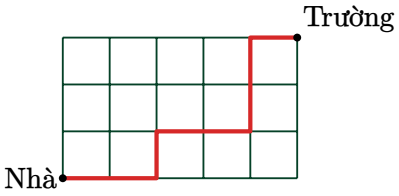
CHUYÊN ĐỀ: KĨ THUẬT "VẾT DẦU LOANG" TRONG BÀI TOÁN ĐẾM VÀ XÁC SUẤT

Trung tâm luyện thi 29Edu

Ngày 7 tháng 11 năm 2026

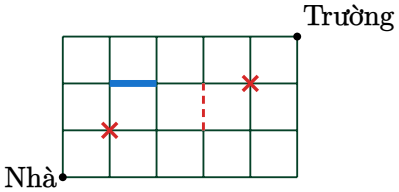
Tóm tắt nội dung

Bạn Lan đi học mỗi ngày. Giả sử các con phố từ nhà Lan đến trường tạo thành một lưới ô vuông hoàn hảo, hỏi có bao nhiêu con đường ngắn nhất để Lan đi từ nhà đến trường? Rất dễ phải không? Vì các con phố tạo thành một lưới ô vuông $m \times n$ hoàn hảo, ta có ngay công thức tổ hợp C_{m+n}^{m}.



Lưới 5×3: có $C_8^5 = 56$ con đường ngắn nhất

Nhưng nếu lưới đó có vài ngã tư đang sửa đường, một đoạn phố cấm đi, hay một cây cầu bắt buộc phải qua... thì công thức ấy còn dùng được không?



×: ngã tư sửa đường - - -: phố cấm ▬: cầu bắt buộc

Lúc đó, thay vì cố tìm một công thức cho *toàn bộ* hành trình, ta chỉ trả lời một câu hỏi rất cục bộ:

"Muốn đến được điểm này, ngay trước đó ta phải đứng ở đâu?"

Trả lời được câu hỏi đó, ta ghi số cách đến mỗi điểm bằng **tổng** số cách đến các điểm đứng ngay trước nó, bắt đầu từ điểm xuất phát rồi để các con số "loang" dần ra tới đích. Toàn bộ quá trình chỉ áp dụng quy tắc cộng, kể cả khi sơ đồ có vật cản.

Chuyên đề này trình bày cơ sở toán học của kĩ thuật (vì sao được cộng, khi nào được cộng), sau đó áp dụng cho sáu mô hình thường gặp: lưới có vật cản, lưới có điểm bắt buộc đi qua, lưới không vuông, đường đi không vượt đường chéo, sơ đồ một chiều ngoài lưới, và bài toán xác suất trên các đường đi.

thuvientoanhoc.com

Mục lục

1 Bài toán mở đầu **3**

2 Cơ sở lí thuyết **4**
2.1 Sơ đồ bước đi 4
2.2 Nguyên lí vết dầu loang 4
2.3 Các hệ quả 6
2.4 Phương pháp giải 8
2.5 Mở rộng: trải sơ đồ theo số bước 8
2.6 Xác suất: khi nào các đường đi đồng khả năng? 9

3 Các mô hình bài toán điển hình **11**
3.1 Mô hình 1: Lưới có vật cản 11
3.2 Mô hình 2: Bắt buộc đi qua hoặc phải tránh một điểm, một đoạn đường 13
3.3 Mô hình 3: Lưới không vuông và lưới có bước chéo 15
3.4 Mô hình 4: Đường đi không vượt đường chéo 17
3.5 Mô hình 5: Sơ đồ một chiều (đồ thị có hướng) 18
3.6 Mô hình 6: Xác suất trên các đường đi đồng khả năng 20

4 Bài tập tự luyện **23**

5 Đáp án **32**

thuvientoanhoc.com

1 Bài toán mở đầu

(Bảng Galton)

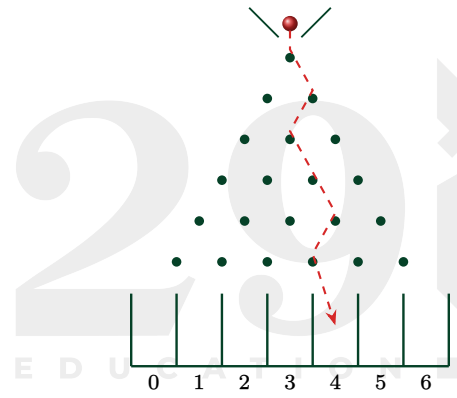
Năm 1889, nhà khoa học người Anh Francis Galton mô tả trong cuốn *Natural Inheritance* một dụng cụ rất đơn giản: trên một tấm bảng dựng đứng, người ta đóng các hàng đinh so le nhau; thả một viên bi từ miệng phễu ở trên cùng, mỗi lần chạm một chiếc đinh viên bi nảy sang trái hoặc sang phải, cuối cùng rơi vào một trong các ngăn ở đáy bảng.

Xét một bảng Galton có 6 hàng đinh (hàng thứ k có k chiếc đinh) và 7 ngăn được đánh số từ 0 đến 6 như hình. Mỗi khi chạm đinh, viên bi nảy sang trái hoặc sang phải với cùng xác suất $\frac{1}{2}$, độc lập với các lần chạm trước.

a) Có bao nhiêu đường đi khác nhau để viên bi rơi vào ngăn số 3?

b) Tính xác suất để viên bi rơi vào ngăn số 3.

c) Tính xác suất để viên bi rơi vào một trong ba ngăn chính giữa (ngăn 2, 3 hoặc 4).



(Nét đứt đỏ là một đường đi có thể của viên bi.)

Mới nhìn, mỗi viên bi có $2^6 = 64$ đường đi, liệt kê hết là không khả thi. Nhưng hãy để ý: viên bi chỉ có thể chạm một chiếc đinh nếu ngay trước đó nó vừa chạm một trong hai chiếc đinh nằm chéo phía trên. Vậy **số đường đi tới mỗi chiếc đinh bằng tổng số đường đi tới hai chiếc đinh ngay phía trên nó**. Từ đỉnh bảng, các con số sẽ "loang" dần xuống đáy. Câu b) và c) còn có một điểm tinh tế: *có được coi* 64 *đường đi là đồng khả năng hay không?* Ta sẽ quay lại giải trọn vẹn bài toán ở **Ví dụ 10**.

thuvientoanhoc.com

2 Cơ sở lí thuyết

2.1 Sơ đồ bước đi

Mọi bài toán trong chuyên đề đều có chung một khung: một vật đi từ điểm này sang điểm khác theo những luật nhất định. Ta trừu tượng hoá khung đó như sau.

Định nghĩa: Sơ đồ bước đi, đường đi

Một **sơ đồ bước đi** gồm:

- một tập hữu hạn các điểm, gọi là các **nút**;
- một số **bước đi**, mỗi bước đi đi từ một nút Y sang một nút X khác theo đúng một chiều, kí hiệu $Y \to X$. Khi đó ta nói Y là một **nút liền trước** của X. Nếu từ Y sang X có t con đường khác nhau ($t \geq 2$) thì ta nói bước đi $Y \to X$ có **bội** t.

Một **đường đi** k bước từ nút A đến nút B là một dãy nút $A = X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_k = B$ sao cho mỗi $X_{i-1} \to X_i$ ($1 \leq i \leq k$) là một bước đi của sơ đồ. Quy ước: từ mỗi nút A có đúng một đường đi 0 bước đến chính nó.

Sơ đồ được gọi là **không quay vòng** nếu không có đường đi nào (có ít nhất một bước) xuất phát từ một nút rồi quay trở về chính nút đó.

Ví dụ. Lưới ô vuông, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị: các nút là các mắt lưới $(x;\ y)$; nút $(x;\ y)$ có hai nút liền trước là $(x-1;\ y)$ (bên trái) và $(x;\ y-1)$ (bên dưới). Sơ đồ này không quay vòng vì mỗi bước đi làm tổng $x+y$ tăng đúng 1 đơn vị, nên không thể quay về điểm cũ.

Lưu ý: Theo ngôn ngữ của lí thuyết đồ thị, sơ đồ bước đi chính là một **đồ thị có hướng**, và sơ đồ không quay vòng là **đồ thị có hướng không có chu trình**.

2.2 Nguyên lí vết dầu loang

Nguyên lí vết dầu loang

Cho một sơ đồ bước đi **không quay vòng** và một nút xuất phát A. Kí hiệu $N(X)$ là số đường đi từ A đến nút X. Khi đó:

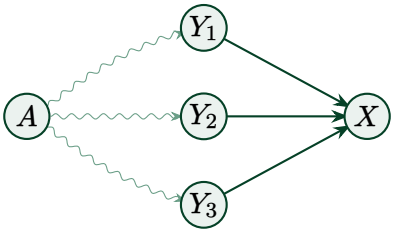
- $N(A) = 1$;
- với mọi nút $X \neq A$, nếu $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_k$ là **tất cả** các nút liền trước của X thì

$$N(X) = N(Y_1) + N(Y_2) + \cdots + N(Y_k).$$

  Nếu X không có nút liền trước nào thì $N(X) = 0$.

Tổng quát, nếu bước đi $Y_i \to X$ có bội t_i thì $N(X) = t_1 N(Y_1) + t_2 N(Y_2) + \cdots + t_k N(Y_k)$.

thuvientoanhoc.com



Chứng minh.

- Có đúng một đường đi 0 bước từ A đến A, và không có đường đi nào có ít nhất một bước từ A quay về A (vì sơ đồ không quay vòng). Do đó $N(A) = 1$.
- Xét $X \neq A$. Mỗi đường đi từ A đến X có ít nhất một bước, và bước cuối cùng của nó có dạng $Y_i \to X$ với Y_i là một nút liền trước của X. Chia tập các đường đi từ A đến X thành k nhóm theo nút đứng ngay trước X: nhóm thứ i gồm các đường đi có bước cuối là $Y_i \to X$. Mỗi đường đi chỉ có một bước cuối nên các nhóm đôi một rời nhau.

  Trong nhóm thứ i: bỏ bước cuối của một đường đi ta được một đường đi từ A đến Y_i; ngược lại, nối thêm bước $Y_i \to X$ vào sau một đường đi từ A đến Y_i ta được một đường đi từ A đến X. Đây là tương ứng một – một, nên nhóm thứ i có đúng $N(Y_i)$ đường đi (hoặc $t_i \cdot N(Y_i)$ nếu bước $Y_i \to X$ có bội t_i, theo quy tắc nhân). Theo quy tắc cộng ta được công thức cần chứng minh.

Như vậy về bản chất, **vết dầu loang chính là quy tắc cộng được áp dụng lặp đi lặp lại**, mỗi lần cho một nút, trong đó các trường hợp được phân chia theo *bước đi cuối cùng*.

Vì sao cần điều kiện không quay vòng?

- Nếu sơ đồ có vòng, vật có thể đi quanh vòng bao nhiêu lần tuỳ ý, nên số đường đi có thể là vô hạn.
- Muốn tính $N(X)$ ta phải biết trước N của mọi nút liền trước X. Người ta chứng minh được rằng các nút của một sơ đồ không quay vòng luôn sắp được thành một dãy sao cho mọi bước đi đều đi từ nút đứng trước sang nút đứng sau. Loang theo thứ tự đó thì mỗi nút luôn được tính sau tất cả các nút liền trước nó. Với lưới chỉ đi sang phải hoặc lên trên, ta loang lần lượt theo các đường chéo $x + y = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, hoặc đơn giản là từng hàng từ dưới lên, mỗi hàng từ trái sang phải.

Lưu ý về tên gọi: "Vết dầu loang" là tên gọi quen thuộc trong luyện thi, không phải thuật ngữ trong sách giáo khoa. Trong tin học, "thuật toán loang" thường chỉ thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (BFS) dùng để tìm các ô đến được hoặc đường đi ngắn nhất; đó là một bài toán khác với bài toán **đếm** số đường đi trong chuyên đề này.

thuvientoanhoc.com

2.3 Các hệ quả

a) Lưới đầy đủ và tam giác Pascal

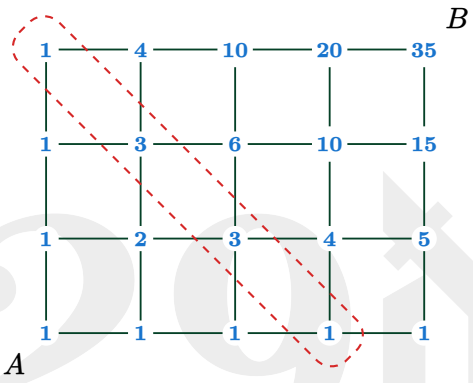
Hệ quả 1

Trên lưới ô vuông, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị, số đường đi từ $A(0;\ 0)$ đến mắt lưới $(x;\ y)$ là

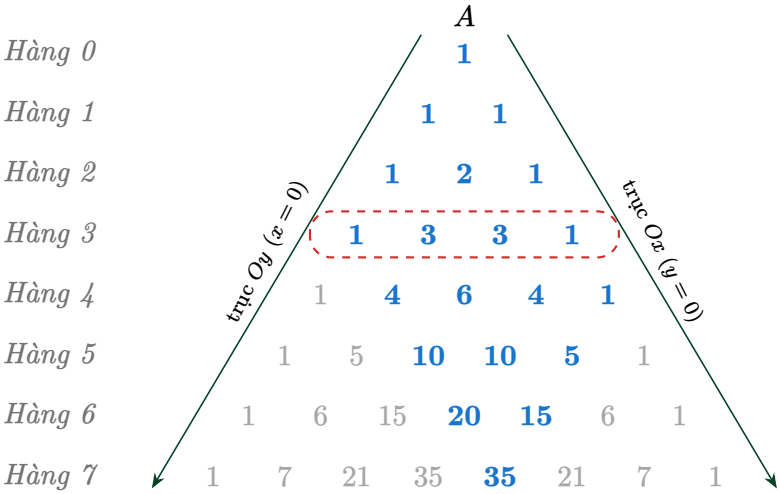
$$N(x;\ y) = C_{x+y}^{x}.$$

Chứng minh. Các mắt lưới trên hai trục chỉ có một nút liền trước nên $N(x;\ 0) = N(0;\ y) = 1 = C_x^x = C_y^0$. Với $x,\ y \geq 1$, giả sử công thức đúng cho mọi mắt lưới trên đường chéo $x+y-1$. Theo nguyên lí vết dầu loang và hằng đẳng thức Pascal $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$:

$$N(x;\ y) = N(x-1;\ y) + N(x;\ y-1) = C_{x+y-1}^{x-1} + C_{x+y-1}^{x} = C_{x+y}^{x}.$$



Xoay lưới sao cho A nằm ở đỉnh trên cùng, trục Oy nằm bên trái và trục Ox nằm bên phải, ta được tam giác Pascal: mắt lưới $(x;\ y)$ nằm ở hàng thứ $x+y$, vị trí thứ x (đếm từ 0, từ trái sang phải), nên các số trên đường chéo $x+y=n$ chính là hàng thứ n của tam giác Pascal. Trong hình dưới, các số màu xanh là các số xuất hiện trên lưới 4×3 ở trên; hàng 3 (khung đỏ) ứng với đường chéo $x+y=3$ của lưới; hai mũi tên đỏ minh hoạ $C_3^1 + C_3^2 = C_4^2$, tức là $3+3=6$, cũng chính là phép cộng loang tại mắt lưới $(2;\ 2)$.



Như vậy công thức tổ hợp và vết dầu loang là hai cách nhìn của cùng một bài toán: công thức nhìn *toàn bộ* hành trình, còn vết dầu loang nhìn *từng bước*. Khi lưới có vật cản, công thức toàn cục bị phá vỡ, còn nguyên lí cục bộ thì vẫn đúng ở mọi nút.

thuvientoanhoc.com

b) Đi qua một điểm, tránh một điểm

Hệ quả 2

Kí hiệu $N(U \to V)$ là số đường đi từ nút U đến nút V. Với một nút P cho trước:

- Số đường đi từ A đến B **đi qua** P bằng $N(A \to P) \cdot N(P \to B)$ (quy tắc nhân).
- Số đường đi từ A đến B **không đi qua** P bằng $N(A \to B) - N(A \to P) \cdot N(P \to B)$ (phần bù).

Trong sơ đồ không quay vòng, một đường đi qua P không thể qua P hai lần, nên mỗi đường đi qua P được tách duy nhất thành hai đoạn $A \to P$ và $P \to B$; đó là lí do quy tắc nhân áp dụng được.

Khi sơ đồ vừa có điểm bắt buộc vừa có vật cản, ta không cần tách ra nhân rồi trừ mà dùng luôn phép loang:

Loang hai giai đoạn

Để đếm số đường đi từ A đến B bắt buộc đi qua nút P:

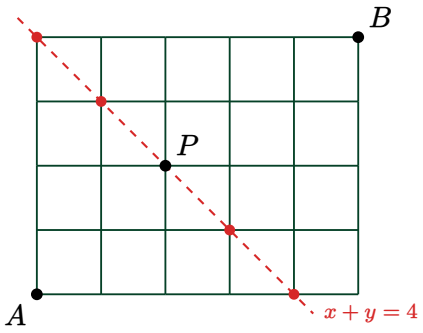
- **Giai đoạn 1:** loang từ A để được $N(P)$.
- **Giai đoạn 2:** coi P là nút xuất phát mới mang giá trị $N(P)$ (thay cho giá trị 1), rồi loang tiếp từ P. Giá trị thu được tại B chính là số đường đi cần tìm.

Nếu bắt buộc phải đi qua một bước đi $P \to Q$ (một cây cầu, một đoạn đường) thì ở giai đoạn 2 ta cho Q mang giá trị $N(P)$ rồi loang tiếp từ Q.

EDUCATION

Giai đoạn 2 cho kết quả đúng vì phép loang chỉ gồm phép cộng: nếu nhân giá trị ban đầu với c thì mọi giá trị loang ra cũng được nhân với c. Do đó giá trị tại B bằng $N(A \to P) \cdot N(P \to B)$, đúng theo Hệ quả 2.

Mẹo đường chéo. Trên lưới chỉ đi sang phải hoặc lên trên, mỗi bước làm $x + y$ tăng đúng 1, nên **mọi đường đi từ A đến B cắt đường thẳng $x + y = k$ tại đúng một mắt lưới**. Vì thế "bắt buộc đi qua P" tương đương với "không đi qua các mắt lưới khác nằm trên cùng đường chéo với P". Khi loang, ta chỉ cần ghi 0 ở các mắt lưới đó.



thuvientoanhoc.com

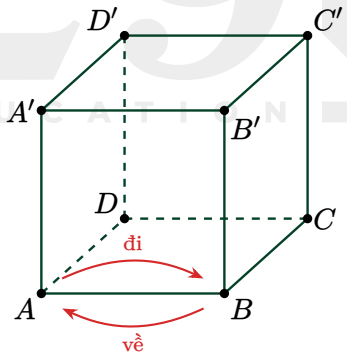
2.4 Phương pháp giải

Phương pháp: Bốn bước loang

1. **Mô hình hoá:** xác định các nút, các bước đi được phép (kể cả chiều đi và số cách đến), và kiểm tra sơ đồ không quay vòng (thường các bài toán trong chương trình THPT đều mặc định không quay vòng). Với mỗi nút, trả lời câu hỏi: *"ngay trước khi tới đây, vật có thể đứng ở đâu?"*
2. **Khởi tạo:** ghi 1 tại nút xuất phát; nút bị cấm thì gạch bỏ (coi như ghi 0); bước đi bị cấm thì xoá khỏi sơ đồ.
3. **Loang:** lần lượt theo thứ tự và hướng đi mà bài yêu cầu (với lưới: từng đường chéo, hoặc từng hàng), ghi vào mỗi nút tổng các số ở các nút liền trước nó.
4. **Đọc kết quả** tại nút đích. Nếu đề hỏi xác suất, đếm thêm số trường hợp của không gian mẫu (thường cũng bằng một lần loang).

2.5 Mở rộng: trải sơ đồ theo số bước

Có những bài toán mà sơ đồ **có vòng**, chẳng hạn một con kiến bò dọc theo các cạnh của một hình lập phương: nó có thể bò đi rồi bò lại. Khi đó nguyên lí vết dầu loang không áp dụng trực tiếp được. Tuy nhiên nếu đề chỉ hỏi về các hành trình gồm **đúng** n **bước** (cho phép đi qua một nút nhiều lần), ta có thể "trải" sơ đồ theo thời gian:



Mỗi cạnh của hình lập phương đi được theo cả hai chiều, nên sơ đồ có vòng, chẳng hạn $A \to B \to A$.

Trải theo số bước

Tạo các tầng $0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Mỗi nút mới là một cặp $(X,\ k)$, nghĩa là "đang ở X sau đúng k bước"; mỗi bước đi $Y \to X$ của sơ đồ cũ cho ta các bước đi $(Y,\ k-1) \to (X,\ k)$. Sơ đồ mới **không quay vòng** (vì mỗi bước đi làm k tăng 1), nên ta loang được:

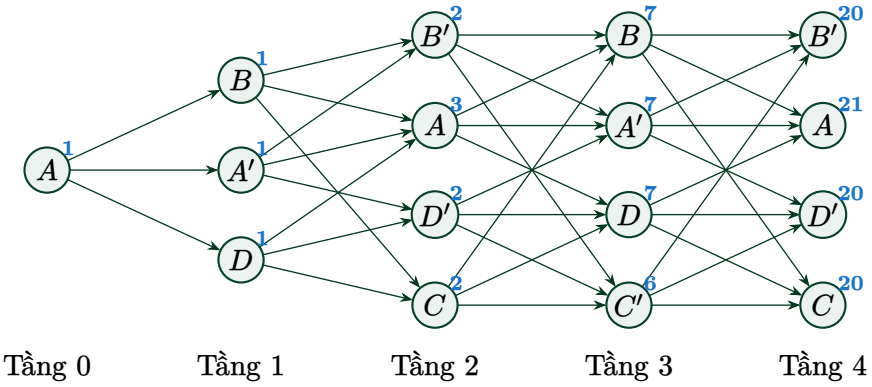
$$N_0(A) = 1, \qquad N_k(X) = \sum_{Y \text{ liền trước } X} N_{k-1}(Y),$$

trong đó $N_k(X)$ là số hành trình k bước đi từ A và kết thúc tại X.

thuvientoanhoc.com

Hình dưới đây là sơ đồ đã trải của hình lập phương với kiến xuất phát tại A, từ tầng 0 đến tầng 4. Mỗi tầng chỉ vẽ những đỉnh kiến có thể đứng sau đúng k bước (sau số bước lẻ kiến chỉ có thể ở B, D, A', C'; sau số bước chẵn chỉ có thể ở A, C, B', D'). Mỗi mũi tên đi từ tầng $k-1$ sang tầng k, số nhỏ màu xanh cạnh mỗi nút là $N_k(X)$. Chẳng hạn ở tầng 3:

$$N_3(B) = N_2(A) + N_2(C) + N_2(B') = 3 + 2 + 2 = 7.$$



Sơ đồ đã trải không còn vòng nào: mọi mũi tên đều đi từ trái sang phải. Ví dụ 11 sẽ dùng chính sơ đồ này để tính xác suất kiến quay về A sau 4 bước ($N_4(A) = 21$).

2.6 Xác suất: khi nào các đường đi đồng khả năng?

Bài toán xác suất trên sơ đồ bước đi thường có một trong hai cách phát biểu, cần phân biệt rõ.

Cách 1: "Chọn ngẫu nhiên một đường đi trong tất cả các đường đi". Các đường đi đồng khả năng *theo giả thiết*, nên $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)}$, trong đó cả $n(E)$ và $n(\Omega)$ đều đếm được bằng phép loang.

Cách 2: "Vật di chuyển ngẫu nhiên từng bước". Lúc này đồng khả năng *không còn là giả thiết* mà cần được chứng minh.

Mệnh đề (điều kiện đồng khả năng)

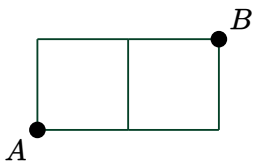
Một vật di chuyển ngẫu nhiên đúng n bước trên một sơ đồ bước đi. Giả sử tại **mọi** nút vật có thể đứng, đều có đúng d bước đi được phép (d không đổi), vật chọn một trong d bước đó với cùng xác suất $\dfrac{1}{d}$, và các lần chọn độc lập với nhau. Khi đó mỗi hành trình n bước có cùng xác suất $\dfrac{1}{d^n}$. Do đó, với biến cố E gồm $n(E)$ hành trình,

$$P(E) = \frac{n(E)}{d^n}.$$

Chứng minh. Hành trình $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n$ xảy ra khi và chỉ khi ở lần chọn thứ i, vật chọn đúng bước $X_{i-1} \to X_i$; biến cố này có xác suất $\dfrac{1}{d}$. Các lần chọn độc lập nên theo công thức nhân xác suất, hành trình có xác suất $\left(\dfrac{1}{d}\right)^n$.

thuvientoanhoc.com

Phản ví dụ khi số lựa chọn thay đổi. Trên lưới 2×1 dưới đây, một vật đi từ A đến B, chỉ sang phải hoặc lên trên; tại mỗi nút, nếu có hai hướng thì vật chọn ngẫu nhiên một hướng với xác suất $\dfrac{1}{2}$, nếu chỉ có một hướng thì đi theo hướng đó.



Có 3 đường đi: LPP, PLP, PPL (với P là sang phải, L là lên trên). Nhưng:

- LPP: lên ngay ở bước đầu (xác suất $\frac{1}{2}$), sau đó chạm biên trên nên buộc phải sang phải: $P(LPP) = \dfrac{1}{2}$;
- PLP: $P(PLP) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$; $\quad$ PPL: $P(PPL) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Ba đường đi **không** đồng khả năng, nên nếu tính theo kiểu $\dfrac{1}{3}$ cho mỗi đường thì sai. Nguyên nhân: tại các nút trên biên, số lựa chọn giảm từ 2 xuống 1, vi phạm giả thiết của mệnh đề.

Ngược lại, bảng Galton thoả mãn mệnh đề: tại mọi chiếc đinh viên bi đều có đúng $d = 2$ lựa chọn và mọi hành trình đều gồm đúng n lần chạm đinh. Đó là lí do ta được phép đếm đường đi để tính xác suất trong bài toán mở đầu.

thuvientoanhoc.com

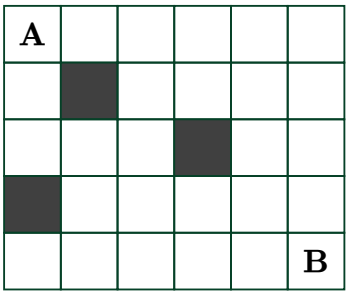
3 Các mô hình bài toán điển hình

3.1 Mô hình 1: Lưới có vật cản

Vật cản có thể là một nút bị cấm (phòng khoá, ngã tư cấm) hoặc một bước đi bị cấm (đoạn đường đang sửa). Khi loang, nút bị cấm mang số 0, còn bước đi bị cấm thì đơn giản là không được cộng.

Ví dụ 1: (Mê cung có phòng bị khoá)

Một nhà thám hiểm cần đi từ phòng A (góc trên bên trái) đến phòng B chứa kho báu (góc dưới bên phải) của một mê cung gồm 5 hàng, 6 cột phòng như hình. Mỗi lần, nhà thám hiểm chỉ được sang phòng kề bên phải hoặc phòng kề ngay bên dưới, và không được vào các phòng bị khoá (tô đen). Hỏi nhà thám hiểm có bao nhiêu cách đi?



Lời giải:

Bước 1 – Mô hình hoá. Mỗi phòng là một nút. Vì chỉ được sang phải hoặc xuống dưới nên muốn vào một phòng, ngay trước đó nhà thám hiểm phải ở **phòng bên trái** hoặc **phòng bên trên** của nó. Sơ đồ không quay vòng vì mỗi bước đều làm (số hàng + số cột) tăng 1.

Bước 2 – Khởi tạo. Ghi 1 vào phòng A; các phòng bị khoá mang số 0.

Bước 3 – Loang. Lần lượt từng hàng từ trên xuống, mỗi hàng từ trái sang phải, ghi vào mỗi phòng tổng của số ở phòng bên trái và số ở phòng bên trên (phòng nằm ngoài mê cung hoặc bị khoá coi như 0):

A 1	1	1	1	1	1
1	■	1	2	3	4
1	1	2	■	3	7
■	1	3	3	6	13
0	1	4	7	13	26 B

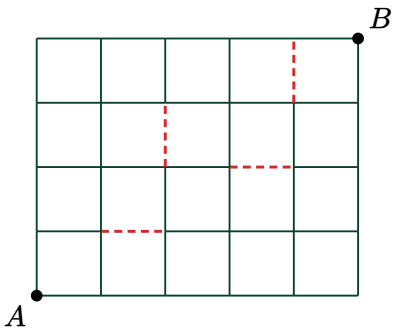
Bước 4 – Kết luận. Số ghi ở phòng B là **26**, vậy nhà thám hiểm có 26 cách đi.

Nhận xét: Hãy để ý hàng thứ hai: phòng bị khoá ở cột 2 làm cho phòng ở cột 3 chỉ nhận được số từ phía trên. Mỗi vật cản "chặn dòng dầu" theo đúng cách đó, và ta không cần chia trường hợp hay dùng phần bù.

thuvientoanhoc.com

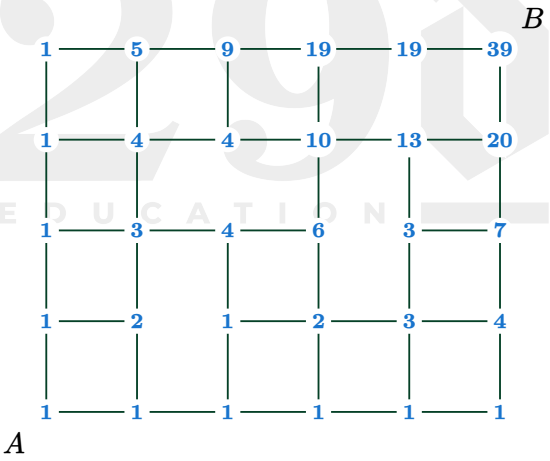
Ví dụ 2: (Đường phố có đoạn đang sửa)

Các con phố của một khu dân cư tạo thành lưới ô vuông như hình. Bạn An đi từ nhà ở $A(0;\ 0)$ đến trường ở $B(5;\ 4)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên dọc theo các con phố. Biết rằng bốn đoạn phố vẽ bằng nét đứt màu đỏ đang sửa nên không đi được. Hỏi An có bao nhiêu cách đi?



Lời giải:

Mỗi mắt lưới $(x;\ y)$ có tối đa hai nút liền trước là $(x-1;\ y)$ và $(x;\ y-1)$. Một đoạn phố đang sửa làm mất đi một bước đi, nên nút ở đầu trên (hoặc đầu phải) của đoạn đó chỉ còn nhận số từ một phía. Loang lần lượt từng hàng từ dưới lên (các đoạn đang sửa đã được xoá khỏi hình):



Chẳng hạn mắt lưới $(2;\ 1)$ không nhận được từ $(1;\ 1)$ nên chỉ mang số $N(2;\ 0)=1$; mắt lưới $(2;\ 3)$ không nhận được từ $(2;\ 2)$ nên chỉ mang số $N(1;\ 3)$.

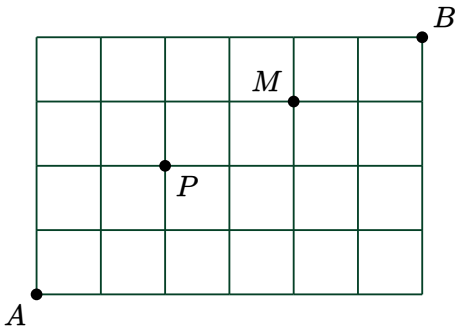
Vậy An có **39** cách đi (so với $C_9^4=126$ cách khi không có đoạn nào sửa).

thuvientoanhoc.com

3.2 Mô hình 2: Bắt buộc đi qua hoặc phải tránh một điểm, một đoạn đường

Ví dụ 3: (Đi qua P, tránh M)

Trên lưới ô vuông như hình, một robot đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 4)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Robot bắt buộc phải đi qua trạm sạc $P(2;\ 2)$ và không được đi qua điểm $M(4;\ 3)$. Hỏi robot có bao nhiêu cách đi?



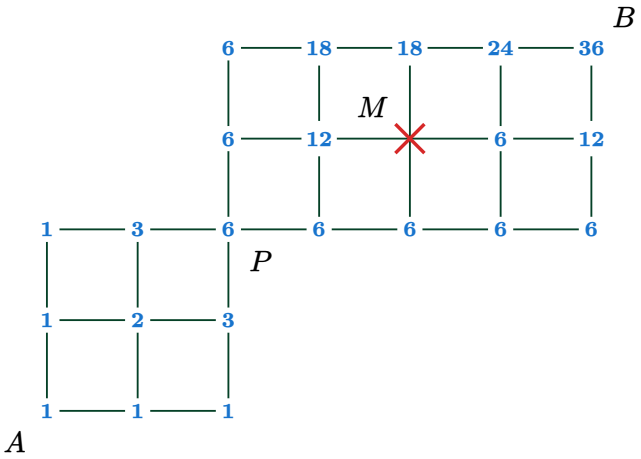
Lời giải:

Cách 1 (tổ hợp kết hợp phần bù):

- Từ A đến P: 2 bước sang phải, 2 bước lên, có $C_4^2 = 6$ cách.
- Từ P đến B (chưa xét M): 4 bước sang phải, 2 bước lên, có $C_6^2 = 15$ cách. Trong đó số cách đi qua M là $C_3^1 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 3 = 9$ (từ P đến M rồi từ M đến B). Vậy từ P đến B không qua M có $15 - 9 = 6$ cách.

Theo quy tắc nhân, số cách đi là $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$.

Cách 2 (loang hai giai đoạn): Vì bắt buộc qua P, chỉ những mắt lưới thuộc hình chữ nhật AP (giai đoạn 1) và hình chữ nhật PB (giai đoạn 2) mới có thể nằm trên một đường đi hợp lệ. Giai đoạn 1 loang từ A được $N(P) = 6$; giai đoạn 2 coi P là điểm xuất phát mang số 6 và loang tiếp, điểm M bị gạch bỏ:



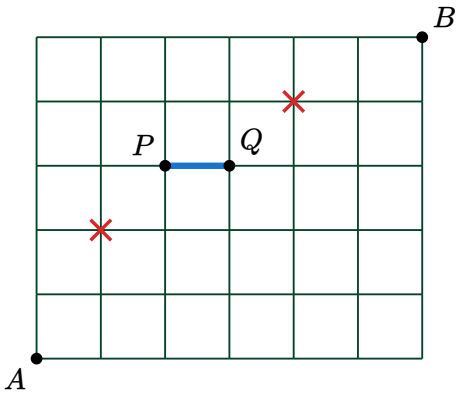
Kết quả tại B là **36**.

Nhận xét: Cách 1 nhanh khi chỉ có một hai điều kiện; nhưng nếu có nhiều điểm cấm, cách 1 phải dùng phần bù nhiều tầng rất dễ sót trường hợp, còn cách 2 vẫn chỉ là một lần loang.

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 4: (Bắt buộc qua một đoạn đường)

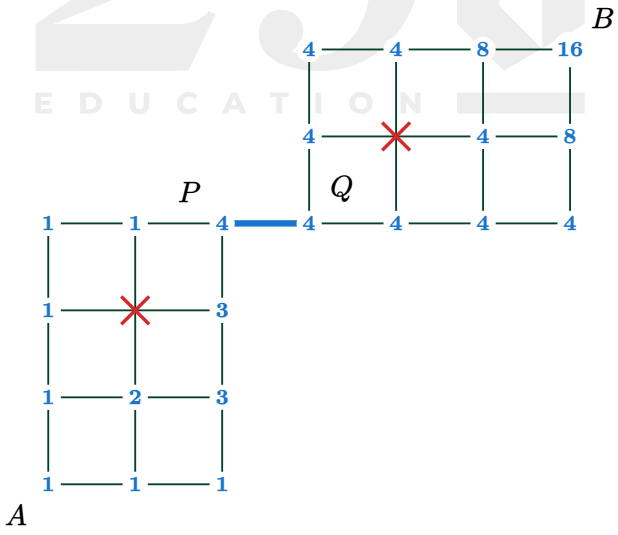
Một khu phố có dạng lưới ô vuông như hình; hai ngã tư đánh dấu $\times$ đang bị phong toả. Một người đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 5)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên, và muốn ghé một hiệu sách nằm trên đoạn phố PQ (tô đậm màu xanh) với $P(2;\ 3)$, $Q(3;\ 3)$, nên bắt buộc phải đi qua đoạn phố PQ. Hỏi người đó có bao nhiêu cách đi?



Lời giải:

Giai đoạn 1 – Loang từ A đến P. Mắt lưới $(1;\ 2)$ bị cấm, loang trong hình chữ nhật AP được $N(P) = 4$.

Giai đoạn 2 – Qua đoạn PQ và loang tiếp. Bắt buộc phải qua bước đi $P \to Q$ nên Q nhận giá trị $N(P) = 4$; sau đó loang tiếp trong hình chữ nhật QB, mắt lưới $(4;\ 4)$ bị cấm:



Vậy có **16** cách đi. Kiểm tra bằng Hệ quả 2: $N(A \to P) \cdot N(Q \to B) = 4 \cdot 4 = 16$.

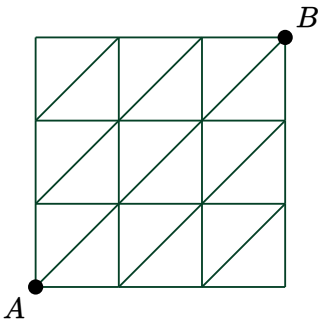
thuvientoanhoc.com

3.3 Mô hình 3: Lưới không vuông và lưới có bước chéo

Nguyên lí vết dầu loang không đòi hỏi lưới phải vuông, cũng không đòi hỏi mỗi nút có đúng hai nút liền trước. Chỉ cần trả lời đúng câu hỏi "*ngay trước đó vật có thể đứng ở đâu*".

Ví dụ 5: (Lưới có đường chéo)

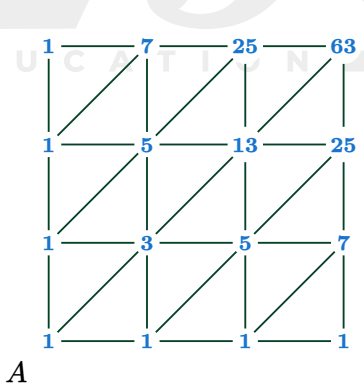
Trên lưới ô vuông 3×3, mỗi ô vuông nhỏ có thêm một đường chéo nối góc dưới bên trái với góc trên bên phải như hình. Một vật đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(3;\ 3)$, mỗi bước đi sang phải, lên trên hoặc đi chéo lên theo đường chéo của một ô. Hỏi có bao nhiêu cách đi?



Lời giải:

Mắt lưới $(x;\ y)$ bây giờ có ba nút liền trước: $(x-1;\ y)$, $(x;\ y-1)$ và $(x-1;\ y-1)$. Sơ đồ vẫn không quay vòng vì mỗi bước làm $x+y$ tăng. Do đó

$$N(x;\ y) = N(x-1;\ y) + N(x;\ y-1) + N(x-1;\ y-1).$$



Vậy có **63** cách đi.

So sánh với cách đếm bằng tổ hợp. Nếu dùng tổ hợp, ta phải chia trường hợp theo số bước chéo k $(0 \le k \le 3)$: khi đó có $3-k$ bước sang phải, $3-k$ bước lên và k bước chéo, tổng cộng $6-k$ bước. Số cách là

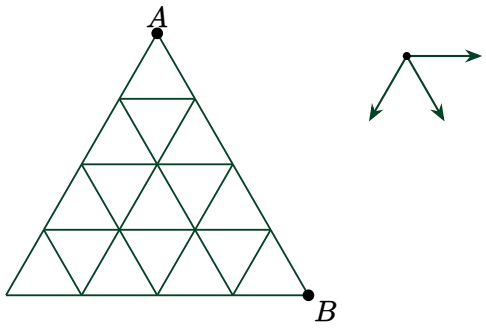
$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(6-k)!}{k!\,(3-k)!\,(3-k)!} = 20 + 30 + 12 + 1 = 63.$$

Kết quả trùng khớp, nhưng nếu chỉ một vài ô có đường chéo thì cách tổ hợp gần như không dùng được nữa, còn phép loang thì không thay đổi.

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 6: (Lưới tam giác)

Một tam giác đều cạnh 4 được chia thành 16 tam giác đều cạnh 1 bởi các đường thẳng song song với ba cạnh. Một con kiến bò từ đỉnh A (trên cùng) đến đỉnh B (góc dưới bên phải) dọc theo các cạnh của các tam giác nhỏ. Mỗi bước, kiến chỉ được bò theo một trong ba hướng: chéo xuống bên trái, chéo xuống bên phải, hoặc sang phải theo cạnh nằm ngang (như hình). Hỏi kiến có bao nhiêu cách bò?

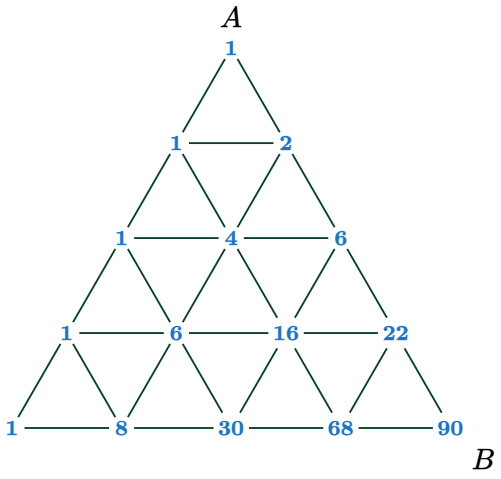


Lời giải:

Mô hình hoá. Các nút là các đỉnh của tam giác nhỏ, xếp theo các hàng ngang. Mỗi bước, kiến hoặc xuống hàng dưới, hoặc sang phải trên cùng một hàng, nên kiến không bao giờ quay lại vị trí cũ (sơ đồ không quay vòng). Một đỉnh X có tối đa ba nút liền trước:

- đỉnh ở hàng trên, lệch về bên phải (từ đó bò chéo xuống trái tới X);
- đỉnh ở hàng trên, lệch về bên trái (từ đó bò chéo xuống phải tới X);
- đỉnh kề bên trái trên cùng hàng (từ đó bò sang phải tới X).

Loang lần lượt từng hàng từ trên xuống, mỗi hàng từ trái sang phải:



Vậy kiến có **90** cách bò.

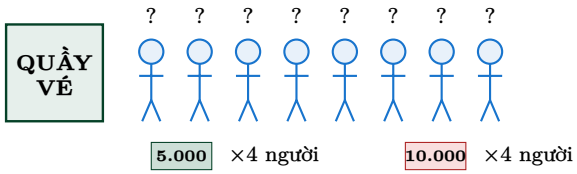
thuvientoanhoc.com

3.4 Mô hình 4: Đường đi không vượt đường chéo

Nhiều bài toán "xếp hàng" có điều kiện *tại mọi thời điểm* (số người loại này không ít hơn số người loại kia, ứng viên này luôn dẫn trước...). Khi mã hoá mỗi người thành một bước đi, điều kiện đó trở thành: đường đi không được vượt lên trên một đường chéo. Phần lưới phía trên đường chéo bị xoá, rồi ta loang trên phần còn lại.

Ví dụ 7: (Xếp hàng mua vé)

Một quầy bán vé giá 5 000 đồng, lúc mở cửa không có sẵn tiền lẻ. Có 8 người xếp hàng mua vé, mỗi người mua một vé; trong đó 4 người chỉ có tờ 5 000 đồng và 4 người chỉ có tờ 10 000 đồng. Người bán chỉ dùng tiền khách vừa trả để thối lại. Nếu chỉ quan tâm người đứng ở mỗi vị trí trong hàng cầm loại tiền nào, có bao nhiêu cách xếp hàng để không ai phải chờ tiền thối?

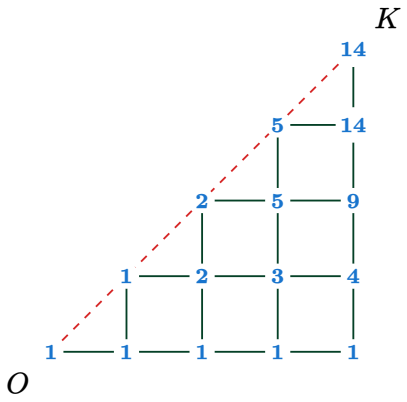


Lời giải:

Mã hoá. Người cầm tờ 5 000 đồng ứng với một bước **sang phải**, người cầm tờ 10 000 đồng ứng với một bước **lên trên**. Mỗi cách xếp hàng ứng với đúng một đường đi từ $O(0;\ 0)$ đến $K(4;\ 4)$.

Điều kiện. Mỗi người trả tờ 10 000 đồng cần được thối một tờ 5 000 đồng, mà tờ này chỉ có thể đến từ những người cầm tờ 5 000 đồng đứng trước. Vậy tại mọi thời điểm, số người cầm tờ 10 000 đồng đã mua không vượt quá số người cầm tờ 5 000 đồng đã mua, tức là mọi điểm $(x;\ y)$ trên đường đi đều thoả mãn $y \le x$: **đường đi không vượt lên trên đường chéo** OK (được phép chạm).

Loang trên phần lưới thoả mãn $y \le x$ (mắt lưới trên đường chéo chỉ nhận được số từ bên trái):



Vậy có **14** cách xếp hàng.

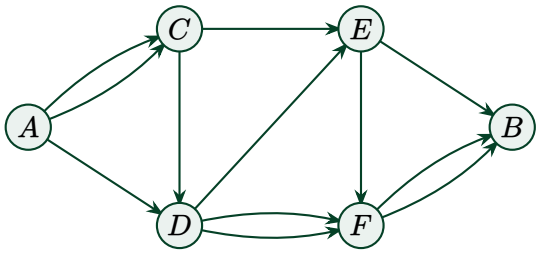
Nhận xét: Các số trên đường chéo 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... được gọi là các **số Catalan**; người ta chứng minh được số thứ n bằng $\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ (chứng minh nằm ngoài phạm vi chương trình, bạn nào muốn tìm hiểu thêm có thể tự chứng minh nhé).

thuvientoanhoc.com

3.5 Mô hình 5: Sơ đồ một chiều (đồ thị có hướng)

Ví dụ 8: (Bản đồ đường một chiều)

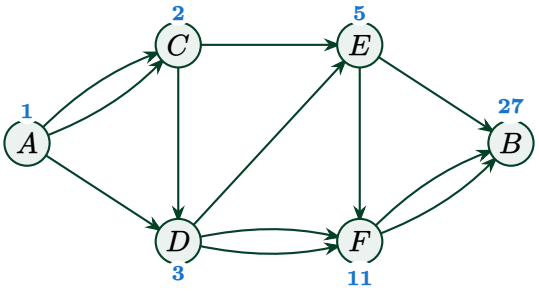
Sơ đồ dưới đây mô tả các tuyến đường một chiều giữa các địa điểm A, C, D, E, F, B: mỗi mũi tên là một tuyến đường chỉ được đi theo chiều mũi tên; giữa hai địa điểm có thể có nhiều tuyến đường khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B?



Lời giải:

Sơ đồ không quay vòng: sắp các địa điểm theo thứ tự A, C, D, E, F, B thì mọi mũi tên đều đi từ địa điểm đứng trước sang địa điểm đứng sau. Loang theo đúng thứ tự đó, nhân với số tuyến đường (bội) của mỗi bước:

- $N(A) = 1$;
- $N(C) = 2 \cdot N(A) = 2$ (do có 2 tuyến từ A đến C);
- $N(D) = N(A) + N(C) = 1 + 2 = 3$;
- $N(E) = N(C) + N(D) = 2 + 3 = 5$;
- $N(F) = 2 \cdot N(D) + N(E) = 6 + 5 = 11$;
- $N(B) = N(E) + 2 \cdot N(F) = 5 + 22 = 27$.



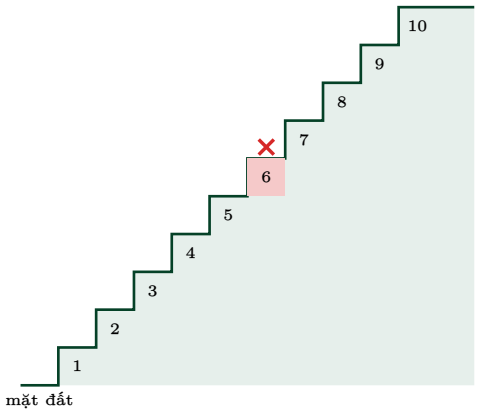
Vậy có **27** cách đi từ A đến B.

Lưu ý: Phải tính $N(C)$ trước $N(D)$ vì C là một nút liền trước của D. Nếu loang sai thứ tự, ta sẽ cộng một giá trị chưa hoàn chỉnh.

thuvientoanhoc.com

Ví dụ 9: (Cầu thang có bậc hỏng)

Một cầu thang có 10 bậc. Mỗi bước, An bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Biết bậc thứ 6 bị hỏng nên An không được đặt chân lên bậc đó. Hỏi An có bao nhiêu cách đi từ mặt đất lên bậc thứ 10?



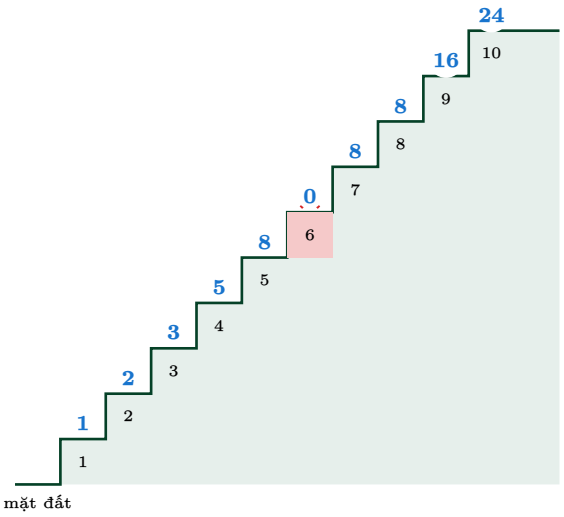
Lời giải:

Coi mặt đất là bậc 0. Muốn đứng ở bậc k, ngay trước đó An phải đứng ở bậc $k-1$ hoặc bậc $k-2$, nên

$$N(k) = N(k-1) + N(k-2), \qquad N(0) = 1, \qquad N(6) = 0.$$

Loang từ dưới lên:

Bậc k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(k)$	1	1	2	3	5	8	0	8	8	16	**24**



Vậy An có **24** cách đi.

Nhận xét: Nếu không có bậc hỏng, các số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... chính là **dãy Fibonacci** và đáp số là 89.

Do bậc 6 bị hỏng nên $N(6) = 0$ do đó: $N(7) = N(5) + 0$ và $N(8) = 0 + N(7)$, phá vỡ dãy Fibonacci. Một lần nữa "Vết dầu loang"khắc phục được nhược điểm của các cách làm cũ với bài toán bị phá vỡ quy luật.

thuvientoanhoc.com

3.6 Mô hình 6: Xác suất trên các đường đi đồng khả năng

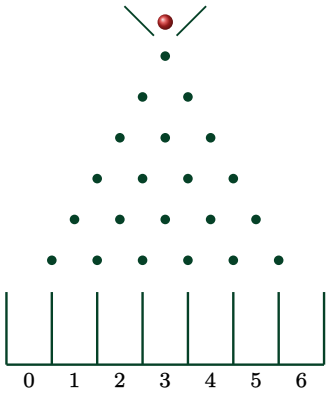
Ví dụ 10: (Giải trọn vẹn bài toán mở đầu)

Bảng Galton có 6 hàng đinh và 7 ngăn đánh số từ 0 đến 6. Mỗi khi chạm đinh, viên bi nảy sang trái hoặc sang phải với cùng xác suất $\frac{1}{2}$, độc lập với các lần trước.

a) Có bao nhiêu đường đi để viên bi rơi vào ngăn số 3?

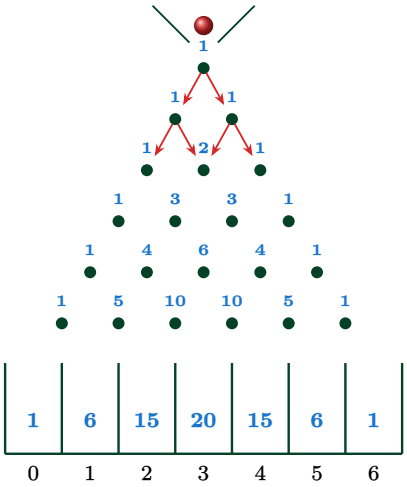
b) Tính xác suất để viên bi rơi vào ngăn số 3.

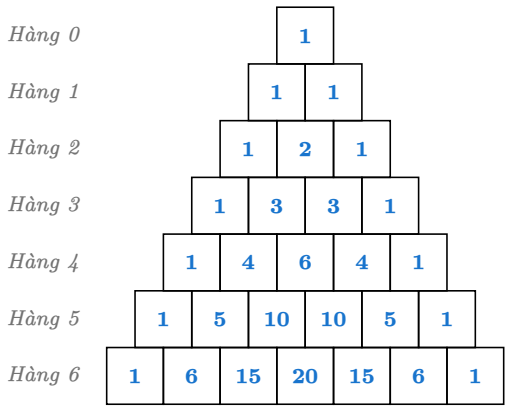
c) Tính xác suất để viên bi rơi vào một trong ba ngăn 2, 3, 4.



Lời giải:

a) Các nút là các chiếc đinh và các ngăn. Một chiếc đinh (hoặc một ngăn) chỉ có thể được viên bi chạm tới từ một trong hai chiếc đinh nằm chéo ngay phía trên nó. Loang từ chiếc đinh trên cùng (mang số 1), mỗi đinh mang tổng hai số chéo phía trên (số nhỏ màu xanh ghi trên mỗi đinh, số ở đáy là số đường đi tới mỗi ngăn):





Các số loang ra chính là tam giác Pascal; ngăn j có C_6^j đường đi. Ngăn số 3 có $C_6^3 = \mathbf{20}$ đường đi.

thuvientoanhoc.com

b) Mỗi hành trình gồm đúng 6 lần chạm đinh, và tại **mọi** chiếc đinh viên bi có đúng $d = 2$ lựa chọn với xác suất bằng nhau, các lần độc lập. Theo mệnh đề về điều kiện đồng khả năng, 64 hành trình có cùng khả năng xảy ra như nhau. Do đó, không gian mẫu là $n(\Omega) = 64$ và:

$$P(\text{rơi vào ngăn 3}) = \frac{20}{64} = \mathbf{\frac{5}{16}}.$$

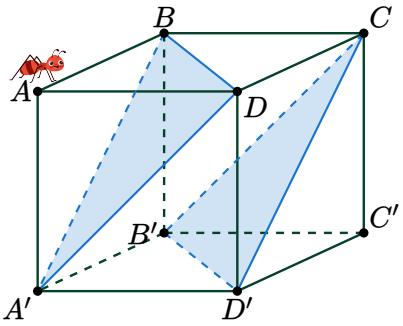
c) Số hành trình rơi vào ngăn 2, 3 hoặc 4 là $15 + 20 + 15 = 50$. Vậy xác suất cần tìm là

$$\frac{50}{64} = \mathbf{\frac{25}{32}} \approx 0{,}78.$$

Nhận xét: Dù bi nảy trái/phải ngẫu nhiên, các ngăn ở giữa nhận bi nhiều hơn hẳn các ngăn ở rìa (20 so với 1). Khi thả hàng nghìn viên bi, các ngăn sẽ dần xếp thành hình quả chuông (bell curve); đây là lí do bảng Galton thường được dùng để minh hoạ phân bố nhị thức và đó là câu chuyện trong một dịp khác. Giờ ta sẽ quay lại với "Vết dầu loang".

Ví dụ 11: (Con kiến trên hình lập phương)

Một con kiến đang ở đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mỗi giây, kiến chọn ngẫu nhiên một trong ba cạnh xuất phát từ đỉnh nó đang đứng (với cùng xác suất, các lần chọn độc lập) rồi bò hết cạnh đó sang đỉnh khác. Tính xác suất để sau đúng 4 giây kiến quay lại đỉnh A.



Lời giải:

Không gian mẫu: Mỗi đỉnh của hình lập phương có đúng 3 cạnh, nên theo mệnh đề về điều kiện đồng khả năng (với $d = 3$, $n = 4$), $3^4 = 81$ hành trình 4 bước đồng khả năng.

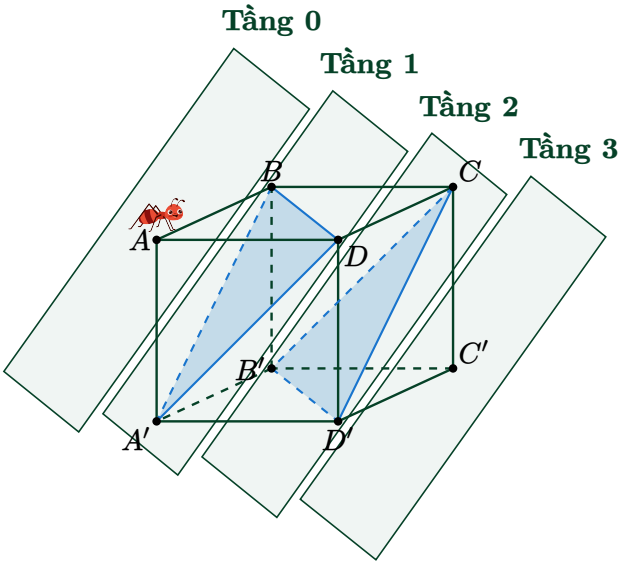
Đếm số hành trình quay về A:

Sơ đồ các cạnh có vòng (kiến có thể bò đi rồi bò lại), nên ta trải sơ đồ theo số bước. Để gọn, chia 8 đỉnh thành 4 tầng theo số cạnh ít nhất phải đi từ A:

- Tầng 0: {A}
- Tầng 0: {B, D, A'}
- Tầng 0: {C, B', D'}
- Tầng 0: {C'}

thuvientoanhoc.com

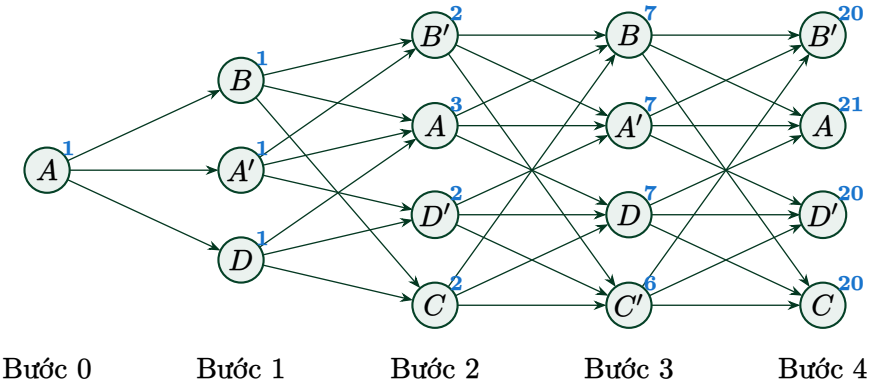
Do tính đối xứng của hình lập phương, các đỉnh cùng nhóm có cùng số hành trình N_k.



Kiểm tra các đỉnh kề:

- Tầng 0 kề 3 đỉnh thuộc tầng 1;
- Tầng 1 kề 1 đỉnh thuộc tầng 0 và 2 đỉnh thuộc tầng 2;
- Tầng 2 kề 2 đỉnh thuộc tầng 1 và 1 đỉnh thuộc tầng 3;
- Tầng 3 kề 3 đỉnh thuộc tầng 2.

Theo công thức trải theo số bước, số hành trình tới một đỉnh bằng tổng số hành trình tới các đỉnh kề nó ở bước trước. Điền lần lượt số cách đi vào lưới đã trải, ta được số cách con kiến ở A tại Bước 4 là 21.



Vậy xác suất kiến quay về A sau 4 giây là

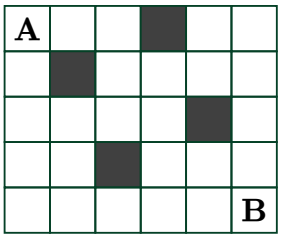
$$P = \frac{21}{81} = \frac{7}{27} \approx 0{,}26.$$

thuvientoanhoc.com

4 Bài tập tự luyện

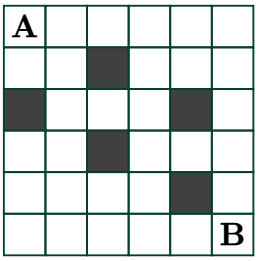
Tất cả các câu đều ở dạng trả lời ngắn. Các câu hỏi xác suất (trừ khi có yêu cầu khác) làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 1 [29Edu]: Một robot di chuyển trong một mê cung gồm 5 hàng, 6 cột ô vuông như hình. Robot xuất phát từ ô A và cần đến ô B; mỗi lần robot chỉ được sang ô kề bên phải hoặc ô kề ngay bên dưới và không được đi vào các ô tô đen. Hỏi robot có bao nhiêu cách đi?



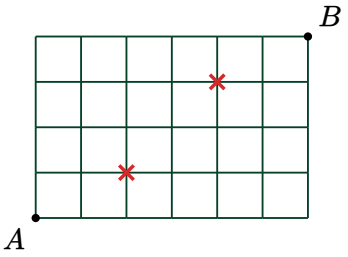
Trả lời:

Câu 2 [29Edu]: Trong một trò chơi điện tử, bản đồ là một bảng gồm 6 hàng, 6 cột ô vuông như hình; các ô tô đen là chướng ngại vật. Nhân vật xuất phát ở ô A, mỗi lượt chỉ được sang ô kề bên phải hoặc ô kề ngay bên dưới, không được vào ô chướng ngại vật. Hỏi có bao nhiêu cách để nhân vật đến được ô B?



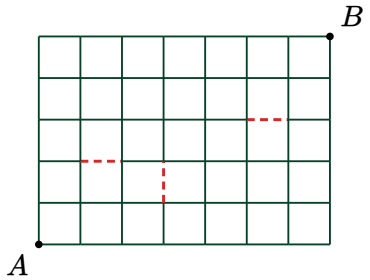
Trả lời:

Câu 3 [29Edu]: Các con phố của một thị trấn tạo thành lưới ô vuông như hình. Một người đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 4)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị dọc theo các con phố. Hai ngã tư đánh dấu $\times$ đang bị cấm, không được đi qua. Hỏi người đó có bao nhiêu cách đi?



Trả lời:

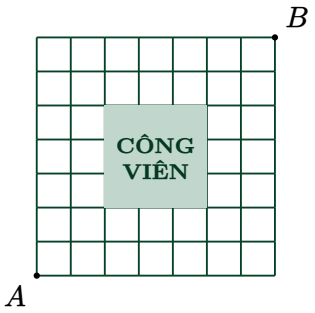
Câu 4 [29Edu]: Một xe giao hàng đi từ kho $A(0;\ 0)$ đến cửa hàng $B(7;\ 5)$ trên mạng lưới đường phố dạng ô vuông như hình, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Ba đoạn đường vẽ nét đứt màu đỏ đang thi công nên không đi được. Hỏi xe có bao nhiêu lộ trình?



Trả lời:

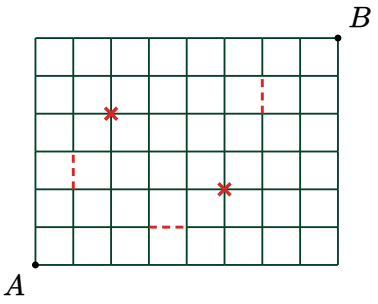
thuvientoanhoc.com

Câu 5 [29Edu]: Một khu đô thị có các con phố tạo thành lưới ô vuông 7×7; ở giữa khu đô thị là một công viên hình vuông (phần tô màu) mà xe không được đi xuyên qua, nhưng vẫn được đi trên các con phố bao quanh công viên. Một xe đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(7;\ 7)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Hỏi xe có bao nhiêu cách đi?



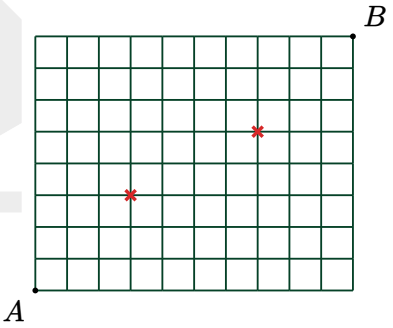
Trả lời:

Câu 6 [29Edu]: Trên lưới đường phố như hình, một người đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(8;\ 6)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Hai ngã tư đánh dấu $\times$ bị cấm và ba đoạn đường nét đứt màu đỏ đang sửa. Hỏi người đó có bao nhiêu cách đi?



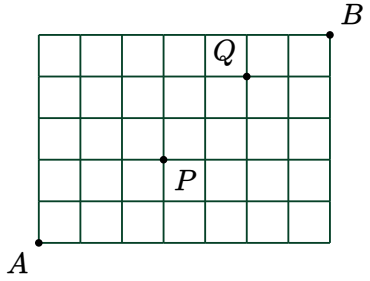
Trả lời:

Câu 7 [29Edu]: Một robot đi trên lưới ô vuông như hình từ $A(0;\ 0)$ đến $B(10;\ 8)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị, không đi qua hai điểm đánh dấu $\times$. Gọi T là số cách đi của robot. Tính giá trị của $\dfrac{T}{6}$.



Trả lời:

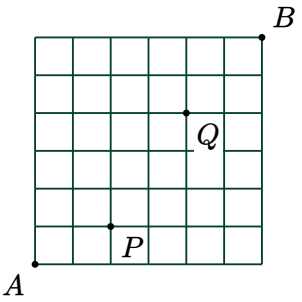
Câu 8 [29Edu]: Trên lưới ô vuông như hình, một người đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(7;\ 5)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Người đó bắt buộc phải ghé điểm $P(3;\ 2)$ và không được đi qua điểm $Q(5;\ 4)$. Hỏi có bao nhiêu cách đi?



Trả lời:

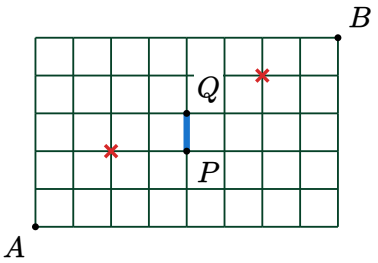
thuvientoanhoc.com

Câu 9 [29Edu]: Một shipper đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 6)$ trên lưới đường phố như hình, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị, và phải lần lượt nhận hàng tại $P(2;\ 1)$ rồi giao hàng tại $Q(4;\ 4)$ trước khi về B. Hỏi shipper có bao nhiêu cách đi?



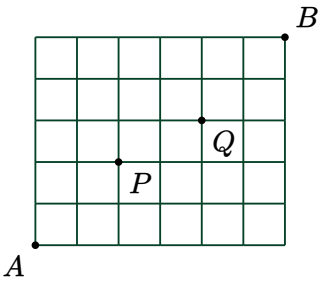
Trả lời:

Câu 10 [29Edu]: Một khu phố có dạng lưới ô vuông như hình; hai ngã tư đánh dấu $\times$ đang bị phong toả. Một người đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(8;\ 5)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên, và bắt buộc phải đi qua đoạn phố PQ (tô đậm màu xanh) với $P(4;\ 2)$, $Q(4;\ 3)$. Hỏi người đó có bao nhiêu cách đi?



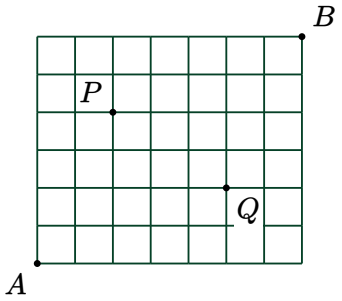
Trả lời:

Câu 11 [29Edu]: Trên lưới ô vuông như hình, một vật đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 5)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Hỏi có bao nhiêu cách đi qua **đúng một** trong hai điểm $P(2;\ 2)$ và $Q(4;\ 3)$?



Trả lời:

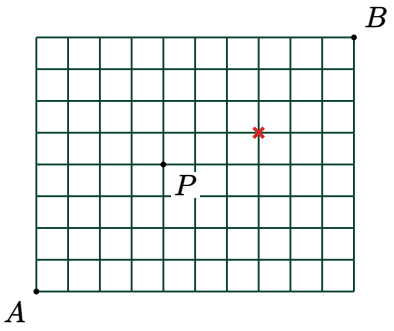
Câu 12 [29Edu]: Một xe điện đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(7;\ 6)$ trên lưới đường phố như hình, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Xe cần ghé **ít nhất một** trong hai trạm sạc $P(2;\ 4)$ và $Q(5;\ 2)$. Hỏi xe có bao nhiêu cách đi?



Trả lời:

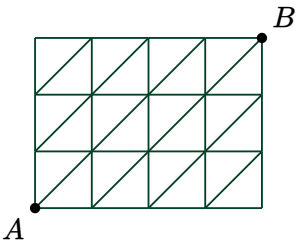
thuvientoanhoc.com

Câu 13 [29Edu]: Một robot đi trên lưới ô vuông như hình từ $A(0;\ 0)$ đến $B(10;\ 8)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Robot bắt buộc phải đi qua điểm $P(4;\ 4)$ và không được đi qua điểm đánh dấu $\times$. Hỏi robot có bao nhiêu cách đi?



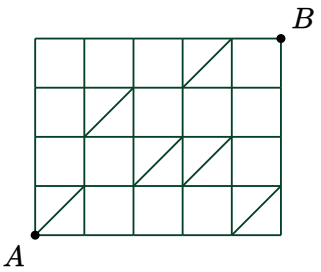
Trả lời:

Câu 14 [29Edu]: Trên lưới ô vuông 4×3, mỗi ô vuông nhỏ có thêm một đường chéo nối góc dưới bên trái với góc trên bên phải như hình. Một vật đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(4;\ 3)$, mỗi bước đi sang phải, lên trên hoặc đi chéo lên theo đường chéo của một ô. Hỏi có bao nhiêu cách đi?



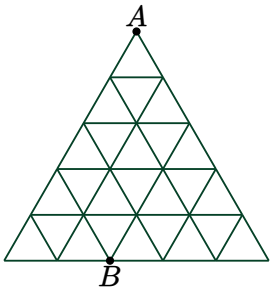
Trả lời:

Câu 15 [29Edu]: Trên lưới ô vuông như hình, chỉ một số ô có thêm đường chéo nối góc dưới bên trái với góc trên bên phải. Một vật đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(5;\ 4)$, mỗi bước đi sang phải, lên trên, hoặc đi chéo lên theo một đường chéo có trên hình. Hỏi có bao nhiêu cách đi?



Trả lời:

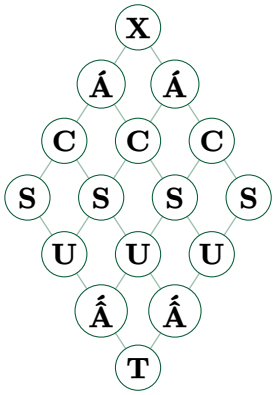
Câu 16 [29Edu]: Một tam giác đều cạnh 5 được chia thành 25 tam giác đều cạnh 1 bởi các đường thẳng song song với ba cạnh. Một con kiến bò từ đỉnh A đến điểm B trên cạnh đáy như hình, dọc theo các cạnh của các tam giác nhỏ; mỗi bước kiến chỉ bò chéo xuống bên trái, chéo xuống bên phải, hoặc sang phải theo cạnh nằm ngang. Hỏi kiến có bao nhiêu cách bò?



Trả lời:

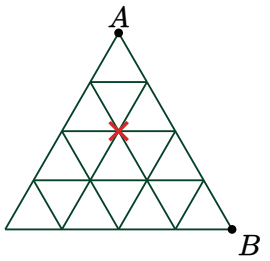
thuvientoanhoc.com

Câu 17 [29Edu]: Các chữ cái được xếp thành hình thoi như hình, các chữ cái ở hai hàng liên tiếp được nối với nhau nếu chúng kề nhau. Bắt đầu từ chữ X ở hàng trên cùng, mỗi lần di chuyển xuống một chữ cái được nối với nó ở hàng ngay dưới. Hỏi có bao nhiêu cách đọc được chữ "XÁCSUẤT"?



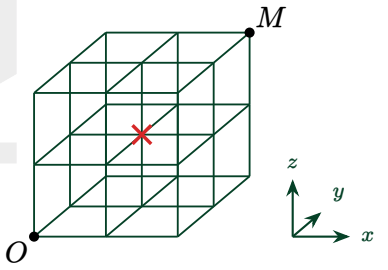
Trả lời:

Câu 18 [29Edu]: Một tam giác đều cạnh 4 được chia thành 16 tam giác đều cạnh 1 như hình. Một con kiến bò từ đỉnh A đến đỉnh B dọc theo các cạnh của các tam giác nhỏ; mỗi bước kiến chỉ bò chéo xuống bên trái, chéo xuống bên phải, hoặc sang phải theo cạnh nằm ngang. Biết rằng kiến không được đi qua điểm đánh dấu $\times$. Hỏi kiến có bao nhiêu cách bò?



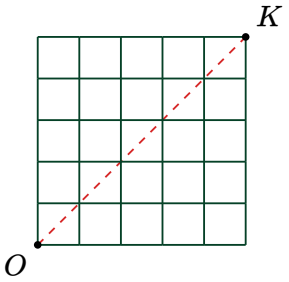
Trả lời:

Câu 19 [29Edu]: Một khung lưới không gian được tạo bởi các thanh dài 1 đơn vị như hình, các điểm nút có toạ độ nguyên $(x;\ y;\ z)$ với $0 \le x,\ y,\ z \le 2$. Một con kiến bò từ $O(0;\ 0;\ 0)$ đến $M(2;\ 2;\ 2)$ dọc theo các thanh, mỗi bước bò một đơn vị theo chiều dương của trục Ox, Oy hoặc Oz, và không đi qua điểm chính giữa $(1;\ 1;\ 1)$ (đánh dấu $\times$). Hỏi kiến có bao nhiêu cách bò?



Trả lời:

Câu 20 [29Edu]: Trên lưới ô vuông 5×5 như hình, một vật đi từ $O(0;\ 0)$ đến $K(5;\ 5)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị, và không bao giờ đi lên phía trên đường chéo OK (được phép chạm đường chéo). Hỏi có bao nhiêu cách đi?



Trả lời:

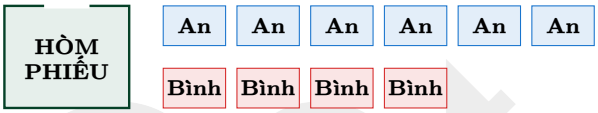
thuvientoanhoc.com

Câu 21 [29Edu]: Một quầy bán vé giá 5 000 đồng, lúc mở cửa không có sẵn tiền lẻ. Có 10 người xếp hàng mua vé, mỗi người mua một vé; trong đó 6 người chỉ có tờ 5 000 đồng và 4 người chỉ có tờ 10 000 đồng. Người bán chỉ dùng tiền khách vừa trả để thối lại. Nếu chỉ quan tâm người đứng ở mỗi vị trí cầm loại tiền nào, có bao nhiêu cách xếp hàng để không ai phải chờ tiền thối?



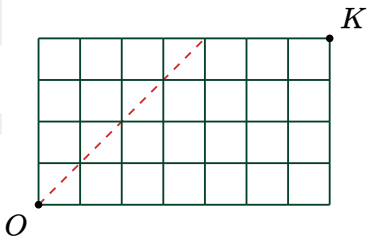
Trả lời:

Câu 22 [29Edu]: Trong một cuộc bầu chọn lớp trưởng, bạn An được 6 phiếu và bạn Bình được 4 phiếu. Các phiếu được rút ngẫu nhiên lần lượt từng phiếu ra khỏi hòm để kiểm. Tính xác suất để trong suốt quá trình kiểm phiếu, sau mỗi lần rút, số phiếu của An luôn nhiều hơn số phiếu của Bình. *(Viết kết quả dưới dạng số thập phân.)*



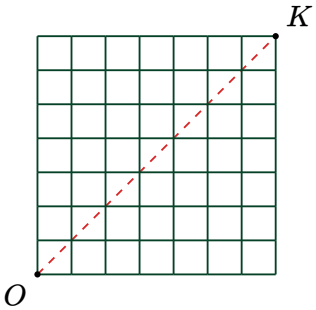
Trả lời:

Câu 23 [29Edu]: Trên lưới ô vuông như hình, một vật đi từ $O(0;\ 0)$ đến $K(7;\ 4)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Đường thẳng nét đứt là đường $y = x$. Hỏi có bao nhiêu cách đi mà vật không bao giờ đi lên phía trên đường thẳng này (được phép chạm)?



Trả lời:

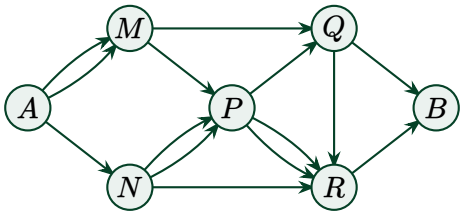
Câu 24 [29Edu]: Trên lưới ô vuông 7×7 như hình, một vật đi từ $O(0;\ 0)$ đến $K(7;\ 7)$, mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị. Hỏi có bao nhiêu cách đi mà vật không đi lên phía trên đường chéo OK và cũng không chạm đường chéo này, trừ tại hai điểm O và K?



Trả lời:

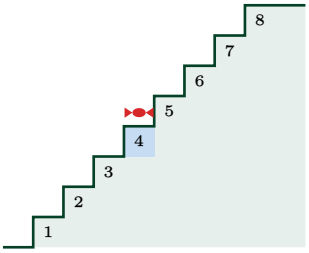
thuvientoanhoc.com

Câu 25 [29Edu]: Sơ đồ dưới đây mô tả các tuyến đường một chiều giữa các địa điểm; mỗi mũi tên là một tuyến đường chỉ được đi theo chiều mũi tên (giữa hai địa điểm có thể có nhiều tuyến đường). Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B?



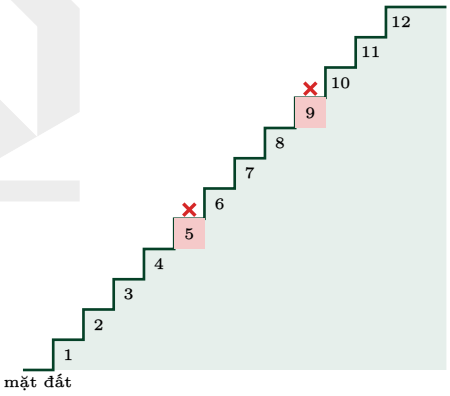
Trả lời:

Câu 26 [29Edu]: Một cầu thang có 8 bậc. Mỗi bước, em An bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Trên bậc thứ 4 có một chiếc kẹo nên em An nhất định phải đặt chân lên bậc này. Hỏi em An có bao nhiêu cách đi từ mặt đất lên bậc thứ 8?



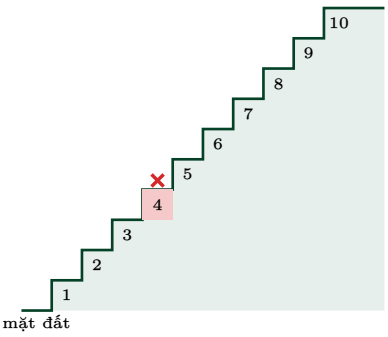
Trả lời:

Câu 27 [29Edu]: Một cầu thang có 12 bậc. Mỗi bước, Bình bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Bậc thứ 5 và bậc thứ 9 bị hỏng nên Bình không được đặt chân lên hai bậc này. Hỏi Bình có bao nhiêu cách đi từ mặt đất lên bậc thứ 12?



Trả lời:

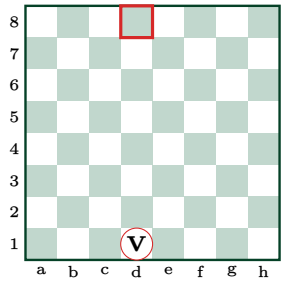
Câu 28 [29Edu]: Một cầu thang có 10 bậc. Mỗi bước, Chi bước lên 1, 2 hoặc 3 bậc. Bậc thứ 4 bị hỏng nên Chi không được đặt chân lên bậc đó. Hỏi Chi có bao nhiêu cách đi từ mặt đất lên bậc thứ 10?



Trả lời:

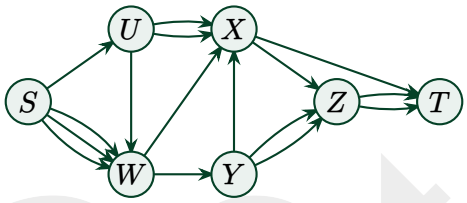
thuvientoanhoc.com

Câu 29 [29Edu]: Trên bàn cờ vua 8×8, một quân vua đặt ở ô $d1$. Mỗi nước, quân vua đi lên đúng một hàng: lên thẳng, chéo lên bên trái hoặc chéo lên bên phải (không được ra khỏi bàn cờ). Hỏi có bao nhiêu cách để quân vua đi đến ô $d8$ (ô viền đỏ)?



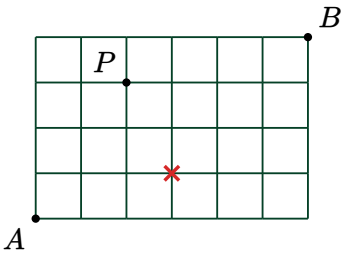
Trả lời:

Câu 30 [29Edu]: Sơ đồ dưới đây mô tả hệ thống ống dẫn nước một chiều từ trạm bơm S đến bể chứa T; mỗi mũi tên là một đoạn ống chỉ cho nước chảy theo chiều mũi tên (giữa hai điểm có thể có nhiều đoạn ống). Một luồng nước đi từ S đến T được xác định bởi dãy các đoạn ống mà nó chảy qua. Hỏi có bao nhiêu luồng nước khác nhau đi từ S đến T?



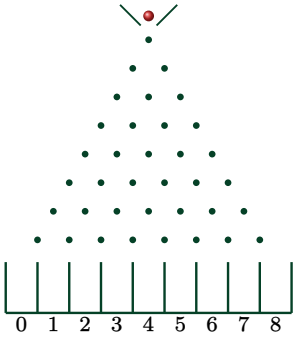
Trả lời:

Câu 31 [29Edu]: Trên lưới ô vuông như hình, xét tất cả các đường đi từ $A(0;\ 0)$ đến $B(6;\ 4)$ mà mỗi bước chỉ đi sang phải hoặc lên trên một đơn vị và không đi qua điểm đánh dấu $\times$. Chọn ngẫu nhiên một đường đi trong số đó. Tính xác suất để đường đi được chọn đi qua điểm $P(2;\ 3)$.



Trả lời:

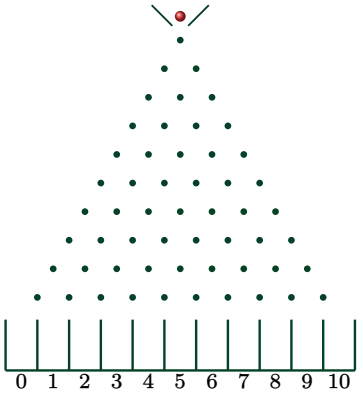
Câu 32 [29Edu]: Một bảng Galton có 8 hàng đinh (hàng thứ k có k chiếc đinh) và 9 ngăn đánh số từ 0 đến 8 như hình. Mỗi khi chạm đinh, viên bi nảy sang trái hoặc sang phải với cùng xác suất $\dfrac{1}{2}$, độc lập với các lần trước. Tính xác suất để viên bi rơi vào ngăn số 4.



Trả lời:

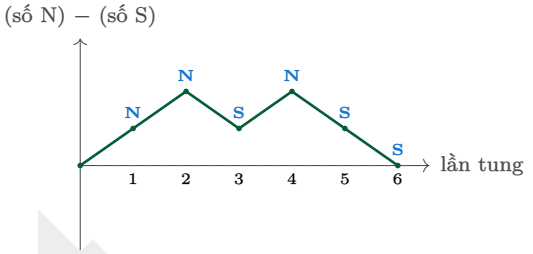
thuvientoanhoc.com

Câu 33 [29Edu]: Một bảng Galton có 10 hàng đinh và 11 ngăn đánh số từ 0 đến 10 như hình. Mỗi khi chạm đinh, viên bi nảy sang trái hoặc sang phải với cùng xác suất $\frac{1}{2}$, độc lập với các lần trước. Tính xác suất để viên bi rơi vào một trong các ngăn 4, 5, 6.



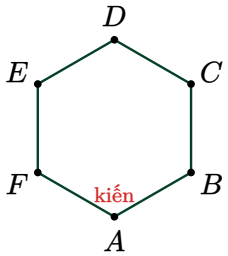
Trả lời:

Câu 34 [29Edu]: Tung một đồng xu cân đối và đồng chất 6 lần liên tiếp. Hình bên minh hoạ một dãy kết quả (N: mặt ngửa, S: mặt sấp) bằng đường gấp khúc, mỗi mặt ngửa ứng với một đoạn đi lên, mỗi mặt sấp ứng với một đoạn đi xuống. Tính xác suất để sau mỗi lần tung, tổng số lần xuất hiện mặt ngửa luôn không ít hơn tổng số lần xuất hiện mặt sấp.



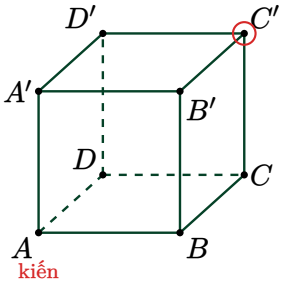
Trả lời:

Câu 35 [29Edu]: Một con kiến đang ở đỉnh A của lục giác đều $ABCDEF$. Mỗi giây, kiến chọn ngẫu nhiên một trong hai cạnh xuất phát từ đỉnh nó đang đứng (với cùng xác suất, các lần chọn độc lập) rồi bò hết cạnh đó sang đỉnh kề. Tính xác suất để sau đúng 6 giây kiến ở đỉnh A.



Trả lời:

Câu 36 [29Edu]: Một con kiến đang ở đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mỗi giây, kiến chọn ngẫu nhiên một trong ba cạnh xuất phát từ đỉnh nó đang đứng (với cùng xác suất, các lần chọn độc lập) rồi bò hết cạnh đó sang đỉnh khác. Tính xác suất để sau đúng 5 giây kiến ở đỉnh C'.



Trả lời:

thuvientoanhoc.com

5 Đáp án

Các câu hỏi xác suất được làm tròn đến hàng phần trăm theo yêu cầu của đề.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	13	15	54	388	982	1120	3013	170	180	54
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	204	630	9100	129	251	48	20	26	54	42
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	90	0,2	165	132	21	25	20	106	393	46
Câu	31	32	33	34	35	36				
Đáp án	0,38	0,27	0,66	0,31	0,34	0,25				

Bạn đọc cần đáp án chi tiết vui lòng liên hệ fanpage "Trung tâm luyện thi 29Edu" hoặc Zalo "0857342713"

———HẾT———

Mọi đóng góp, ý kiến vui lòng gửi về fanpage: Trung tâm luyện thi 29Edu.

29 EDUCATION

thuvientoanhoc.com