UBND PHƯỜNG GIẢNG VÕ
TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT MÔN TOÁN
Lớp 9 (chọn học sinh giỏi - Vòng 2)
Năm học 2026 - 2027

Ngày khảo sát: 25/10/2026
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I. ***(6,0 điểm)***

1) Cho $A = \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{x+5}{x-1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $A \leq 4$.

2) Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^3 + x^2 = y^2 + xyz$; $y^3 + y^2 = z^2 + xyz$; $z^3 + z^2 = x^2 + xyz$. Tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right).$$

Bài II. ***(4,0 điểm)***

1) Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1;2;3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4;5. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

2) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $7a^2 + 4b^2 = 9c^2$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 108.

Bài III. ***(2,0 điểm)***

Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 3$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + (a-2)(b-2)(c-2)$.

Bài IV. ***(6,0 điểm)***

Cho tam giác ABC đều. Lấy điểm X đối xứng với điểm A qua đường thẳng BC. Kẻ đường thẳng qua điểm X, đường thẳng này cắt các tia đối của tia CA, BA lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $XB \parallel AC$ và $\Delta CBE \backsim \Delta BFC$.

b) Gọi giao điểm của hai đoạn thẳng BE và CF tại điểm P. Chứng minh $\widehat{BPC} = 120^\circ$ và $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ADO}} = \dfrac{PA^2}{PB \cdot PC}$.

Bài V. ***(2,0 điểm)***

1) Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho các số $\dfrac{x^6 + y^6 + 7}{x^3 y^3}$; $\dfrac{y^6 + z^6 + 7}{y^3 z^3}$ và $\dfrac{z^6 + x^6 + 7}{z^3 x^3}$ đều là các số nguyên.

2)

a) Tìm số nguyên nhỏ nhất $n\left(n \geq 4\right)$ sao cho từ n số nguyên phân biệt bất kỳ, ta luôn chọn được 4 số phân biệt a, b, c, d sao cho $a + b - c - d \vdots 2$.

b) Tìm số nguyên dương chẵn nhỏ nhất $n\left(n \geq 4\right)$ sao cho từ n số nguyên phân biệt bất kỳ, ta luôn chọn được 4 số phân biệt a, b, c, d sao cho $a + b - c - d \vdots 26$.

---------- HẾT ----------

(Học sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài.

thuvientoanhoc.com

UBND PHƯỜNG GIẢNG VÕ

TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT MÔN TOÁN

Lớp 9 (chọn học sinh giỏi - Vòng 2)

Năm học 2026 - 2027

Ngày khảo sát: 25/10/2026

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I. ***(6,0 điểm)***

1) Cho $A=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{x+5}{x-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$ với $x>0, x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $A\leq 4$.

2) Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^3+x^2=y^2+xyz$; $y^3+y^2=z^2+xyz$; $z^3+z^2=x^2+xyz$. Tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức:

$$P=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right).$$

Bài II. ***(4,0 điểm)***

1) Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số $1;2;3$ và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số $4;5$. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

2) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $7a^2+4b^2=9c^2$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 108.

Bài III. ***(2,0 điểm)***

Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $1\leq a, b, c\leq 3$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+(a-2)(b-2)(c-2)$.

Bài IV. ***(6,0 điểm)***

Cho tam giác ABC đều. Lấy điểm X đối xứng với điểm A qua đường thẳng BC. Kẻ đường thẳng qua điểm X, đường thẳng này cắt các tia đối của tia CA, BA lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $XB \parallel AC$ và $\Delta CBE \backsim \Delta BFC$.

b) Gọi giao điểm của hai đoạn thẳng BE và CF tại điểm P. Chứng minh $\widehat{BPC}=120^\circ$ và $PA=PB+PC$.

thuvientoanhoc.com

c) Chứng minh rằng $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{PA^2}{PB \cdot PC}$.

Bài V. ***(2,0 điểm)***

1) Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho các số $\frac{x^6 + y^6 + 7}{x^3 y^3}$; $\frac{y^6 + z^6 + 7}{y^3 z^3}$ và $\frac{z^6 + x^6 + 7}{z^3 x^3}$ đều là các số nguyên.

2)

a) Tìm số nguyên nhỏ nhất $n(n \geq 4)$ sao cho từ n số nguyên phân biệt bất kỳ, ta luôn chọn được 4 số phân biệt a, b, c, d sao cho $a + b - c - d \vdots 2$.

b) Tìm số nguyên dương chẵn nhỏ nhất $n(n \geq 4)$ sao cho từ n số nguyên phân biệt bất kỳ, ta luôn chọn được 4 số phân biệt a, b, c, d sao cho $a + b - c - d \vdots 26$.

---------- HẾT ----------

Học sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài.

Giám thị không giải thích gì thêm.

thuvientoanhoc.com

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

Bài I (6,0 điểm).

1a) Với $x>0, x\neq 1$ ta có:

$$\frac{3}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{x+5}{x-1}=\frac{3(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+1)+x+5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

Do đó $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1b) Nếu $0<x<1$ thì $\sqrt{x}-1<0$, $x>0$ nên $A<0<4$, thỏa mãn.

Nếu $x>1$ thì $\sqrt{x}-1>0$, khi đó $A\leq 4\Leftrightarrow x\leq 4\sqrt{x}-4\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)^2\leq 0\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

Vậy $0<x<1$ hoặc $x=4$.

2) Cộng vế theo vế ba đẳng thức ta được $x^3+y^3+z^3=3xyz$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0\Leftrightarrow (x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]=0.$$

Trường hợp 1: $x=y=z\neq 0$. Khi đó ba điều kiện đều đúng và $P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$.

Trường hợp 2: $x+y+z=0$, suy ra $x+y=-z$, $y+z=-x$, $z+x=-y$. Khi đó

$$P=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz}=-1.$$

Vậy $P\in\{-1;8\}$.

Bài II (4,0 điểm).

1) Gọi tên mỗi viên bi theo số ghi trên nó. Không gian mẫu gồm các kết quả: $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;5\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{4;5\}$, có 10 kết quả đồng khả năng.

Hai viên bi khác màu khi lấy được một bi vàng (ghi $1;2;3$) và một bi nâu (ghi $4;5$). Các kết quả thuận lợi là $\{1;4\}$, $\{1;5\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, có 6 kết quả.

Xác suất cần tìm là $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

2) Ta có $108=4\cdot 27$ và $(4,27)=1$.

Chứng minh $abc\vdots 4$: Ta có $9c^2-7a^2=4b^2\vdots 4$, mà $9c^2-7a^2=(a^2+c^2)+8(c^2-a^2)$ nên $a^2+c^2\vdots 4$. Số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1, do đó a^2 và c^2 cùng chia hết cho 4, suy ra a,c đều chẵn, nên $ac\vdots 4$.

thuvientoanhoc.com

Chứng minh $abc\vdots 27$: Ta có $7a^2+4b^2=9c^2\vdots 3$, mà $7a^2+4b^2=(a^2+b^2)+3(2a^2+b^2)$ nên $a^2+b^2\vdots 3$. Số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1, do đó $a\vdots 3$, $b\vdots 3$.

Đặt $a=3a_1$, $b=3b_1$ ($a_1,b_1\in\mathbb{Z}$), ta được $7a_1^2+4b_1^2=c^2$.

Nếu $c\vdots 3$ thì $abc=9a_1b_1c\vdots 27$.

Nếu c không chia hết cho 3 thì c^2 chia 3 dư 1. Mà $7a_1^2+4b_1^2=(a_1^2+b_1^2)+3(2a_1^2+b_1^2)$ nên $a_1^2+b_1^2$ chia 3 dư 1, suy ra một trong hai số a_1,b_1 chia hết cho 3. Do đó $ab=9a_1b_1\vdots 27$.

Vậy abc chia hết cho cả 4 và 27 nên $abc\vdots 108$.

<u>Bài III</u> (2,0 điểm).

Đặt $x=a-2$, $y=b-2$, $z=c-2$, ta có $-1\le x,y,z\le 1$ và $x+y+z=0$.

Ta có $a^2+b^2+c^2=(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)+12=x^2+y^2+z^2+12$.

Đặt $S=x^2+y^2+z^2$, $T=xyz$, ta có $P=12+S+T$.

Tìm giá trị nhỏ nhất: Vì $|x|\le 1$ nên $|T|=|xyz|\le|yz|\le\dfrac{y^2+z^2}{2}\le S$, suy ra $S+T\ge 0$, hay $P\ge 12$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=0$, tức $a=b=c=2$.

Tìm giá trị lớn nhất: Vì $-1\le x,y,z\le 1$ nên $U=(1-x)(1-y)(1-z)\ge 0$ và $V=(1+x)(1+y)(1+z)\ge 0$.

Từ $x+y+z=0$ suy ra $xy+yz+zx=-\dfrac{S}{2}$, do đó $U=1-\dfrac{S}{2}-T$, $V=1-\dfrac{S}{2}+T$.

Ta có $U+V=2-S\ge 0$ nên $S\le 2$; $U\ge 0$ nên $T\le 1-\dfrac{S}{2}$.

Suy ra $S+T\le 1+\dfrac{S}{2}\le 2$, hay $P\le 14$.

Dấu bằng xảy ra khi $S=2$ và $U=0$, khi đó $V=0$ và $T=0$. Do đó trong ba số x,y,z có một số bằng 1, một số bằng -1, số còn lại bằng 0, tức $(a;b;c)$ là một hoán vị của $(1;2;3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12 khi $a=b=c=2$; giá trị lớn nhất của P là 14 khi $(a;b;c)$ là một hoán vị của $(1;2;3)$.

<u>Bài IV</u> (6,0 điểm).

a) Vì X đối xứng với A qua BC nên BC là đường trung trực của AX, suy ra $XB=AB$, $XC=AC$. Mà $AB=AC=BC$ nên $ABXC$ là hình thoi, do đó $XB\parallel AC$ và $XC\parallel AB$.

Vì E thuộc tia đối của tia CA, F thuộc tia đối của tia BA nên:

thuvientoanhoc.com

$\widehat{FBX} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (đồng vị, $BX \parallel AC$); $\widehat{XCE} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (đồng vị, $CX \parallel AB$); $\widehat{BXF} = \widehat{CEX}$ (đồng vị, $BX \parallel CE$).

Suy ra $\Delta BFX \backsim \Delta CXE$ (g.g), do đó $\dfrac{BF}{CX} = \dfrac{BX}{CE} \Rightarrow BF \cdot CE = BX \cdot CX = BC^2 \Rightarrow \dfrac{CB}{BF} = \dfrac{CE}{BC}$.

Lại có $\widehat{BCE} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$, $\widehat{FBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BCE} = \widehat{FBC}$.

Vậy $\Delta CBE \backsim \Delta BFC$ (c.g.c).

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{BFC}$. Trong tam giác PBC:
$\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{BFC} + \widehat{BCF} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{BPC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Trên tia đối của tia PB lấy điểm Q sao cho $PQ = PC$. Ta có $\widehat{CPQ} = 180^\circ - \widehat{BPC} = 60^\circ$ nên tam giác PCQ đều, suy ra $CQ = CP$, $\widehat{PCQ} = 60^\circ$.

Vì P thuộc đoạn BQ nên $\widehat{BCQ} = \widehat{BCP} + \widehat{PCQ} = \widehat{BCP} + 60^\circ$. Vì P thuộc đoạn BE nên tia CP nằm giữa hai tia CB, CE, do đó $\widehat{ACP} = \widehat{ACB} + \widehat{BCP} = 60^\circ + \widehat{BCP}$. Suy ra $\widehat{ACP} = \widehat{BCQ}$.

Xét ΔACP và ΔBCQ có $CA = CB$, $\widehat{ACP} = \widehat{BCQ}$, $CP = CQ$ nên $\Delta ACP = \Delta BCQ$ (c.g.c), suy ra $PA = QB = PB + PQ = PB + PC$.

c) Ta có $\dfrac{S_{AEF}}{S_{AFC}} = \dfrac{AE}{AC}$, $\dfrac{S_{AFC}}{S_{ABC}} = \dfrac{AF}{AB}$ nên $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC} = \dfrac{(BC + CE)(BC + BF)}{BC^2}$.

Kết hợp $BF \cdot CE = BC^2$ (câu a) ta được $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{2BC^2 + BC(BF + CE)}{BC^2} = 2 + \dfrac{BF}{BC} + \dfrac{CE}{BC}$. (1)

Xét ΔPBC và ΔBFC có $\widehat{PBC} = \widehat{BFC}$ (câu b), $\widehat{BCF}$ chung nên $\Delta PBC \backsim \Delta BFC$ (g.g), suy ra $\dfrac{PB}{BF} = \dfrac{PC}{BC} \Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BF}{BC}$ và $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{BC}{BF} = \dfrac{CE}{BC}$.

Do $PA = PB + PC$ nên $\dfrac{PA^2}{PB \cdot PC} = \dfrac{(PB + PC)^2}{PB \cdot PC} = 2 + \dfrac{PB}{PC} + \dfrac{PC}{PB} = 2 + \dfrac{BF}{BC} + \dfrac{CE}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{PA^2}{PB \cdot PC}$.

<u>Bài V</u> (2,0 điểm).

1) Ta có $x^6 + y^6 + 7 \vdots x^3 y^3$, $y^6 + z^6 + 7 \vdots y^3 z^3$, $z^6 + x^6 + 7 \vdots z^3 x^3$.

Các số x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau: Giả sử số nguyên tố p là ước chung của x và y. Khi đó $x^6 + y^6 + 7 \vdots p$ và $x^6 + y^6 \vdots p$ nên $7 \vdots p$, suy ra $p = 7$. Khi đó $x^3 y^3 \vdots 7^6$ nên $x^6 + y^6 + 7 \vdots 7^6$, mà $x^6 + y^6 \vdots 7^6$ nên $7 \vdots 7^6$, vô lý. Tương tự với các cặp còn lại.

thuvientoanhoc.com

Điều kiện đối xứng đối với x, y, z nên giả sử $x = \min\{x; y; z\}$.

Từ $x^6 + y^6 + 7 \vdots y^3$ suy ra $x^6 + 7 \vdots y^3$; từ $z^6 + x^6 + 7 \vdots z^3$ suy ra $x^6 + 7 \vdots z^3$. Vì $(y, z) = 1$ nên $x^6 + 7 \vdots y^3 z^3$, suy ra $y^3 z^3 \le x^6 + 7$.

Nếu $y > x$ và $z > x$ thì $y^3 z^3 \ge (x+1)^6 \ge x^6 + 6x^5 + 15x^4 > x^6 + 7$, mâu thuẫn. Do đó $y = x$ hoặc $z = x$; kết hợp với tính nguyên tố cùng nhau suy ra $x = 1$.

Khi đó $8 \vdots y^3 z^3$ nên $yz \in \{1; 2\}$, tức $(y; z) \in \{(1;1), (1;2), (2;1)\}$.

Thử lại: với $(1;1;1)$ ba số đều bằng 9; với $(1;1;2)$ ba số là $9; \frac{72}{8} = 9; \frac{72}{8} = 9$, thỏa mãn.

Vậy $(x; y; z) \in \{(1;1;1), (1;1;2), (1;2;1), (2;1;1)\}$.

2a) Ta có $a + b - c - d = (a + b + c + d) - 2(c + d)$ nên $a + b - c - d \vdots 2 \Leftrightarrow a + b + c + d \vdots 2$.

Với $n = 4$, xét bốn số $1; 2; 4; 6$ có tổng bằng 13 là số lẻ nên không chọn được. Do đó $n \ge 5$.

Với $n = 5$: Nếu trong 5 số có ít nhất 4 số cùng tính chẵn lẻ thì chọn 4 số đó, tổng của chúng là số chẵn. Nếu không thì có ít nhất 2 số chẵn và 2 số lẻ, chọn 4 số đó thì tổng là số chẵn.

Vậy $n = 5$.

2b) Xét 8 số $0; 1; 2; 4; 7; 12; 26; 52$, số dư khi chia cho 26 lần lượt là $0; 1; 2; 4; 7; 12; 0; 0$.

Tổng hai số dư của hai số khác nhau trong tập trên chỉ có thể là 0 $(= 0 + 0)$; $1; 2; 4; 7; 12$ (0 cộng với số khác); $3; 5; 8; 13; 6; 9; 14; 11; 16; 19$. Các giá trị này đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 26.

Nếu $a + b - c - d \vdots 26$ thì $a + b$ và $c + d$ có cùng số dư khi chia cho 26, nên cặp số dư của a, b trùng với cặp số dư của c, d. Nếu cặp số dư có chứa một số dư $s \ne 0$ thì trong hai cặp rời nhau phải có hai số khác nhau cùng số dư s. Điều này vô lý vì mỗi số dư khác 0 chỉ xuất hiện một lần. Nếu cặp số dư là $\{0; 0\}$ thì cần 4 số chia hết cho 26, nhưng chỉ có 3 số. Vậy với 8 số này không chọn được, do đó $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ (lấy 4 hoặc 6 số trong các số trên) đều không thỏa mãn. Suy ra $n \ge 10$.

Với $n = 10$, xét số dư của 10 số khi chia cho 26:

Nếu có 4 số cùng số dư thì chọn 4 số đó, ta có $a + b - c - d \vdots 26$.

Nếu có hai cặp số rời nhau $(a; c)$, $(b; d)$ với a, c cùng số dư và b, d cùng số dư thì $a + b - c - d = (a - c) + (b - d) \vdots 26$.

Các trường hợp còn lại: có nhiều nhất một số dư bị lặp và lặp không quá 3 lần, nên có ít nhất $10 - 2 = 8$ số có số dư đôi một khác nhau. Từ 8 số này lập được $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 > 26$ cặp, nên có hai cặp $\{a; b\} \ne \{c; d\}$ mà $a + b$ và $c + d$ cùng số dư khi chia cho 26. Nếu hai cặp có chung một số, chẳng hạn $a = c$, thì b và d cùng số dư, vô lý. Do đó a, b, c, d phân biệt và $a + b - c - d \vdots 26$.

thuvientoanhoc.com

Vậy $n = 10$.

---------- HẾT ----------

thuvientoanhoc.com