điểm trên đường thẳng BD_1; P là điểm trên đường thẳng CC_1 sao cho M,N,P thẳng hàng. Khi đó tỉ số $\frac{\left|\overrightarrow{NP}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán lớp 10A

Điểm số môn Toán	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số học sinh đạt được	1	6	12	14	8

Điểm trung bình của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

A. 6,1. **B.** 6,2. **C.** 6,0. **D.** 5,9.

Câu 6. Khảo sát điểm thi TSA đợt 1 năm 2026 của 40 học sinh lớp 12A

Nhóm	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Tần số	2	10	16	8	2	2

Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng:

A. $\Delta_Q=16$. **B.** $\Delta_Q=14,5$. **C.** $\Delta_Q=13,5$. **D.** $\Delta_Q=10,6$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy), khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Câu 10. Cho $\log_2 x=m, \log_3 x=n, \log_{30} x=p$. Tính $\log_5 x$ theo m, n, p (giả thiết các biểu thức logarit đều có nghĩa).

A. $\log_5 x=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}$. **B.** $\log_5 x=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$.

C. $\log_5 x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}$. **D.** $\log_5 x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$.

Câu 11. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $[0;\pi]$.

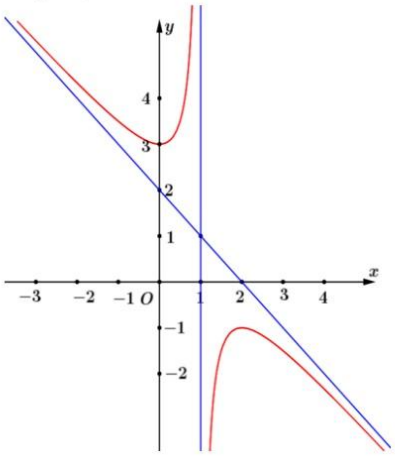
A. $\dfrac{47\pi}{18}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{18}$. **C.** $\dfrac{45\pi}{18}$. **D.** $\dfrac{7\pi}{18}$.

Câu 12. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y+1$.

A. $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-10}{9}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+28}{9}$.

C. $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-28}{21}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Câu 13. Cho hàm số hữu tỉ $y=ax+2+\dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Giá trị của $P=a+b+c$ bằng



A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 14. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a-b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương và $c\in[1;15]$. Tính $S=a+b+c$.

A. 4. **B.** -2. **C.** -22. **D.** 5.

Câu 15. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Giá trị $a+4b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 16. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}\left(m^3-1\right)x^4-x^3+\frac{2m-5}{2}x^2-3x+m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-500;500)$ để hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2};4\right]$?

A. 500. **B.** 1002. **C.** 501. **D.** 1001.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN=2NB$. Mặt phẳng qua M,N cắt cạnh SD và SC lần lượt tại Q và P. Tỉ số $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ lớn nhất bằng $\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $a+2b$.

A. 12. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 19.

Câu 18. Một người mua một căn hộ với giá một tỉ đồng. Người đó trả trước 50% số tiền. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là 6% mỗi năm. Do thu nhập mỗi tháng của người này khoảng 10 triệu đồng nên anh ấy lựa chọn hình thức thanh toán là sau mỗi tháng sẽ trả số tiền cố định là 4 triệu đồng cả gốc lẫn lãi (trừ tháng cuối). Tính số tháng tối thiểu để người đó trả hết nợ.

A. 178 tháng. **B.** 198 tháng. **C.** 179 tháng. **D.** 197 tháng.

Câu 19. Chọn ngẫu nhiên 3 số khác nhau từ 35 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được ba số lập thành một cấp số cộng có công sai là số lẻ bằng

A. $\frac{9}{385}$. **B.** $\frac{8}{385}$. **C.** $\frac{17}{385}$. **D.** $\frac{30}{112019}$.

Câu 20. Cho dãy gồm 2021 số được sắp xếp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4;C_5^4;...;C_{2023}^4;C_{2024}^4$. Xét bộ ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết tổng của ba số này là một số lẻ. Hỏi có bao nhiêu bộ số trong dãy số trên?

A. 758. **B.** 1010. **C.** 505. **D.** 504.

PHẦN II. (7,2 điểm). **Trắc nghiệm đúng - sai**. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $x=1;x=3$ thỏa mãn $f(0)+f(1)=4$.

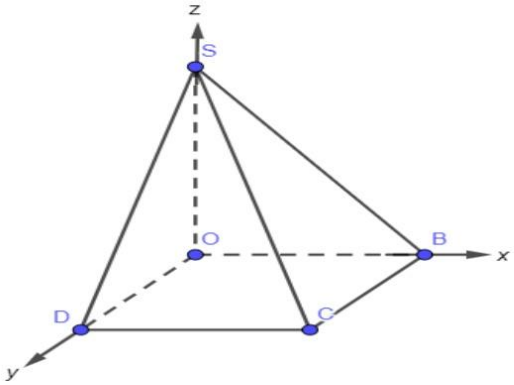
a) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có phương trình $y=mx+n$. Khi đó $m-n=8$.

b) Xét hàm số $h(x)=f\left(f(x)\right)$. Khi đó số nghiệm của phương trình $h'(x)=0$ là 8.

c) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m\in(-6;6)$ để đồ thị hàm số $y=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$. Khi đó tổng tất cả các phần tử của S bằng 2.

d) Số giá trị nguyên của $m\in[-2025;2025]$ để đồ thị hàm số $y=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là 2007.

Câu 2. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có S thuộc tia Oz, tứ giác $OBCD$ là hình chữ nhật và $B(\sqrt{2};0;0)$ $D(0;2\sqrt{2};0)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(OBCD)$ bằng α với $\tan\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ (*tham khảo hình vẽ*).



a) Biết $C(x;y;z)$, khi đó $x+y+z=3\sqrt{2}$.

b) Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thuộc cạnh SC. Mặt phẳng (β) qua E, song song với $(OBCD)$, cắt các cạnh SB, SO, SD lần lượt tại F, G, H. Biết $\dfrac{V_{S.EFGH}}{V_{S.CBOD}}=\dfrac{1}{27}$, khi đó $2x-y+3z=-8$.

c) Xét điểm K thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KS}+3\overrightarrow{KC}\right|$ bằng $6\sqrt{2}$.

d) Gọi các điểm M và N thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $7(x+2y)$ bằng 17.

Câu 3. Công ty nước sạch Hà Nội thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	$[5;8)$	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 15.

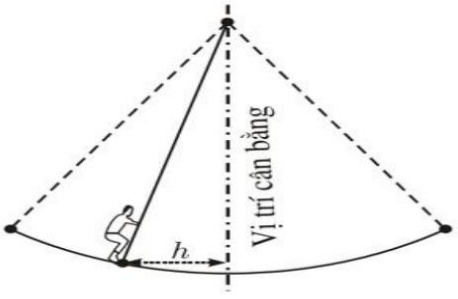
b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 11,375.

c) Mốt của mẫu số liệu là $M_o=10,0625$.

d) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất, Khi đó, công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $16,79\ m^3$ nước trở lên.

Câu 4. Lễ hội văn hóa du lịch Thác Mây được tổ chức vào dịp 30/4 hằng năm có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (*mô phỏng ở hình vẽ dưới đây*) được biểu diễn qua thời gian t ($t\geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d>0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp trái lại. Một người chơi đạt cảm giác mạnh nhất khi ở vị trí xa nhất so với vị trí cân bằng.





a) Hàm số $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$ tuần hoàn với chu kỳ $T=3$.

b) Trong khoảng thời gian 3 giây đến 4 giây kể từ lúc bắt đầu chơi, vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu.

c) Trong 10 giây đầu tiên, người chơi đu qua vị trí cân bằng 5 lần.

d) Trong khoảng thời gian 1 phút, người chơi đu đạt được cảm giác mạnh 40 lần.

Câu 5. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm $A'B'$ và BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt bên $BCC'B'$, $DCC'D'$, $ADD'A'$ và $ABB'A'$. Gọi F' là trung điểm BF, N' thuộc đoạn CD' sao cho $N'C=4N'D'$, $C_1=F'M\cap B'C'$, $D_1=F'N'\cap A'D'$ và $F_1=FM\cap B'C'$.

a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(DD'B')$ bằng $a\sqrt{2}$.

b) $V_{F'EMN'}=\frac{2}{5}V_{F'C_1ED_1}$.

c) Thể tích khối tứ diện $F'MN'E$ bằng $\frac{31}{480}a^3$.

d) H là điểm thay đổi trên cạnh AD (H không trùng với A và D). Mặt phẳng (α) qua E vuông góc với đường thẳng HF cắt các đường thẳng NP và MN lần lượt tại K và L. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức: $T=\frac{2}{QK}+\frac{1}{QL}$ bằng $\frac{\sqrt{10}}{a}$.

Câu 6. Có hai hộp đựng bi, mỗi viên bi chỉ mang một màu đen hoặc trắng. Xét phép thử (T) lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và hộp thứ nhất có x viên bi, trong đó có a viên bi đen; hộp thứ hai có y viên bi, trong đó có b viên bi đen.

a) Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử (T). Khi đó $n(\Omega)=20$.

b) Biết xác suất để lấy được hai viên bi đen bằng xác suất để lấy được hai viên bi trắng. Khi đó $\frac{x}{a}=\frac{y}{y-b}$

c) Biết $a=3$, $b=7$ và xác suất để lấy được hai viên bi khác màu bằng $\frac{29}{50}$. Khi đó $x+2y=32$.

d) Biết xác suất để lấy được hai viên bi đen là $\frac{55}{84}$ và xác suất để lấy được hai viên bi trắng bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in N$, $(a,b)=1$. Khi đó $a+b=29$.

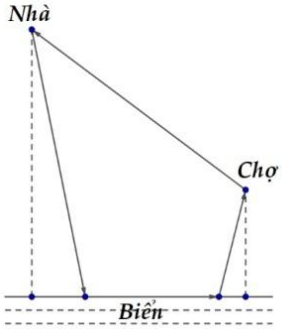
PHẦN III. (4,8 điểm). **Trắc nghiệm trả lời ngắn.** *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x)=f'(x^3+2)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2026;\,2027]$ để hàm số $y=f(x-m)$ đồng biến trên $(-\infty;\,0)$?

Câu 2. Nhà anh Hùng cách bờ biển $1km$. Mỗi buổi sáng anh Hùng chạy bộ từ nhà ra bờ biển, sau đó chạy dọc bờ biển $500m$, rồi anh chạy qua chợ hải sản để mua thức ăn trong ngày, cuối cùng anh chạy thẳng về nhà (*tham khảo hình vẽ*). Biết chợ hải sản cách bờ biển $400m$ và cách nhà anh Hùng $1km$, tính quãng đường ngắn nhất mà anh Hùng đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị mét và làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $2a$, khoảng cách giữa BC và AB' là $2a$. Khi thể tích khối hộp là nhỏ nhất thì khoảng cách giữa AC và BD' là d. Tính $\frac{14d}{\sqrt{24}a}$?

Câu 4. Xét các số thực không âm x, y thoả mãn $y\log(y+4x+1)=(x^2-2x+y)\log(x+1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ $(x;y)$ để $2x-y$ nhận giá trị là một số nhiên?

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-2;3)$, $B(1;2;-3)$. Xét các điểm M,N di động trên (Oxy) sao cho $MN=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2MA^2+3NB^2$ *(Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Câu 6. Bạn Quân có 19 buổi ôn tập chuẩn bị cho kỳ thi chọn đội tuyển HSG môn Toán của trường THPT A. Bạn muốn lên một kế hoạch ôn tập 19 buổi đó cho bản thân bằng việc lựa chọn các buổi ôn tập ở nhà hoặc lên thư viện, theo 2 quy tắc sau:

i. Buổi thứ nhất và buổi cuối bạn sẽ ở nhà ôn tập.

ii. Không lên thư viện quá 2 buổi liên tiếp và cũng không ôn tập ở nhà 2 buổi liên tiếp nào. Hỏi bạn Quân có thể lập được tối đa bao nhiêu kế hoạch?

……HẾT……

Thí sinh thực hiện nghiêm túc Quy chế thi. CBCT không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1.

Tứ diện $ABCD$ đều nên O là tâm tam giác đều BCD và $AO \perp (BCD)$, suy ra $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$.

Ta có $OB = OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = 120^\circ$.

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}.$$

Chọn C.

Câu 2.

Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên $\overrightarrow{A'G'} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

$$\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Chọn B.

Câu 3.

$$3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = \sin x \Leftrightarrow \sin x\left(3\cos^2 x - \sin^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Các điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ứng với các góc $0; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \pi; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}$.

Chia (H) thành 6 tam giác chung đỉnh O, có hai cạnh bên bằng 1 và góc ở đỉnh lần lượt là $\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}$.

$$S = \frac{1}{2}\left(4\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + 2\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

Chọn A.

Câu 4.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CP}=y\overrightarrow{CC_1}$. Ta có $\overrightarrow{BD_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\vec{b}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=(1-x)\vec{a}+\left(x-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+x\vec{c}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+y\vec{c}$.

M,N,P thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{MP}$, suy ra $\begin{cases}1-x=k\\ x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}k\\ x=ky\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\ k=\frac{2}{5}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$.

Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MP}$ nên $MN=\frac{2}{5}MP$, $NP=\frac{3}{5}MP$. Vậy $\frac{NP}{MN}=\frac{3}{2}$.

Chọn D.

Câu 5.

Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là $1;3;5;7;9$, cỡ mẫu $n=41$.

$\overline{x}=\frac{1\cdot1+3\cdot6+5\cdot12+7\cdot14+9\cdot8}{41}=\frac{249}{41}\approx6,1$.

Chọn A.

Câu 6.

Cỡ mẫu $n=40$.

$\frac{n}{4}=10$ nên nhóm chứa Q_1 là $[40;50)$: $Q_1=40+\frac{10-2}{10}\cdot10=48$.

$\frac{3n}{4}=30$ nên nhóm chứa Q_3 là $[60;70)$: $Q_3=60+\frac{30-28}{8}\cdot10=62,5$.

$\Delta_Q=Q_3-Q_1=14,5$.

Chọn B.

Câu 7.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $G(1;2;1)$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, suy ra $I(-2;-1;3)$ và $\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MI}$.

Do đó $S = 3MI + 3MG = 3(MI + MG)$.

I và G có tung độ lần lượt là -1 và 2 nên nằm khác phía đối với mặt phẳng (Oxz), suy ra $MI + MG \geq IG$, dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn IG với (Oxz).

$\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IG} = t(3;3;-2)$ nên $M(-2+3t;-1+3t;3-2t)$. $M \in (Oxz) \Rightarrow -1+3t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$.

Vậy $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

Chọn A.

Câu 8.

Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ và $\vec{a},\vec{b}$ không ngược hướng.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5m - 3 - 2(m+3) = 3m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$\vec{a},\vec{b}$ cùng phương khi $\frac{m}{5} = \frac{-1}{3} = \frac{m+3}{-2}$, hệ này vô nghiệm nên $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương với mọi m.

m nguyên dương nên $m \in \{1;2\}$.

Chọn A.

Câu 9.

$BD = \sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = 12$ nên cạnh hình vuông là $\frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm AB, ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CK}$.

$CK = \sqrt{CB^2 + BK^2} = \sqrt{72+18} = 3\sqrt{10}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right| = 2CK = 6\sqrt{10}$.

Chọn B.

Câu 10.

Với $x > 0$, $x \neq 1$, theo công thức đổi cơ số ta có $\log_x 2 = \frac{1}{m}$, $\log_x 3 = \frac{1}{n}$, $\log_x 30 = \frac{1}{p}$.

$\log_x 30 = \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 \Rightarrow \log_x 5 = \frac{1}{p} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$.

Vậy $\log_5 x = \dfrac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$.

Chọn C.

Câu 11.

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x-\frac{\pi}{6}=2x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\5x-\frac{\pi}{6}=-2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Với $x\in[0;\pi]$: họ thứ nhất cho $x=\frac{11\pi}{18}$ (ứng với $k=1$); họ thứ hai cho $x\in\left\{\frac{\pi}{14};\frac{5\pi}{14};\frac{9\pi}{14};\frac{13\pi}{14}\right\}$ (ứng với $k=0;1;2;3$).

Tổng các nghiệm là $\frac{11\pi}{18}+\frac{28\pi}{14}=\frac{11\pi}{18}+2\pi=\frac{47\pi}{18}$.

Chọn A.

Câu 12.

Điều kiện: $x,y>0$, $xy<1$.

$$\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow\log_3(1-xy)+1+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y$$
$$\Leftrightarrow\log_3(3-3xy)+(3-3xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y).$$

Hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $3-3xy=x+2y\Leftrightarrow x=\frac{3-2y}{3y+1}$ với $0<y<\frac{3}{2}$.

Khi đó $3-3xy=x+2y>0$ nên điều kiện $xy<1$ luôn được thỏa mãn.

Đặt $t=3y+1$, $1<t<\frac{11}{2}$, ta có $y=\frac{t-1}{3}$, $x=\frac{11-2t}{3t}$.

$$P=x+y+1=\frac{11-2t}{3t}+\frac{t-1}{3}+1=\frac{11}{3t}+\frac{t}{3}\geq 2\sqrt{\frac{11}{3t}\cdot\frac{t}{3}}=\frac{2\sqrt{11}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=\sqrt{11}$ (thỏa mãn). Vậy $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Chọn D.

Câu 13.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ nên $c=-1$.

Tiệm cận xiên $y=ax+2$ đi qua điểm $(2;0)$ nên $2a+2=0\Leftrightarrow a=-1$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;3)$ nên $2+\frac{b}{-1}=3\Leftrightarrow b=-1$.

Vậy $P = a + b + c = -3$.

Chọn D.

Câu 14.

$f'(x) = \sqrt{x^2+4} + \dfrac{x(x-6)}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

$f(0) = -12 = -\sqrt{144}$, $f(1) = -5\sqrt{5} = -\sqrt{125}$, $f(2) = -8\sqrt{2} = -\sqrt{128}$, $f(3) = -3\sqrt{13} = -\sqrt{117}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = -3\sqrt{13}$, $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -12$, tổng bằng $-12 - 3\sqrt{13}$.

Do đó $a = -12$, $b = 3$, $c = 13$, $S = a + b + c = 4$.

Chọn A.

Câu 15.

Nếu $a \le 0$ thì giới hạn bằng $+\infty$, do đó $a > 0$.

$$\sqrt{4x^2-3x+1} - (ax+b) = \frac{\left(4-a^2\right)x^2 - (3+2ab)x + 1 - b^2}{\sqrt{4x^2-3x+1} + ax + b}.$$

Giới hạn hữu hạn nên $4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = 2$. Khi đó giới hạn bằng $\dfrac{-(3+4b)}{2+2} = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a + 4b = -1$.

Chọn B.

Câu 16.

$y' = \left(m^3 - 1\right)x^3 - 3x^2 + (2m-5)x - 3$.

Hàm số nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2};4\right] \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \left[\dfrac{1}{2};4\right]$

$\Leftrightarrow m^3x^3 + 2mx \le x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow (mx)^3 + 2mx \le (x+1)^3 + 2(x+1), \forall x \in \left[\dfrac{1}{2};4\right]$.

Hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên điều kiện trên

$\Leftrightarrow mx \le x + 1 \Leftrightarrow m \le 1 + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \left[\dfrac{1}{2};4\right] \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{4}$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-500;500)$ ta có $m \in \{-499;-498;...;1\}$, gồm 501 giá trị.

Chọn C.

Câu 17.

Đặt $\frac{SC}{SP}=z$, $\frac{SD}{SQ}=t$; ta có $\frac{SA}{SM}=2$, $\frac{SB}{SN}=\frac{3}{2}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}\Rightarrow t=z+\frac{1}{2}$.

Gọi $V=V_{S.ABCD}$, ta có $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{V}{2}$.

$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{3z}$, $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SP}{SC}\cdot\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{2zt}$.

$\frac{V_{S.MNPQ}}{V}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3z}+\frac{1}{2zt}\right)=\frac{1}{6z}+\frac{1}{2z(2z+1)}=\frac{z+2}{3z(2z+1)}$.

P thuộc cạnh SC nên $z\ge 1$. Xét $f(z)=\frac{z+2}{6z^2+3z}$ trên $[1;+\infty)$: $f'(z)=\frac{-6z^2-24z-6}{\left(6z^2+3z\right)^2}<0$.

Suy ra $f(z)\le f(1)=\frac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $z=1$, tức là $P\equiv C$ và $t=\frac{3}{2}$, $SQ=\frac{2}{3}SD$.

Vậy $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$, $a+2b=7$.

Chọn B.

Câu 18.

Số tiền còn nợ $A=500$ (triệu đồng), lãi suất $r=0,5\%$ mỗi tháng, mỗi tháng trả 4 triệu đồng.

Sau n tháng, số tiền còn nợ là $A(1+r)^n-4\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}=500\cdot 1,005^n-800\left(1,005^n-1\right)$.

Trả hết nợ khi $500\cdot 1,005^n-800\left(1,005^n-1\right)\le 0\Leftrightarrow 1,005^n\ge\frac{8}{3}\Leftrightarrow n\ge\log_{1,005}\frac{8}{3}\approx 196,7$.

Vậy số tháng tối thiểu là 197.

Chọn D.

Câu 19.

$n(\Omega)=C_{35}^3=6545$.

Ba số lập thành cấp số cộng có công sai lẻ là $u;u+d;u+2d$ với d lẻ, $u\ge 1$, $u+2d\le 35$. Với mỗi d có $35-2d$ cách chọn u.

$d\in\{1;3;...;17\}$ nên số cách chọn là $33+29+25+...+1=\frac{9\cdot(33+1)}{2}=153$.

$P=\dfrac{153}{6545}=\dfrac{9}{385}$.

Chọn A.

Câu 20.

Từ $(1+t)^{n+8}=(1+t)^n(1+t)^8$, so sánh hệ số của t^4 ta được
$C_{n+8}^4=C_n^4+C_8^1C_n^3+C_8^2C_n^2+C_8^3C_n^1+C_8^4=C_n^4+8C_n^3+28C_n^2+56n+70$.

Do đó C_{n+8}^4 và C_n^4 có cùng tính chẵn lẻ.

Mà $C_4^4=1$, $C_5^4=5$, $C_6^4=15$, $C_7^4=35$ lẻ; $C_8^4=70$, $C_9^4=126$, $C_{10}^4=210$, $C_{11}^4=330$ chẵn.

Suy ra C_n^4 lẻ khi và chỉ khi n chia 8 dư $4;5;6;7$.

Bộ ba $C_n^4;C_{n+1}^4;C_{n+2}^4$ với $4\le n\le 2022$ có tổng lẻ khi số số hạng lẻ trong bộ là số lẻ, điều này xảy ra khi n chia 8 dư $2;4;5;7$.

$n\in\{10;18;...;2018\}$ có 252 số; $n\in\{4;12;...;2020\}$ có 253 số; $n\in\{5;13;...;2021\}$ có 253 số; $n\in\{7;15;...;2015\}$ có 252 số.

Vậy có $252+253+253+252=1010$ bộ.

Chọn B.

<u>PHẦN II</u>. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

$f'(x)=3x^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=1;x=3$ nên $f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9\Rightarrow b=-6$, $c=9$.

$f(0)+f(1)=d+(4+d)=4\Rightarrow d=0$. Vậy $f(x)=x^3-6x^2+9x$, $f(1)=4$, $f(3)=0$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(1;3)$.

a) Hai điểm cực trị là $(1;4)$ và $(3;0)$, đường thẳng qua hai điểm này là $y=-2x+6$. Suy ra $m-n=-2-6=-8$. Vậy a) sai.

b) $h'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(f(x))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;x=3\\f(x)=1\\f(x)=3\end{array}\right.$

Vì $0<1<3<4$ nên mỗi phương trình $f(x)=1$, $f(x)=3$ có 3 nghiệm phân biệt khác 1 và 3, các nghiệm của hai phương trình này khác nhau.

Do đó phương trình $h'(x)=0$ có 8 nghiệm. Vậy b) đúng.

c) $y' = f'(x+m) = 3(x+m-1)(x+m-3)$.

Hàm số đồng biến trên

$$(1;4) \Leftrightarrow f'(x+m) \geq 0, \forall x \in (1;4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m \leq 1, \forall x \in (1;4) \\ x+m \geq 3, \forall x \in (1;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4+m \leq 1 \\ 1+m \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$$

Với $m \in (-6;6)$, $m \in \mathbb{Z}$ ta có $S = \{-5;-4;-3;2;3;4;5\}$, tổng các phần tử bằng 2. Vậy c) đúng.

d) Đặt $u(x) = f^2(x) + f(x) + m$, ta có $u'(x) = f'(x)\left[2f(x)+1\right]$.

$f(x) = x(x-3)^2$ nên $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, và f đồng biến trên $(-\infty;0)$, do đó phương trình $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ có đúng một nghiệm $x_0 < 0$.

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_0;1;3\}$, với $u(x_0) = m - \dfrac{1}{4}$, $u(1) = m+20$, $u(3) = m$.

u nghịch biến trên $(-\infty;x_0)$, đồng biến trên $(x_0;1)$, nghịch biến trên $(1;3)$, đồng biến trên $(3;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = +\infty$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = |u(x)|$ bằng 3 cộng với số giao điểm mà tại đó đồ thị hàm số $y = u(x)$ cắt (không tiếp xúc) trục hoành, nên cần đúng 2 giao điểm như vậy.

Nếu $m \geq \dfrac{1}{4}$: không có giao điểm cắt, loại.

Nếu $0 \leq m < \dfrac{1}{4}$: $u(x_0) < 0 < u(1)$, $u(3) = m \geq 0$ nên có đúng 2 giao điểm cắt, thỏa mãn; suy ra $m = 0$.

Nếu $-20 < m < 0$: có 4 giao điểm cắt, loại.

Nếu $m \leq -20$: $u(1) \leq 0$, $u(3) < 0$ nên chỉ có 2 giao điểm cắt trên $(-\infty;x_0)$ và $(3;+\infty)$, thỏa mãn.

Kết hợp $m \in [-2025;2025]$ ta có $m = 0$ hoặc $-2025 \leq m \leq -20$, gồm $1 + 2006 = 2007$ giá trị. Vậy d) đúng.

Câu 2.

$C(\sqrt{2};2\sqrt{2};0)$, $OC = \sqrt{10}$. $SO \perp (OBCD)$ nên $\alpha = \widehat{SCO}$, $SO = OC \cdot \tan\alpha = 4$, $S(0;0;4)$.

a) $x + y + z = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 0 = 3\sqrt{2}$. Vậy a) đúng.

b) $(\beta) \parallel (OBCD)$ nên $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SF}{SB} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{SH}{SD} = k$ và $\dfrac{V_{S.EFGH}}{V_{S.CBOD}} = k^3 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow k = \dfrac{1}{3}$.

$\overrightarrow{SE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} \Rightarrow E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3};\dfrac{2\sqrt{2}}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, suy ra $2x - y + 3z = 8$. Vậy b) sai.

c) Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OJ}=\dfrac{2\overrightarrow{OS}+3\overrightarrow{OC}}{4}$, ta có $J\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\dfrac{3\sqrt{2}}{2};2\right)$.

$\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KS}+3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{OK}+2\left(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OK}\right)+3\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OK}\right)=2\overrightarrow{OS}+3\overrightarrow{OC}-4\overrightarrow{OK}=4\left(\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OK}\right)=4\overrightarrow{KJ}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KS}+3\overrightarrow{KC}\right|=4KJ\geq 4d(J,(Oxz))=4\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$, dấu bằng khi K là hình chiếu của J trên (Oxz). Vậy c) đúng.

d) $\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2};2\sqrt{2};0)$, $\overrightarrow{SC}=(\sqrt{2};2\sqrt{2};-4)$.

$M\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}x;2\sqrt{2}x;0\right)$, $N\left(\sqrt{2}y;2\sqrt{2}y;4-4y\right)$, $\overrightarrow{MN}=\left(\sqrt{2}(x+y-1);2\sqrt{2}(y-x);4-4y\right)$.

MN nhỏ nhất khi MN là đoạn vuông góc chung của BD và SC:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{SC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2(x+y-1)+8(y-x)=0\\ 2(x+y-1)+8(y-x)-16+16y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-3y=1\\ -3x+13y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{7}\\ y=\dfrac{6}{7}\end{cases}$$

Suy ra $7(x+2y)=7\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{12}{7}\right)=17$. Vậy d) đúng.

Câu 3.

a) Khoảng biến thiên $R=20-5=15$. Vậy a) đúng.

b) Giá trị đại diện các nhóm là $6,5;9,5;12,5;15,5;18,5$; cỡ mẫu $n=160$.

$\overline{x}=\dfrac{24\cdot 6,5+57\cdot 9,5+42\cdot 12,5+29\cdot 15,5+8\cdot 18,5}{160}=\dfrac{1820}{160}=11,375$. Vậy b) đúng.

c) Nhóm chứa mốt là $[8;11)$: $M_o=8+\dfrac{57-24}{(57-24)+(57-42)}\cdot 3=8+\dfrac{33}{48}\cdot 3=10,0625$. Vậy c) đúng.

d) Cần tìm tứ phân vị thứ ba Q_3. $\dfrac{3n}{4}=120$, nhóm chứa Q_3 là $[11;14)$:

$Q_3=11+\dfrac{120-81}{42}\cdot 3=\dfrac{193}{14}\approx 13,79$.

Công ty nên gửi thông báo đến các hộ có lượng nước tiêu thụ từ $Q_3\approx 13,79$ trở lên. Vậy d) sai.

Câu 4.

a) Chu kỳ $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{3}}=3$. Vậy a) đúng.

b) $3 \le t \le 4 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}(2t-1) \le \frac{7\pi}{3} \Rightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \ge \frac{1}{2} \Rightarrow d > 0$. Vậy b) đúng.

c) Người chơi đu qua vị trí cân bằng khi $d = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3k}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$0 \le t \le 10 \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le k \le \frac{35}{6} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3;4;5\}$, tức là 6 lần. Vậy c) sai.

d) Cảm giác mạnh nhất khi $|d| = 3 \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k+1}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$0 \le t \le 60 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le \frac{119}{3} \Rightarrow k \in \{0;1;...;39\}$, tức là 40 lần. Vậy d) đúng.

Câu 5.

a) $AC \perp BD$, $AC \perp BB'$ nên $AC \perp (BDD'B')$, mà mặt phẳng $(DD'B')$ chính là $(BDD'B')$. Gọi $I = AC \cap BD$, ta có $d(A,(DD'B')) = AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy a) sai.

b) Phép đối xứng tâm M biến B thành C', biến đường thẳng BC thành đường thẳng $B'C'$ nên biến F' thành C_1. Suy ra M là trung điểm của $F'C_1$, $C'C_1 = BF' = \frac{a}{4}$, $B'C_1 = \frac{3a}{4}$.

$D'D_1 \parallel CF'$ nên $\frac{N'D_1}{N'F'} = \frac{D'D_1}{CF'} = \frac{N'D'}{N'C} = \frac{1}{4}$, suy ra $\frac{F'N'}{F'D_1} = \frac{4}{5}$, $D'D_1 = \frac{1}{4}CF' = \frac{3a}{16}$, $A'D_1 = \frac{19a}{16}$.

$\frac{V_{F'EMN'}}{V_{F'C_1ED_1}} = \frac{F'M}{F'C_1} \cdot \frac{F'N'}{F'D_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Vậy b) đúng.

c) Tam giác EC_1D_1 nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và

$S_{EC_1D_1} = S_{A'B'C_1D_1} - S_{EA'D_1} - S_{EB'C_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{4} + \frac{19a}{16}\right)a - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{19a}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{31a^2}{32} - \frac{19a^2}{64} - \frac{3a^2}{16} = \frac{31a^2}{64}$.

$V_{F'C_1ED_1} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{31a^2}{64} = \frac{31a^3}{192}$, suy ra $V_{F'MN'E} = \frac{2}{5} \cdot \frac{31a^3}{192} = \frac{31a^3}{480}$. Vậy c) đúng.

d) $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nằm trong mặt phẳng cách đều hai mặt đáy.

$EQ \parallel AA'$ nên $EQ \perp (ABCD)$, suy ra $EQ \perp HF$, do đó $EQ \subset (\alpha)$, tức là $Q \in (\alpha)$.

Ba điểm Q, K, L cùng thuộc giao tuyến của (α) và $(MNPQ)$ nên thẳng hàng.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng QK và QP. Tam giác QPK vuông tại P, tam giác QML vuông tại M nên $QK=\dfrac{QP}{\cos\varphi}$, $QL=\dfrac{QM}{\sin\varphi}$.

Suy ra $\dfrac{1}{QK^2}+\dfrac{1}{QL^2}=\dfrac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{2}{a^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$T^2=\left(2\cdot\dfrac{1}{QK}+1\cdot\dfrac{1}{QL}\right)^2\le\left(2^2+1^2\right)\left(\dfrac{1}{QK^2}+\dfrac{1}{QL^2}\right)=\dfrac{10}{a^2}\Rightarrow T\le\dfrac{\sqrt{10}}{a}$.

Dấu bằng xảy ra khi $QL=2QK$, tức là $\tan\varphi=\dfrac{1}{2}$. Chọn K là trung điểm của NP, khi đó $PK=\dfrac{1}{2}QP$ nên $\tan\varphi=\dfrac{1}{2}$; ta chỉ ra vị trí của H để đạt được trường hợp này.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho A là gốc tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$. Khi đó $F\left(a;\dfrac{a}{2};0\right)$, $Q\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$, $K\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{3a}{4};\dfrac{a}{2}\right)$, $H(0;h;0)$ với $0<h<a$.

$\overrightarrow{QK}\cdot\overrightarrow{HF}=0\Leftrightarrow-\dfrac{a}{4}\cdot a+\dfrac{3a}{4}\left(\dfrac{a}{2}-h\right)=0\Leftrightarrow h=\dfrac{a}{6}$ (thỏa mãn). Khi $AH=\dfrac{a}{6}$ thì $QK\perp HF$, mà $Q\in(\alpha)$ nên $K\in(\alpha)$.

Vậy $\max T=\dfrac{\sqrt{10}}{a}$. Vậy d) đúng.

Câu 6.

a) $n(\Omega)=xy$ với $x+y=20$. Nếu $xy=20$ thì x,y là nghiệm của phương trình $X^2-20X+20=0$, phương trình này không có nghiệm nguyên. Vậy a) sai.

b) $\dfrac{ab}{xy}=\dfrac{(x-a)(y-b)}{xy}\Leftrightarrow ab=xy-bx-ay+ab\Leftrightarrow x(y-b)=ay\Leftrightarrow\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{y-b}$. Vậy b) đúng.

c) Xác suất lấy được hai viên bi khác màu là $\dfrac{a(y-b)+b(x-a)}{xy}=\dfrac{3(y-7)+7(x-3)}{xy}$.

Thay $y=20-x$ ta được $\dfrac{4x+18}{x(20-x)}=\dfrac{29}{50}\Leftrightarrow 29x^2-380x+900=0\Leftrightarrow x=10$ (vì x nguyên dương).

Suy ra $x=y=10$, $x+2y=30$. Vậy c) sai.

d) Ta có $\frac{ab}{xy}=\frac{55}{84}\Rightarrow 84ab=55xy$, mà $(55,84)=1$ nên $xy\vdots 84$.

Mặt khác $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=100$ nên $xy=84$, kết hợp $x+y=20$ được $\{x;y\}=\{6;14\}$. Khi đó $ab=55$.

Nếu $x=6$, $y=14$ thì $a\le 6$, $b\le 14$ nên $a=5$, $b=11$; nếu $x=14$, $y=6$ thì $a=11$, $b=5$.

Trong cả hai trường hợp, xác suất lấy được hai viên bi trắng là $\frac{1\cdot 3}{84}=\frac{1}{28}$.

Phân số tối giản $\frac{1}{28}$ có tổng tử và mẫu là $1+28=29$. Vậy d) đúng.

<u>PHẦN III</u>. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1.

Đặt $u=x^3+2$, hàm số u đồng biến trên $\mathbb{R}$; $x=-2;0;2;3$ lần lượt tương ứng $u=-6;2;10;29$.

Từ bảng xét dấu của $g(x)=f'(x^3+2)$ suy ra: $f'(u)>0$ khi $u<-6$; $f'(u)<0$ khi $-6<u<2$; $f'(u)>0$ khi $2<u<10$; $f'(u)<0$ khi $10<u<29$; $f'(u)>0$ khi $u>29$.

Hàm số $y=f(x-m)$ có $y'=f'(x-m)$. Với $x\in(-\infty;0)$ thì $x-m\in(-\infty;-m)$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)\Leftrightarrow f'(u)\ge 0,\forall u\in(-\infty;-m)\Leftrightarrow -m\le -6\Leftrightarrow m\ge 6$.

Kết hợp $m\in[-2026;2027]$, $m\in\mathbb{Z}$ ta có $m\in\{6;7;...;2027\}$, gồm 2022 giá trị.

Đáp số: 2022.

Câu 2.

Chọn hệ trục Oxy (đơn vị mét) với bờ biển là trục Ox, nhà ở điểm $H(0;1000)$, chợ ở điểm $C(800;400)$ (vì $HC=1000$ nên hoành độ của C thỏa mãn $c^2+600^2=1000^2$).

Gọi $A(x;0)$ là điểm anh Hùng chạy ra bờ biển, B là điểm anh rời bờ biển. Quãng đường chạy là $L=HA+500+BC+1000$.

Gọi $H'(0;-1000)$ là điểm đối xứng với H qua Ox.

Nếu anh Hùng chạy dọc bờ biển về phía chợ thì $B(x+500;0)$. Gọi $C'(300;400)$, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BC}$ nên $BC=AC'$, suy ra $HA+BC=H'A+AC'\ge H'C'=\sqrt{300^2+1400^2}=100\sqrt{205}$, dấu bằng khi A là giao điểm của $H'C'$ với Ox.

Nếu anh Hùng chạy dọc bờ biển theo chiều ngược lại thì $B(x-500;0)$; lập luận tương tự với $C''(1300;400)$ ta được $HA+BC\ge\sqrt{1300^2+1400^2}>100\sqrt{205}$.

Vậy quãng đường ngắn nhất là $L = 1500 + 100\sqrt{205} \approx 2931,78$.

Đáp số: 2932.

Câu 3.

Đặt $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$.

$AB \perp (BCC'B')$ nên $d(AB, B'C) = d(B, B'C)$, suy ra $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4a^2}$.

$BC \perp (ABB'A')$ nên $d(BC, AB') = d(B, AB')$, suy ra $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4a^2}$.

Do đó $x = y$ và với $V = x^2 z$ ta có $\frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{z^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4x^4 z^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4V^2}}$.

Suy ra $4V^2 \geq \left(12a^2\right)^3 \Rightarrow V \geq 12\sqrt{3}a^3$; dấu bằng khi $\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{12a^2}$, tức là $x = y = a\sqrt{6}$, $z = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó đáy $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, $AC \perp BB'$, suy ra $AC \perp (BDD'B')$ tại tâm I của đáy.

Kẻ $IK \perp BD'$ $(K \in BD')$ thì IK là đoạn vuông góc chung của AC và BD', do đó

$d = IK = \frac{1}{2} d(D, BD')$.

Tam giác BDD' vuông tại D có $BD = a\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2a\sqrt{3}$, $DD' = 2a\sqrt{3}$ nên

$d(D, BD') = \frac{BD \cdot DD'}{\sqrt{BD^2 + DD'^2}} = \frac{12a^2}{2a\sqrt{6}} = a\sqrt{6}$.

Suy ra $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $\frac{14d}{\sqrt{24}a} = \frac{7a\sqrt{6}}{2a\sqrt{6}} = 3,5$.

Đáp số: 3,5.

Câu 4.

Với $x = 0$: phương trình trở thành $y \log(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Với $x > 0$: xét $f(y) = y \log(y + 4x + 1) - \left(x^2 - 2x + y\right) \log(x+1)$ trên $[0; +\infty)$.

$f'(y) = \log(y + 4x + 1) - \log(x+1) + \frac{y}{(y + 4x + 1)\ln 10} > 0$ nên f đồng biến, phương trình $f(y) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $y \geq 0$.

Nếu $0<x<2$ thì $f(0)=\left(2x-x^2\right)\log(x+1)>0$ nên $f(y)>0$ với mọi $y\ge 0$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $x\ge 2$ thì $y=x^2-2x\ge 0$ và $y+4x+1=(x+1)^2$, suy ra
$f\left(x^2-2x\right)=2\left(x^2-2x\right)\log(x+1)-2\left(x^2-2x\right)\log(x+1)=0$, nên $y=x^2-2x$ là nghiệm duy nhất.

Vậy các cặp thỏa mãn là $(0;0)$ và $\left(x;x^2-2x\right)$ với $x\ge 2$.

Với $(0;0)$: $2x-y=0\in\mathbb{N}$, thỏa mãn.

Với $x\ge 2$: $2x-y=4x-x^2=h(x)$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$, $h(2)=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$ nên mỗi giá trị $k\in\{0;1;2;3;4\}$ cho đúng một giá trị x.

Vậy có $1+5=6$ bộ $(x;y)$.

Đáp số: 6.

Câu 5.

Gọi $H(-2;-2;0)$, $K(1;2;0)$ lần lượt là hình chiếu của A, B trên (Oxy), ta có $HK=5$.

$MA^2=MH^2+9$, $NB^2=NK^2+9$ nên $2MA^2+3NB^2=2MH^2+3NK^2+45$.

$MH+MN+NK\ge HK=5\Rightarrow MH+NK\ge 4$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki: $(MH+NK)^2\le\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(2MH^2+3NK^2\right)$, suy ra

$2MH^2+3NK^2\ge\frac{6}{5}\cdot 16=\frac{96}{5}$.

Do đó $2MA^2+3NB^2\ge\frac{96}{5}+45=64,2$. Dấu bằng xảy ra khi H,M,N,K thẳng hàng theo thứ tự đó và $MH=\frac{12}{5}$, $NK=\frac{8}{5}$.

Đáp số: 64,2.

Câu 6.

Kí hiệu buổi ôn ở nhà là N, buổi lên thư viện là T. Mỗi kế hoạch là một dãy 19 kí tự bắt đầu và kết thúc bởi N, không có hai chữ N liền nhau và không có ba chữ T liền nhau.

Do đó giữa hai chữ N liên tiếp có 1 hoặc 2 chữ T.

Gọi k là số chữ N thì có $k-1$ khoảng giữa hai chữ N liên tiếp; gọi i là số khoảng có 2 chữ T, ta có $k+(k-1)+i=19\Leftrightarrow i=20-2k$.

Điều kiện $0\le i\le k-1\Leftrightarrow 7\le k\le 10$; với mỗi k có C_{k-1}^{20-2k} kế hoạch.

Số kế hoạch là $C_6^6 + C_7^4 + C_8^2 + C_9^0 = 1 + 35 + 28 + 1 = 65$.

Đáp số: 65.

---------- HẾT ----------