UBND PHƯỜNG KINH MÔN
TRƯỜNG THCS PHẠM SƯ MẠNH

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2026-2027
MÔN: TOÁN – LỚP 9
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề bài gồm có 06 câu 01 trang)

Câu 1 *(2,0 điểm)*

1) Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1;2;3;4;5;6;7;8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn".

2) Trên một mảnh đất hình chữ nhật ABCD có diện tích $200m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng hoa. Biết phần đất trồng hoa là hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc đường chéo BD. Hỏi số tiền lớn nhất mà người chủ cần dùng để trồng hoa là bao nhiêu? Biết rằng chi phi trồng hoa là 50.000 đồng/m^2.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

1) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thoả mãn $P(x)-P(x-2)=x(x+2)(3x+1)$ và $P(-2)=0$. Xác định đa thức $P(x)$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$.

Câu 3 *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ có AD là tia phân giác của BAC. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF//BC$.

2) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔNFA và H là trực tâm ΔAEF.

3) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I. Chứng minh: $\frac{BI}{KI}+\frac{AO}{KO}+\frac{DM}{KM}>9$

Câu 4 *(1,0 điểm):* Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\geq 3$.

Câu 5 *(2,0 điểm)*

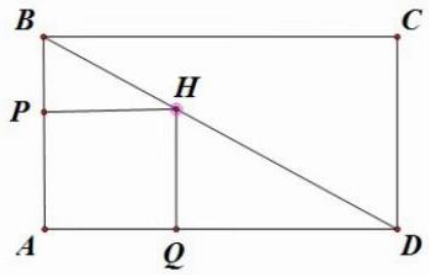
1) Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

2) Viết lên bảng các số 2, 6, 12, 20, ..., 9900. Mỗi lần ta được phép xoá hai số a, b tuỳ ý và thay bởi số $\frac{ab}{a+b}$. Thực hiện các thao tác cho tới khi trên bảng chỉ còn đúng một số. Chứng minh rằng số cuối cùng thu được không phụ thuộc vào quá trình thực hiện các thao tác. Tìm số đó?

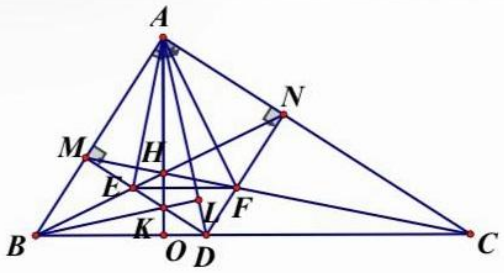
____ HẾT ____

UBND PHƯỜNG KINH MÔN
TRƯỜNG THCS PHẠM SƯ MẠNH

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2026 - 2027
(Hướng dẫn chấm gồm: 6 trang)

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 (2,0đ)	a (1đ)	Trong hộp có 4 thẻ ghi số lẻ, 4 thẻ ghi số chẵn Lấy ngẫu nhiên hai thẻ ở trong hộp, sau đó tính tích hai số được đánh ở hai tấm thẻ đó nên ta có các khả năng sau:	0,25
		Trường hợp 1: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số lẻ, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 1;3;5;7 Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, trong đó có 4 khả năng sẽ là số chẵn, như vậy có 4 tích là số chẵn Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là 4.7 = 28 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 4.4 = 16 (biến cố)	0,25
		Trường hợp 2: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số chẵn, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 2;4;6;8 Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, và tích đều là số chẵn Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là 4.7 = 28 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 4.7 = 28 (biến cố)	0,25
		Như vậy: Tổng số biến cố xảy ra là 28 + 28 = 56 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 16 + 28 = 44 (biến cố) Xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn" là $\frac{11}{14}$	0,25
	b (1đ)		
		Đặt $\frac{BH}{BD} = x(0 < x < 1)$ và P, Q lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AD. Theo định lý Thales có $\frac{HP}{AD} = \frac{BH}{BD} = x \Rightarrow HP = x.AD$ $\frac{HQ}{AB} = \frac{DH}{BD} = 1 - x \Rightarrow HQ = 1 - x .AB$	0,25
		Diện tích trồng hoa là $S_{APHQ} = HP.HQ = x\ 1 - x\ .AB.AD = x\ 1 - x\ .S_{ABCD} = 200x\ 1 - x$	0,5

		$S_{APHQ} = -200(x^2 - x) = -200\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 50 \le 50$ Dấu « = » xảy ra khi x =0,5=> H là trung điểm của BD	
		Vậy diện tích trồng hoa lớn nhất là $50m^2$ Số tiền lớn nhất để trồng hoa là $50.000 * 50 = 2.500.000$ đồng	0,25
2 **(2,0đ)**	a (1đ)	Ta thấy: $\begin{cases} P(0) - P(2) = 0 \\ P(-2) - P(-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(-4) = 0 \end{cases}$ (vì P(-2)=0)	0,25
		Do $P(0) = P(-2) = P(-4) = 0$ và $P(x)$ là đa thức bậc 4 nên $P(x) = x(x+2)(x+4)(ax+b)(a \ne 0)$	0,25
		Ta có: $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} P(2) - P(0) = 56 \\ P(4) - P(2) = 312 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = 56 \\ P(4) = 368 \end{cases}$	0,25
		Suy ra $\begin{cases} 2a + b = \frac{7}{6} \\ 4a + b = \frac{23}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{5}{12} \end{cases}$ Vậy đa thức $P(x) = x(x+2)(x+4)\left(\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}\right) = \frac{3}{8}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{10}{3}x$	0,25
	b (1đ)	Phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2x^3 + 6xy^2 = -98 \\ 2x^2 - 16xy + 2y^2 = 16y - 34x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 + (x-y)^3 = -98 \\ -3(x+y)^2 + 5(x-y)^2 = -9(x+y) - 25(x-y) \end{cases}$ Đặt $u = x + y, v = x - y$, ta thu được hệ $\begin{cases} u^3 + v^3 = -98 \\ -3u^2 + 5v^2 = -9u - 25v \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 27 = -(v^3 + 125) & (1) \\ -3u^2 + 9u = -5v^2 - 25v & (2) \end{cases}$ Cộng vế với vế phương trình (1) và 3 lần phương trình (2): $u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = -(v^3 + 15v^2 + 75y + 125)$ $\Leftrightarrow (u-3)^3 = -(v+5)^3 \Leftrightarrow u - 3 = -(v+5) \Leftrightarrow u = -v - 2$	0,25
		Thay $u = -v - 2$ vào phương trình (2), ta được: $-3(-v-2)^2 + 9(-v-2) = -5v^2 - 25v \Leftrightarrow 2v^2 + 4v - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ v = -5 \end{cases}$ Với $v = 3 \Rightarrow u = -5 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$	0,25
		Với $v = -5 \Rightarrow u = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25

		Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(-1;-4);(-1;4)\}$.	
3 (3,0đ)	a (1đ)		
		+) Chứng minh $AMD=90^0; AND=90^0; MAN=90^0$ Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật +) Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của MAN nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.	0,25
		+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC}=\frac{DB}{DC}$ (1) Chứng minh: $\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MA}$ (2) Chứng minh $AM=DN\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{MB}{DN}$ (3) Chứng minh $\frac{MB}{DN}=\frac{EM}{ED}$ (4)	0,5
		Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra $\frac{EM}{ED}=\frac{FM}{FC}\Rightarrow EF//BC$	0,25
	b (1đ)	Chứng minh $\Delta ANB\sim\Delta NFA$ Chứng minh $AN=DN.$ suy ra $\frac{AN}{AB}=\frac{DN}{AB}$ (5)	0,25
		Chứng minh $\frac{DN}{AB}=\frac{CN}{CA}$ (6) Chứng minh $\frac{CN}{CA}=\frac{FN}{AM}$ (7)	0,25
		Chứng minh $AM=AN.$ Suy ra $\frac{FN}{AM}=\frac{FN}{AN}$ (8) Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB}=\frac{FN}{AN}\Rightarrow\Delta ANB\sim\Delta NFA(c.g.c)$	0,25
		Vì $\Delta ANB\sim\Delta NFA$ nên $NBA=FAN$ Mà $BAF+FAN=90^0\Rightarrow NBA+BAF=90^0$ Suy ra $EH\perp AF$, Tương tự: $FH\perp AE$, suy ra H là trực tâm ΔAEF	0,25
	c	Đặt $S_{AKD}=a, S_{BKD}=b, S_{AKB}=c.$ Khi đó:	0,25

	(1đ)	$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}}+\frac{S_{ABD}}{S_{BDK}}+\frac{S_{ABD}}{S_{AKB}}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ $=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$	
		Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$.	0,25
		Tương tự: $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2;\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ Suy ra $\frac{BI}{KI}+\frac{AO}{KO}+\frac{DM}{KM}\geq 9$ Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi ΔABD là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.	0,25
4 (1,0đ)		$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\geq 3$ $\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\geq 2$ Đặt $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$ *(x, y >0)* $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$ $\Leftrightarrow x^2+y^2+1+xy-2x-2y=0\Leftrightarrow (x+y-1)^2=xy$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$ Do đó: $(x+y-1)^2\leq\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow\left[3(x+y)-2\right].\left[2-(x+y)\right]\geq 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\leq x+y\leq 2$	0,25
		$P=\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ $=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{(x+y-1)^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$	0,25
		$=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)\geq\frac{4}{(x+y)^2}+2\sqrt{\frac{1}{2(x+y)\sqrt{xy}}}$ $P\geq\frac{4}{2^2}+2\sqrt{\frac{1}{2.2}}=2$	0,25
		Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1\Leftrightarrow a=b=c>0$	0,25

5 (2,0đ)	a (1đ)	Ta có $3c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 4c^2 = ab + bc + ca + c^2$ $\Leftrightarrow (2c)^2 = (a+c)(b+c)(**)$ Gọi $(a+c, b+c) = d$. Khi đó $a-b = (a+c)-(b+c) \vdots d$, mà $a-b$ là số nguyên tố nên $d = 1$ hoặc $d = a-b$.	0,25
		- Nếu $d = 1$ thì từ (*) suy ra $\begin{cases} a+c = x^2 \\ b+c = y^2 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{N}^*; xy = 2c; x > y\right)$. Lúc này $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a-b$ là số nguyên tố $\Rightarrow \begin{cases} x-y = 1 \\ x+y = a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-b+1}{2} \\ y = \dfrac{a-b-1}{2} \end{cases}$ Từ đó $2c = xy = \dfrac{a-b+1}{2} \cdot \dfrac{a-b-1}{2} = \dfrac{(a-b)^2 - 1}{4} \Rightarrow 8c+1 = (a-b)^2$ là số chính phương.	0,25
		- Nếu $d = a-b$ thì tìr (**) sụy ra $\begin{cases} a+c = (a-b)x^2 \\ b+c = (a-b)y^2 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{N}^*; (a-b)xy = 2c; x > y\right)$. Lúc này $(a+c)-(b+c) = (a-b)\left(x^2 - y^2\right) \Leftrightarrow a-b = (a-b)\left(x^2 - y^2\right)$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$ (do $a-b > 0$) $\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 1$	0,25
		$\Leftrightarrow x = 1; y = 0 \Rightarrow b+c = 0$ (loại). Vậy $8c+1$ là số chính phương.	0,25
	b (1đ)	**Lời giải** Ta có $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ nên tổng nghịch đảo các số luôn không đổi trong suốt quá trình thực hiện thao tác. Tổng nghịch đảo ban đầu là:	

		$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{9900}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$ $=\frac{99}{100}$ Do đó, nếu số còn lại cuối cùng trên bảng là m thì ta có $\frac{1}{m}=\frac{99}{100}$ hay $m=\frac{100}{99}$.	