TRƯỜNG THPT AN DƯƠNG
TỔ TOÁN TIN

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ BẢNG B
NĂM HỌC 2026 – 2027
Môn: TOÁN, Lớp 12
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Họ, tên thí sinh:.....
Số báo danh:.....

Mã đề	101

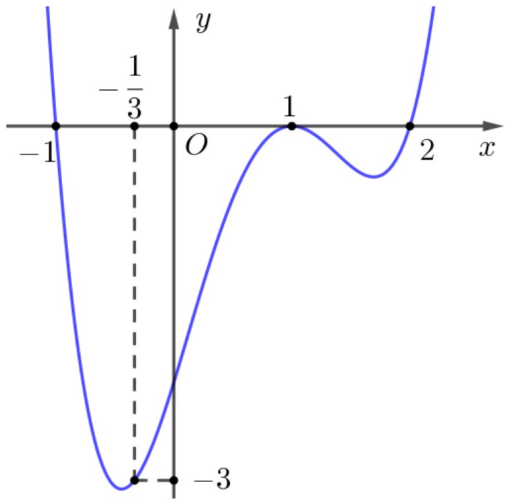
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên $BB'C'C$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\frac{a\sqrt{12}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{7}$.

Câu 2: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ.

Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $g'(x)=0$ là



A. 10.
B. 5.
C. 9.
D. 6.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=6^n-1, n\in\mathbb{N}^*$. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Tính $S=q^2-1$.

A. $S=35$. **B.** $S=8$. **C.** $S=3$. **D.** $S=24$.

Câu 4: Duy là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3, bạn Duy đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 37. **B.** 25. **C.** 43. **D.** 30.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x+5}+ax+b}{(x+2)^2}$. Biết đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. Khi đó $a-b$ bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Điểm M là trung điểm cạnh AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

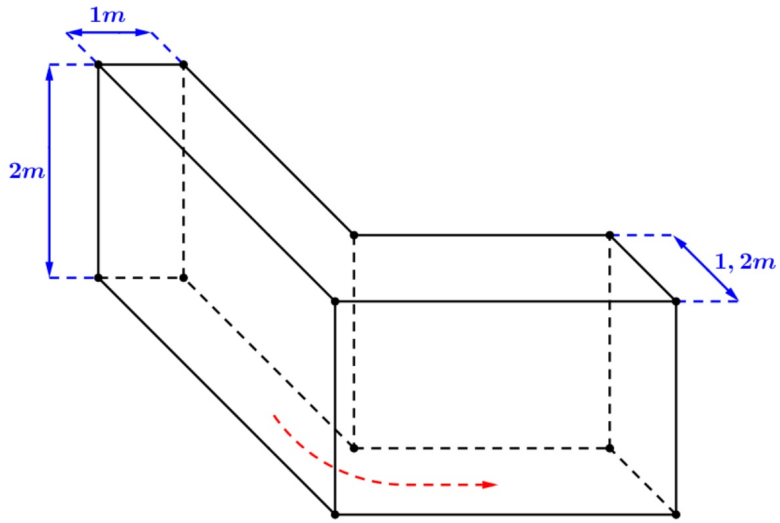
A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\log_2\dfrac{x}{8}+\log_2(x-24)\le 4+\log_2 5$?

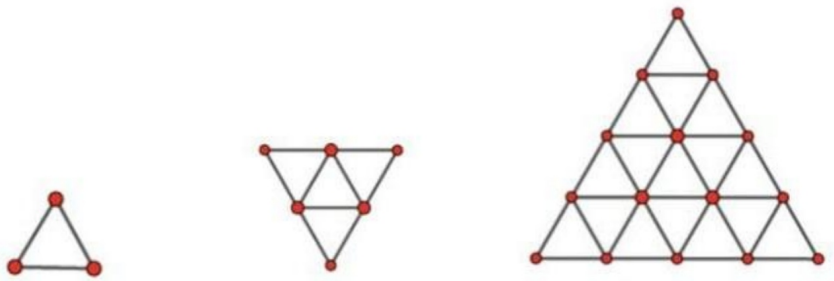
A. 39. **B.** 17. **C.** 37. **D.** 16.

Câu 8: Hành lang trong một tòa nhà có dạng chữ L có chiều cao 2 m, một phía rộng 1m, một phía rộng $1,2$ m. Một người thợ cần mang một số ống thép cứng các loại có độ dài 2 m; $2,5$ m; 3 m; $3,5$ m và 4 m từ bên này qua bên kia. Hỏi có thể mang được mấy loại qua lối đi đó?

A. 2.
B. 4.
C. 5.
D. 3.



Câu 9: Người ta dùng các que diêm có độ dài bằng nhau để xếp thành các hình tam giác đều, biết cạnh của tam giác đều ở hình thứ $n+1$ gấp đôi cạnh của tam giác đều ở hình thứ n như hình vẽ dưới đây



Hình thứ 1 Hình thứ 2 Hình thứ 3

Để xếp hình thứ 15 thì cần dùng a que diêm. Số ước nguyên của a là

A. 224. **B.** 480. **C.** 240. **D.** 448.

Câu 10: Xét các số thực a,b thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{3}<b<a<1$. Khi biểu thức $P=\log_a\left(\dfrac{3b-1}{4}\right)+12\log_{\frac{b}{a}}^2 a-3$ đạt giá trị nhỏ nhất thì a^3+7b+4 bằng

A. 10. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^o. Côsin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$ và $C(-3;-1;1)$. Điểm $D(m;n;p)$ thỏa mãn $ABCD$ là hình thang với hai đáy AD, BC và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 3 lần diện tích tam giác ABC. Tổng $m+n+p$ bằng

A. -11. **B.** -15. **C.** -10 **D.** -8.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$.

a) Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống BC của tam giác ABC. Khi đó $3a+6b+9c=6$.

b) Điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ có tọa độ là $I\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

c) Gọi $C'(m;n;p)$ là điểm đối xứng với điểm C qua mặt phẳng (Oxy), khi đó $m+n+p=-2$.

d) Trên (Oxy) lấy hai điểm bất kì P, Q sao cho $PQ=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|AP-CQ|$ bằng 2.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$, $SA=a$, $SB=a\sqrt{3}$ và $(SAB)\perp(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của S trên AB, M là trung điểm SC, I là giao điểm của AC và HD.

a) $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

d) Thể tích khối chóp $AMID$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{60}$.

Câu 3: Gọi S là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S. Khi đó

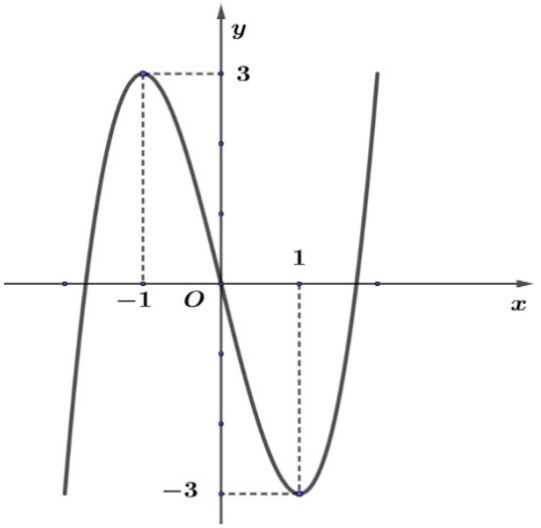
a) Xác suất để lấy được số chia hết cho 25 là $\frac{1}{486}$.

b) Xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a>b>c>d>e$ là $\frac{1}{108}$.

c) Số phần tử của S là 30240.

d) Xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcde}$ thỏa mãn $c<b<a$ và $c<d<e$ là $\frac{1}{18}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=h(x)=f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?



a) Nếu $f(0)=0$ thì số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là 5.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos x\right)$ bằng 3.

c) Hàm số $g(x)=f\left(x^3+1\right)+\frac{3}{2}x^6+3x^3+2025$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

d) $h(3)=18$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\log_3\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho phương trình $f\left(m+4.3^{x^2}-3\right)+f\left(-3^{2x^2}\right)=1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$ và các điểm M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,SC. Các điểm P,Q trên các đường thẳng SA,BN sao cho $PQ\,//\,CM$. Khi biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ}=-\frac{m}{n}\vec{a}-\frac{p}{q}\vec{b}+\frac{r}{z}\vec{c}$. Tính $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{z}$.

Câu 3: Tại một nút giao thông đông đúc, người ta quy định chu kỳ của đèn tín hiệu giao thông gồm 6 pha liên tiếp, mỗi pha kéo dài 20 giây. Trong mỗi chu kỳ phải có: 2 pha đèn đỏ, 2 pha đèn vàng và 2 pha đèn xanh. Mỗi pha được sắp xếp theo một thứ tự nhất định trong chu kỳ. Biết xác suất để trong một chu kỳ hai pha cùng màu không được xuất hiện liền nhau bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Cho dãy gồm 2023 số được sắp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4;C_5^4;...;C_{2025}^4;C_{2026}^4$. Lấy ngẫu nhiên ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết xác suất để tổng ba số này là một số lẻ bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in N^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V, có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BA=a$, $AC=2a$. Mặt bên $(BB'A'A)$ là hình thoi có góc $ABB'=60°$. Gọi I là trung điểm của BC'. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'A'$ và BI bằng $\frac{3a}{4}$. Biết rằng $V<\frac{a^3}{2}$. Giá trị $V=x.a^3$ thì x bằng bao nhiêu?

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2-2m+1$ (m là tham số thực). Số các giá trị nguyên của m thuộc $[-30;30]$ sao cho $\max\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right|\geq 10$ là bao nhiêu?

Hết

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Gọi M là trung điểm BC, ta có $AM \perp BC$ nên $AM \perp (BB'C'C)$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $CC' \parallel (ABB'A')$ và M là trung điểm BC nên

$d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = 2d(M,(ABB'A'))$.

Kẻ $MN \perp BB'$ tại N, $MK \perp AN$ tại K. Vì $BB' \perp (AMN)$ nên $BB' \perp MK$, suy ra $MK \perp (ABB'A')$.

Theo giả thiết $2MK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$ nên $MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Ta có $\dfrac{1}{MN^2} = \dfrac{1}{MK^2} - \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{25}{3a^2} - \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{a^2}$, suy ra $MN = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Hình thoi $BB'C'C$ có $BC = BB'$ nên chiều cao lăng trụ $h = d(B', BC) = d(C, BB') = 2MN = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{2a\sqrt{7}}{7} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$. Chọn C.

Câu 2. Ta có $g'(x) = f''(x).f'(f'(x)-1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ hoặc $f'(f'(x)-1) = 0$.

Dựa vào đồ thị, $f''(x) = 0$ có các nghiệm dương là $x = 1$ và $x = x_1 \in (1;2)$ (nghiệm còn lại âm).

$f'(f'(x)-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x)-1 \in \{-1;1;2\} \Leftrightarrow f'(x) \in \{0;2;3\}$.

$f'(x) = 0$ có các nghiệm dương $x = 1$, $x = 2$; $f'(x) = 2$ có đúng một nghiệm dương $x_2 > 2$;
$f'(x) = 3$ có đúng một nghiệm dương $x_3 > x_2$.

Vậy phương trình có các nghiệm dương phân biệt là $1; x_1; 2; x_2; x_3$, tức là có 5 nghiệm. Chọn B.

Câu 3. Ta có $u_1 = S_1 = 5$, $u_2 = S_2 - S_1 = 35 - 5 = 30$ nên $q = 6$.

Vậy $S = 6^2 - 1 = 35$. Chọn A.

Câu 4. Cỡ mẫu $n = 25$.

Vì $\dfrac{n}{4} = \dfrac{25}{4}$ nên Q_1 thuộc nhóm $[10;12)$: $Q_1 = 10 + \dfrac{\frac{25}{4} - 4}{6}.2 = \dfrac{43}{4}$.

Vì $\frac{3n}{4}=\frac{75}{4}$ nên Q_3 thuộc nhóm $[14;16)$: $Q_3=14+\frac{\frac{75}{4}-18}{4}.2=\frac{115}{8}$.

Khoảng tứ phân vị là $Q_3-Q_1=\frac{115}{8}-\frac{43}{4}=\frac{29}{8}$ nên $a=29$, $b=8$.

Vậy $P=a+b=37$. Chọn A.

Câu 5. Đặt $g(x)=\sqrt{2x+5}+ax+b$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng nên $g(-2)=0\Leftrightarrow b=2a-1$.

Khi đó $g(x)=\sqrt{2x+5}-1+a(x+2)=(x+2)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+5}+1}+a\right)$, suy ra $y=\frac{\frac{2}{\sqrt{2x+5}+1}+a}{x+2}$.

Để $\lim\limits_{x\to-2}y$ hữu hạn thì $\frac{2}{1+1}+a=0\Leftrightarrow a=-1$, suy ra $b=-3$.

Thử lại: $y=\frac{-1}{\sqrt{2x+5}+x+3}$ với $x\neq-2$ và $\lim\limits_{x\to-2}y=-\frac{1}{2}$, thỏa mãn.

Vậy $a-b=2$. Chọn D.

Câu 6. Gọi O là tâm tam giác ABC, ta có $SO\perp(ABC)$, $OA=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=a$, $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=a\sqrt{3}$.

Kẻ $Cx\parallel BM$, suy ra $BM\parallel(S,Cx)$ và $d(BM,SC)=d\left(O,(S,Cx)\right)$.

Gọi E là hình chiếu của O trên Cx. Vì $BM\perp AC$ nên $OMCE$ là hình chữ nhật, suy ra $OE=MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OK\perp SE$ tại K. Vì $Cx\perp(SOE)$ nên $Cx\perp OK$, suy ra $OK\perp(S,Cx)$.

Ta có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{5}{3a^2}$.

Vậy $d(BM,SC)=OK=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Chọn C.

Câu 7. Điều kiện $x>24$.

Bất phương trình tương đương $\log_2\frac{x(x-24)}{8}\le\log_2 80\Leftrightarrow x^2-24x-640\le0\Leftrightarrow-16\le x\le40$.

Kết hợp điều kiện được $24<x\le40$. Vậy có 16 số nguyên x. Chọn D.

Câu 8. Xét hình chiếu của ống trên sàn. Gọi α là góc giữa hình chiếu của ống và tường dọc nhánh rộng 1 m, với $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Với mỗi góc α, đoạn thẳng đi qua góc trong của chỗ rẽ và nằm giữa hai tường ngoài có độ dài $\ell(\alpha)=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1,2}{\cos\alpha}$.

Ta có $\ell'(\alpha)=-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{1,2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ và $\ell'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \tan^3\alpha=\frac{5}{6}$, phương trình này có nghiệm duy nhất trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $\ell(\alpha)\to+\infty$ khi $\alpha\to 0^+$ và khi $\alpha\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ nên $\ell(\alpha)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm đó, suy ra $\ell_{\min^2}=\left(1+\sqrt[3]{1,44}\right)^3$.

Khi xoay qua chỗ rẽ, góc α phải đi qua mọi giá trị trung gian nên hình chiếu phải lọt qua cả vị trí có $\ell(\alpha)$ nhỏ nhất, do đó độ dài hình chiếu không được vượt quá $\ell_{\min}$.

Ngược lại, nếu độ dài hình chiếu không vượt quá $\ell_{\min}$ thì ở mọi góc α, đoạn nằm giữa hai tường ngoài trên đường thẳng qua góc trong đều đủ dài để chứa hình chiếu, nên có thể vừa xoay vừa trượt ống qua chỗ rẽ.

Hành lang cao 2 m nên có thể nghiêng ống để hai đầu ống chênh nhau 2 m. Khi đó ống dài L có hình chiếu dài $\sqrt{L^2-4}$.

Ống mang qua được khi $L^2-4\le\ell_{\min^2}\Leftrightarrow L^2\le\left(1+\sqrt[3]{1,44}\right)^3+4\approx 13,65$.

Vì $3,5^2=12,25<13,65<16=4^2$ nên mang được các ống dài 2 m; 2,5 m; 3 m; 3,5 m.

Vậy mang được 4 loại. Chọn B.

Câu 9. Hình thứ n có cạnh gồm $k=2^{n-1}$ que diêm.

Tam giác đều cạnh k que có $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ tam giác nhỏ cùng hướng với tam giác lớn, mỗi que diêm thuộc đúng một tam giác nhỏ đó nên số que diêm là $\frac{3k(k+1)}{2}$.

Với $n=15$ thì $k=2^{14}$, suy ra $a=3.2^{13}.\left(2^{14}+1\right)=2^{13}.3.5.29.113$.

Số ước nguyên dương của a là $14.2.2.2.2=224$.

Vậy số ước nguyên của a là $2.224=448$. Chọn D.

Câu 10. Ta có $4b^3-3b+1=(b+1)(2b-1)^2\ge 0$ nên $\frac{3b-1}{4}\le b^3$.

Vì $0<a<1$ nên $\log_a\frac{3b-1}{4}\ge\log_a b^3=3\log_a b$.

Đặt $t=\log_a b-1$. Vì $b<a<1$ nên $\log_a b>1$, suy ra $t>0$. Ta có $\log_{\frac{b}{a}} a=\frac{1}{\log_a b-1}=\frac{1}{t}$.

Do đó $P\ge 3(t+1)+\frac{12}{t^2}-3=\frac{3t}{2}+\frac{3t}{2}+\frac{12}{t^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3t}{2}.\frac{3t}{2}.\frac{12}{t^2}}=9$.

Dấu bằng xảy ra khi $b=\frac{1}{2}$ và $\frac{3t}{2}=\frac{12}{t^2}\Leftrightarrow t=2$, tức là $\log_a b=3\Leftrightarrow a^3=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $a^3+7b+4=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}+4=8$. Chọn D.

Câu 11. Gọi H là trung điểm OA, ta có $MH\,||\,SO$ nên $MH\perp(ABCD)$, suy ra $\widehat{MNH}=60^\circ$.

Trong tam giác CHN có $CH=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$, $CN=\frac{a}{2}$, $\widehat{HCN}=45^\circ$ nên

$HN^2=\frac{9a^2}{8}+\frac{a^2}{4}-2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5a^2}{8}$.

Suy ra $HN=\frac{a\sqrt{10}}{4}$ và $MN=\frac{HN}{\cos 60^\circ}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Vì $AC\perp(SBD)$ nên $d\left(M,(SBD)\right)=\frac{AO}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $d\left(N,(SBD)\right)=\frac{CO}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hai điểm M,N nằm khác phía và cách đều (SBD) nên MN cắt (SBD) tại trung điểm E của MN.

Gọi φ là góc giữa MN và (SBD), ta có $\sin\varphi=\frac{d\left(N,(SBD)\right)}{EN}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\cos\varphi=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Chọn C.

Câu 12. Ta có $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=3S_{ABC}$ nên $S_{ACD}=2S_{ABC}$.

Hai tam giác ACD và ABC có đường cao bằng chiều cao hình thang nên $AD=2BC$.

Vì $ABCD$ là hình thang với hai đáy AD,BC nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=2(-5;-2;1)=(-10;-4;2)$.

Suy ra $D(-12;-1;3)$. Vậy $m+n+p=-10$. Chọn C.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

a) Đúng. Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;-1;1)$, $H\in BC$ nên $H(-1+2t;1-t;t)$, suy ra $\overrightarrow{AH}=(-1+2t;1-t;t+1)$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 6t-2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$, suy ra $H\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Vậy $3a+6b+9c=-1+4+3=6$.

b) Đúng. Ta có $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(-3;2;-4)$.

Vậy $I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

c) Sai. Ta có $C'(1;0;-1)$ nên $m+n+p=0$.

d) Sai. Gọi $C_1(1;0;-1)$ là điểm đối xứng của C qua mặt phẳng (Oxy), suy ra $CQ=C_1Q$.

Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{PQ}$, suy ra $AA'=PQ=1$, $A'Q=AP$ và A' thuộc mặt phẳng $z=-1$.

Ta có $T=\left|AP-CQ\right|=\left|A'Q-C_1Q\right|\le A'C_1\le A'A+AC_1=1+1=2$.

Nếu $A'\equiv C_1$ thì $T=0$.

Nếu $A'\neq C_1$ thì $\left|A'Q-C_1Q\right|=A'C_1$ chỉ xảy ra khi Q thuộc đường thẳng $A'C_1$. Đường thẳng $A'C_1$ nằm trong mặt phẳng $z=-1$, còn Q thuộc mặt phẳng (Oxy) nên điều này không xảy ra.

Do đó $T<2$ với mọi P,Q thỏa mãn đề bài, tức là T không thể đạt giá trị bằng 2. Vậy mệnh đề "giá trị lớn nhất của T bằng 2" là sai.

Câu 2.

a) Đúng. Ta có $SA^2+SB^2=4a^2=AB^2$ nên tam giác SAB vuông tại S, suy ra $SH=\dfrac{SA.SB}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Sai. Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ và $SH\perp AB$ nên $SH\perp(ABCD)$, suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCH}$.

Ta có $AH=\dfrac{SA^2}{AB}=\dfrac{a}{2}$, $HB=\dfrac{3a}{2}$, $HC=\sqrt{HB^2+BC^2}=\dfrac{5a}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}\neq\tan 30^\circ$.

c) Sai. Vì $AB\parallel(SCD)$ nên $d(AB,SC)=d\left(H,(SCD)\right)$.

Kẻ $HK \perp CD$ tại K, ta có $HK = 2a$ và $CD \perp (SHK)$. Kẻ $HE \perp SK$ tại E, suy ra $HE \perp (SCD)$.

Ta có $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$.

Vậy $d(AB, SC) = HE = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

d) Sai. Vì $AH \parallel CD$ nên $\frac{IH}{ID} = \frac{AH}{CD} = \frac{1}{4}$, suy ra $\frac{ID}{HD} = \frac{4}{5}$.

Do đó $S_{AID} = \frac{4}{5} S_{AHD} = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.2a = \frac{2a^2}{5}$.

Vì M là trung điểm SC nên $d\left(M, (ABCD)\right) = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{AMID} = \frac{1}{3}.\frac{2a^2}{5}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{30}$.

Câu 3. Số phần tử của S là $9.A_9^4 = 27216$.

a) Sai. Vì các chữ số khác nhau nên số thuộc S chia hết cho 25 có hai chữ số tận cùng là 25, 50 hoặc 75.

Tận cùng 50 có $A_8^3 = 336$ số; tận cùng 25 hoặc 75 có $2.7.A_7^2 = 588$ số.

Xác suất cần tìm là $\frac{336 + 588}{27216} = \frac{11}{324}$.

b) Đúng. Mỗi cách chọn 5 chữ số từ 10 chữ số cho đúng một số thỏa mãn $a > b > c > d > e$ nên có $C_{10}^5 = 252$ số.

Xác suất cần tìm là $\frac{252}{27216} = \frac{1}{108}$.

c) Sai. Số phần tử của S là 27216.

d) Đúng. Chọn 5 chữ số có $C_{10}^5 = 252$ cách; c là chữ số nhỏ nhất; chọn 2 trong 4 chữ số còn lại cho a, b có $C_4^2 = 6$ cách, hai chữ số còn lại cho d, e, thứ tự mỗi cặp được xác định. Vì $a > c \geq 0$ nên $a \neq 0$.

Xác suất cần tìm là $\frac{252.6}{27216} = \frac{1}{18}$.

Câu 4. Hàm số bậc ba $h(x)$ có hai điểm cực trị $x=\pm 1$ nên $h'(x)=k\left(x^2-1\right)$, suy ra $h(x)=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+d$.

Từ $h(-1)=3$, $h(1)=-3$ suy ra $k=\frac{9}{2}$, $d=0$. Vậy $h(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{2}x$.

a) Đúng. Đặt $u(x)=f\left(x^4\right)-x^2$, ta có $u'(x)=4x^3h\left(x^4\right)-2x=2x\left(3t^7-9t^3-1\right)$ với $t=x^2$.

Xét $\varphi(t)=3t^7-9t^3-1$ trên $(0;+\infty)$, ta có $\varphi'(t)=3t^2\left(7t^4-9\right)$, $\varphi(0)=-1$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ nên $\varphi(t)=0$ có đúng một nghiệm $t_1>0$.

Suy ra $u'(x)=0$ có ba nghiệm $x=0$, $x=\pm x_1$ với $x_1=\sqrt{t_1}$, và $u(x)$ có 3 điểm cực trị.

Hàm số $u(x)$ chẵn, $u(0)=f(0)=0$, nghịch biến trên $\left(0;x_1\right)$, đồng biến trên $\left(x_1;+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ nên $u(x)=0$ có đúng hai nghiệm đổi dấu $x=\pm x_2$ với $x_2>x_1$; tại $x=0$ thì $u(x)$ không đổi dấu.

Vậy hàm số $y=\left|u(x)\right|$ có $3+2=5$ điểm cực trị.

b) Sai. Đặt $w=\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{2}{3}\cos x=\frac{2t^2-2t-1}{3}$ với $t=\cos x\in[-1;1]$, suy ra $w\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ và $w=0$ khi $\cos x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, hàm số f đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ và nghịch biến trên $[0;1]$ nên giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $f(0)$.

Hàm số $f(x)=\frac{3}{8}x^4-\frac{9}{4}x^2$ có đạo hàm $f'(x)=h(x)$ và $f(0)=0$, khi đó giá trị lớn nhất bằng $0\neq 3$. Vậy mệnh đề sai.

c) Đúng. Ta có $g'(x)=3x^2h\left(x^3+1\right)+9x^5+9x^2=3x^2\left[h(v)+3v\right]$ với $v=x^3+1$.

Với $x\in(-1;0)$ thì $v\in(0;1)$ và $h(v)+3v=\frac{3}{2}v\left(v^2-1\right)<0$.

Suy ra $g'(x)<0$ với mọi $x\in(-1;0)$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

d) Sai. Ta có $h(3)=\frac{81}{2}-\frac{27}{2}=27$.

<u>PHẦN III</u>. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Ta có $f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\log_3\left[\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)\right]=\frac{1}{2}\log_3 9=1$.

Hàm số $y=\sqrt{x^2+9}-x$ có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1<0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương $f\left(m+4.3^{x^2}-3\right)=1-f\left(-3^{2x^2}\right)=f\left(3^{2x^2}\right)\Leftrightarrow m+4.3^{x^2}-3=3^{2x^2}$.

Đặt $t=3^{x^2}\geq 1$, ta được $m=t^2-4t+3$ (*). Với $t=1$ có một nghiệm $x=0$; mỗi $t>1$ cho hai nghiệm x phân biệt.

Hàm số $\psi(t)=t^2-4t+3$ trên $[1;+\infty)$ có $\psi(1)=0$, nghịch biến trên $[1;2]$ với $\psi(2)=-1$ và đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi (*) có đúng một nghiệm $t>1$ và không có nghiệm $t=1$, tức là $m=-1$ hoặc $m>0$.

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{-1;1;2;...;10\}$.

Trả lời: 11.

Câu 2. Đặt $\overrightarrow{SP}=x\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ}=y\overrightarrow{BN}=y\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{SP}=-x\vec{a}+(1-y)\vec{b}+\frac{y}{2}\vec{c}$ và $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

Vì $PQ\parallel CM$ nên $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{CM}$, suy ra $\begin{cases}-x=\frac{k}{2}\\1-y=\frac{k}{2}\\\frac{y}{2}=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{2}{3}\\x=\frac{1}{3}\\y=\frac{4}{3}\end{cases}$.

Do đó $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

Vậy $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\approx 1,3$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Trả lời: 1,3.

Câu 3. Coi các cách xếp là đồng khả năng và chỉ xét các cặp pha liên tiếp trong dãy 6 pha của một chu kỳ.

Số cách sắp xếp 6 pha gồm 2 đỏ, 2 vàng, 2 xanh là $\frac{6!}{2!.2!.2!}=90$.

Xếp trước 2 pha đỏ (Đ) và 2 pha vàng (V) thành một dãy, rồi chèn 2 pha xanh vào 5 khoảng trống của dãy, mỗi khoảng nhiều nhất một pha xanh.

Dãy ĐĐVV, VVĐĐ: hai pha xanh phải chèn vào giữa hai cặp cùng màu nên mỗi dãy có 1 cách, được $2.1=2$ cách.

Dãy ĐVVĐ, VĐĐV: một pha xanh chèn vào giữa cặp cùng màu, pha xanh còn lại chèn vào một trong 4 khoảng còn lại, được $2.4=8$ cách.

Dãy ĐVĐV, VĐVĐ: chọn 2 trong 5 khoảng trống, được $2.C_5^2=20$ cách.

Số cách xếp không có hai pha cùng màu liền nhau là $2+8+20=30$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $a=1$, $b=3$. Vậy $a+b=4$.

Trả lời: 4.

Câu 4. Đặt $u_k=C_{k+3}^4$ với $k=1,2,...,2023$.

Chia $n+8$ phần tử thành hai nhóm gồm n phần tử và 8 phần tử. Đếm các cách chọn 4 phần tử có ít nhất một phần tử thuộc nhóm 8 phần tử, ta được
$C_{n+8}^4-C_n^4=C_8^1C_n^3+C_8^2C_n^2+C_8^3C_n^1+C_8^4=8C_n^3+28C_n^2+56n+70$.

Vế phải là số chẵn nên C_{n+8}^4 và C_n^4 cùng tính chẵn lẻ.

Tám số hạng đầu là $1;5;15;35;70;126;210;330$ nên tính chẵn lẻ của dãy lặp lại theo chu kỳ 8: lẻ, lẻ, lẻ, lẻ, chẵn, chẵn, chẵn, chẵn.

Có 2021 bộ ba số hạng liên tiếp $\left(u_k;u_{k+1};u_{k+2}\right)$ với $k=1,2,...,2021$.

Tổng ba số hạng là số lẻ khi trong ba số có một lẻ hoặc ba lẻ, tức là khi k chia 8 dư $1;2;4;7$.

Vì $2021=8.252+5$ nên 2016 bộ đầu có $252.4=1008$ bộ thỏa mãn; trong 5 bộ còn lại có 3 bộ thỏa mãn, ứng với $k=2017;2018;2020$. Vậy có $1008+3=1011$ bộ ba có tổng lẻ.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{1011}{2021}$, là phân số tối giản. Vậy $a+b=3032$.

Trả lời: 3032.

Câu 5. Ta có $BC=\sqrt{AC^2-BA^2}=a\sqrt{3}$.

Tam giác ABB' có $BA=BB'=a$, $\widehat{ABB'}=60^\circ$ nên là tam giác đều. Gọi E là trung điểm AB, suy ra $B'E\perp AB$ và $B'E=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $B'C'\parallel BC$ và $BC\perp AB$ nên $B'C'\perp AB$. Do đó $AB\perp\left(EB'C'\right)$, suy ra $\left(EB'C'\right)\perp(ABC)$.

Vì I là trung điểm BC' và $B'A' \parallel AB$ nên $d\left(B'A', BI\right) = d\left(B', \left(ABC'\right)\right)$.

Kẻ $B'K \perp EC'$ tại K. Vì $AB \perp B'K$ nên $B'K \perp \left(ABC'\right)$, suy ra $B'K = \dfrac{3a}{4}$.

Đặt $\varphi = \widehat{EB'C'}$. Tính diện tích tam giác $EB'C'$ theo hai cách: $\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.EC'.\dfrac{3a}{4}$, suy ra $EC' = 2a\sin\varphi$.

Theo định lí côsin: $EC'^2 = \dfrac{3a^2}{4} + 3a^2 - 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}.\cos\varphi = \dfrac{15a^2}{4} - 3a^2\cos\varphi$.

Suy ra $4\left(1-\cos^2\varphi\right) = \dfrac{15}{4} - 3\cos\varphi \Leftrightarrow 16\cos^2\varphi - 12\cos\varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{8}$.

Vì $\left(EB'C'\right) \perp (ABC)$ và $B'C' \parallel (ABC)$ nên chiều cao lăng trụ là

$h = d\left(E, B'C'\right) = B'E.\sin\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$.

Do đó $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi = \dfrac{3a^3}{4}\sin\varphi$. Vì $V < \dfrac{a^3}{2}$ nên $\sin\varphi < \dfrac{2}{3}$.

Với $\cos\varphi = \dfrac{3-\sqrt{13}}{8}$ thì $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}+1\right)}{8} > \dfrac{2}{3}$, loại.

Với $\cos\varphi = \dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$ thì $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)}{8} < \dfrac{2}{3}$, thỏa mãn.

Vậy $x = \dfrac{3}{4}.\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)}{32} \approx 0,4$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Trả lời: $0,4$.

Câu 6. Ta có $f(1) = 5 - 2m$, $f(3) = 55 - 2m$.

Suy ra $\max_{[1;3]}\left|f(x)\right| \geq \max\left\{\left|f(1)\right|; \left|f(3)\right|\right\} \geq \dfrac{\left|f(3) - f(1)\right|}{2} = 25$.

Do đó $\max_{[1;3]}\left|f(x)\right| + \min_{[1;3]}\left|f(x)\right| \geq 25 > 10$ với mọi m.

Vậy mọi giá trị nguyên của m thuộc $[-30;30]$ đều thỏa mãn, có 61 giá trị.

Trả lời: 61.

---------- HẾT ----------