SỞ GDĐT BẮC NINH
LIÊN TRƯỜNG THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 7 trang)

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LẦN 2
NĂM HỌC: 2026 - 2027
MÔN : TOÁN 12
Ngày thi: 12/11/2026
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Mã đề 0101

Họ và tên thí sinh: ..... ***Số báo danh:*** .....

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN. (*Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án*). (6 điểm).

Câu 1. Một kim tự tháp Ai Cập được xây dựng khoảng 2500 năm trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 150 *m*, cạnh đáy dài 220 *m*. Hỏi diện tích xung quanh của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu? (Diện tích xung quanh của hình chóp là tổng diện tích của các mặt bên)

A. $2200\sqrt{346}\left(\text{m}^2\right)$.
B. $1100\sqrt{346}\left(\text{m}^2\right)$
C. $\left(4400\sqrt{346}+48400\right)\left(\text{m}^2\right)$
D. $4400\sqrt{346}\left(\text{m}^2\right)$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (*chỉ xét các tiệm cận đứng và ngang*)?

A. 1.
B. 3.
C. 2.
D. 0.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đoạn $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ là tập hợp con của tập nghiệm bất phương trình: $\log_{\frac{1}{5}}\left(\cos^2x+1\right)<\log_{\frac{1}{5}}\left(\cos^2x+4\cos x+m\right)+1$ (1)

A. $m\in\left(\frac{7}{4};4\right]$.
B. $m\in\left[\frac{7}{4};4\right)$.
C. $m\in\left(\frac{7}{4};4\right)$.
D. $m\in\left[\frac{7}{4};4\right]$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông tại a, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S lên cạnh AB là điểm H thỏa mãn $AH=2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.
B. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
C. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.
D. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 5. Anh Minh muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $3200\,\text{cm}^3$, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

A. $170\,\text{cm}^2$.
B. $160\,\text{cm}^2$.
C. $150\,\text{cm}^2$.
D. $140\,\text{cm}^2$.

Câu 6. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9\left(a+b\right)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$.
B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

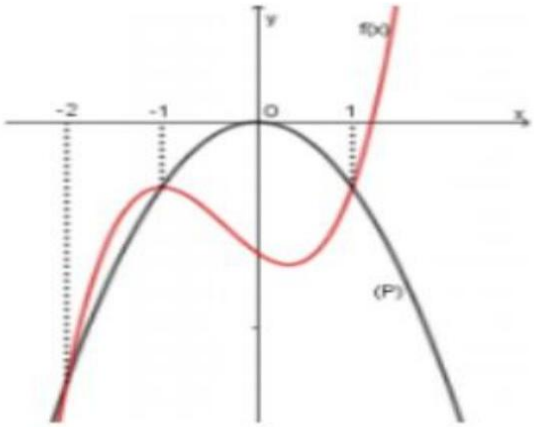
Câu 7. Ông An gửi 320 triệu đồng vào ngân hàng ***ACB*** và ***VietinBank*** theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng ***ACB*** với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng ***VietinBank*** với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai ngân hàng là 26670725,95 đồng. Hỏi số tiền ông An lần lượt ở hai ngân hàng ***ACB*** và ***VietinBank*** là bao nhiêu (*số tiền được làm tròn tới hàng đơn vị*)?

A. 120 triệu đồng và 200 triệu đồng. **B.** 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.
C. 140 triệu đồng và 180 triệu đồng. **D.** 180 triệu đồng và 140 triệu đồng.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng đi qua đường chéo BD'. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích thiết diện thu được.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx-2$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính giá trị của biểu thức: $P=a-3b-5c$.

A. $P=3$. **B.** $P=-7$. **C.** $P=9$. **D.** $P=-1$.

Câu 10. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $A=3f(2)+4f'(2)$.

A. 14. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(2x^2-12x+m)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a . Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. a^2 **B.** $-a^2$ **C.** $\frac{a^2}{2}$ **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Câu 13. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s=15+20t^2-8t^3$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là

A. $\frac{10}{3}m/s$. **B.** $\frac{50}{3}m/s$. **C.** $15m/s$. **D.** $20m/s$.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$. Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M tùy ý.

Đường thẳng $d_1: x=2$, đường thẳng $d_2: y=2$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2, A là giao điểm của d và d_1, B là giao điểm của d và d_2. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 15. Cho $\lim\limits_{x\to-2}\frac{ax+b-\sqrt{2x+5}}{(x+2)^2}=L$ với L là một số thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a+b=4$. **B.** $-2a+b=-4$. **C.** $a^2+2b^2=11$. **D.** $a^2+b^2=10$.

Câu 16. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 42. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 54.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-2;11;1)$. **C.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **D.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn :

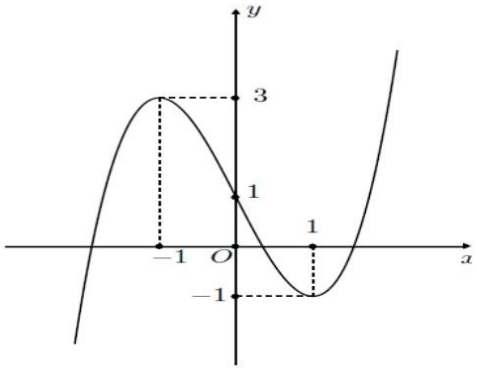
$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$. Tính $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\frac{8}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{7}{9}$.

Câu 19. Trong cuộc gặp mặt dặn dò khi lên đường tham dự kì thi HSG có 10 bạn trong đội tuyển gồm 2 bạn đến từ lớp 12A1, 3 bạn đến từ lớp 12A2, 5 bạn còn lại đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn đó vào ngồi một bàn dài mà mỗi bên có 5 ghế đối diện nhau. Tính xác suất sao cho không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau.

A. $\frac{73}{126}$. **B.** $\frac{53}{126}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{38}{63}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(x)+3m-3=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (*Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 8. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai*). *(8 điểm).*

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $B'C'D'$, I là trung điểm của AB'.

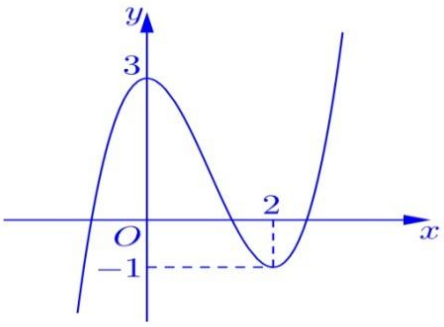
a) $6\overrightarrow{IG}=3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA'}$.

d) $\cos\left(\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{IG}\right)=\frac{\sqrt{13}}{26}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là $I(1;1)$.

b) $a+2b+3c+4d=6$.

c) Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{11x-x^2}{6}\right)$ có tất cả 21 giá trị nguyên.

d) Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x)=\dfrac{f^2(x)+m.f(x)-2}{f(x)+3}$ có đúng sáu điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;3)$ là 10.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 2, $ABD=60^o$ và $SA=SB=SD=\sqrt{6}$.Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

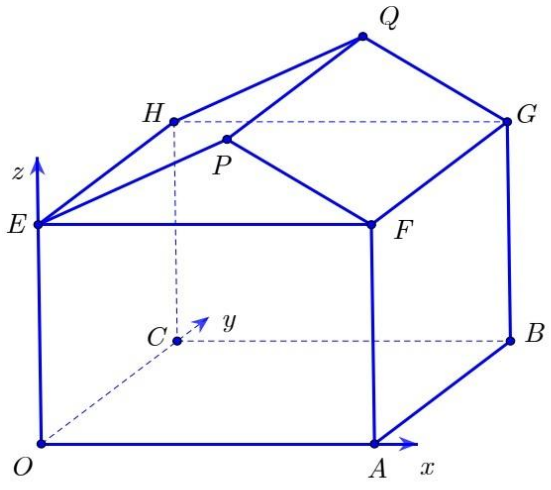
a) Giá trị lớn nhất của $\sin\alpha$ bằng $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{2\sqrt{21}}{9}$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{9}$.

d) Sin của góc nhị diện $[S,CD,A]$ bằng $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 4. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFPE.CBGQH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật và EFP là tam giác cân tại P.Biết $OA=4$ m; $AB=6$ m; $HC=5$ m; độ dốc của mái nhà, tức là số đo góc nhị diện $[Q,FG,H]$ bằng 45^o. Người ta mô hình hóa nhà kho bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục là 1 m). Khi đó:



a) Toạ độ của $\overrightarrow{PQ}$ là $(0;6;0)$.

b) Tọa độ của điểm G là $(6;4;5)$.

c) Chiều cao kho hàng tức là khoảng cách từ nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) và sàn nhà bằng 7 m.

d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của GQ và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O. Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến E rồi từ E đến H, sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $11+\sqrt{10}$ m.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) $f(x)+f(-x)=-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Tập xác định của hàm số là R.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên R

d) Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4.5^x+10x+m\right)+f\left(-5^{x+1}\right)=1$ có hai nghiệm dương phân biệt là 5 giá trị.

Câu 6. Một hộp đựng 40 thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Rút ngẫu nhiên 4 thẻ trong hộp.

a) Xác suất để 4 thẻ rút ra đều ghi số chia hết cho 4 bằng $\frac{99}{18278}$.

b) Xác suất để 4 thẻ rút ra có số thẻ ghi số chẵn nhiều hơn số thẻ ghi số lẻ là $\frac{291}{962}$.

c) Xác suất để 4 thẻ rút ra có tổng ghi trên các thẻ là một số chẵn bằng $\frac{431}{962}$.

d) Xác suất để 4 thẻ rút ra không có hai thẻ nào ghi 2 số liên tiếp bằng $\frac{357}{494}$.

Câu 7. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1200 *nghìn đồng*.

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x)=-x^3+3x^2+220x-500$ (*nghìn đồng*).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa.

d) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x)=220+x$ (*nghìn đồng*).

Câu 8. Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và sau t giờ nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t)=7e^{-0,35t}$.(^0C/ giờ). Miếng thịt này sẽ được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C.

a) Sau 2 giờ tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt bằng $3,48^0\text{C}/$ giờ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị* $^\circ\text{C}/$ *giờ*).

b) Nhiệt độ của miếng thịt bằng 0°C sau 43 phút (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút*).

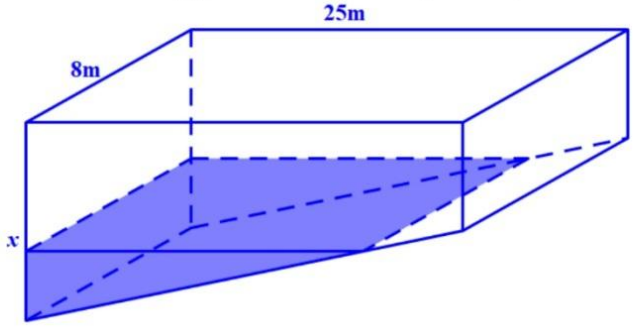
c) Cần mất 2,44 giờ để miếng thịt nướng được rã đông (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ*).

d) Sau khi rã đông được 2 tiếng, miếng thịt được đem đi nướng trong lò vi sóng. Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt trong lò vi sóng sau t giờ được xác định bởi hàm số $L'(t)=80e^{0,2t}$ (^{0}C / giờ). Miếng thịt được coi là chín đều nếu nhiệt độ của nó là 77°C. Thời gian để nướng chín đều miếng thịt là 48 phút (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút*).

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (*Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*). (*6 điểm*).

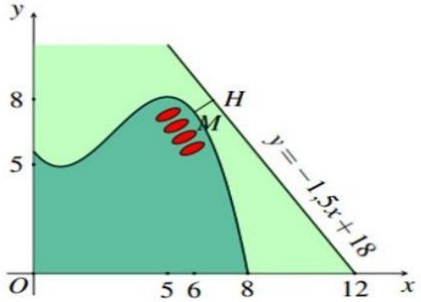
Câu 1. Một thiết bị điện hoạt động sao cho công suất tiêu thụ tại thời điểm x (tính bằng giờ) được biểu diễn bởi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f'(x)+2xf(x)=x$, với $\forall x\in\mathbb{R}$ .Biết rằng tại thời điểm $x=0$ thì công suất là $f(0)=\dfrac{3}{2}$ (*tính bằng đơn vị công suất tiêu chuẩn*).Để đánh giá hiệu suất tiêu thụ năng lượng, người ta tính tích phân biểu thị năng lượng vượt mức trong khoảng thời gian từ 0 đến 1 giờ bằng biểu thức: $\int_0^1\left(2f(x)-1\right)xdx=a+\dfrac{b}{e}$, với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị $a^2+2025b^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Tại khu du lịch sinh thái Bản Rõm ở Sóc Sơn, Hà Nội , nhà đầu tư xây một cái bể bơi nhằm đáp ứng nhu cầu giải trí của khách du lịch. Theo bản thiết kế bể bơi hình chữ nhật chiều dài $25m$, chiều rộng $8m$, một đầu độ sâu là $1.2m$ và đầu kia là $2.2m$ (độ sâu là chiều cao tính từ đáy bể đến mép trên của bể), đáy bể được lát phẳng (*tham khảo hình vẽ).* Để bơm nước vào bể người ta lắp 1 máy bơm công suất $1m^3$ / $1phut$. Trong thời gian bơm từ phút thứ 45 đến phút thứ 120 (bơm từ lúc bể không có nước) thì mực nước dâng lên được một độ cao là bao nhiêu. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, đơn vị là mét).*



Câu 3. Người ta dùng thuỷ tinh trong suốt để làm một cái chặn giấy hình tứ diện đều. Để trang trí cho nó, người thiết kế đặt trong khối tứ diện 4 quả cầu nhựa màu xanh có bán kính bằng nhau là $r=\sqrt{2}(\text{cm})$. Biết rằng 4 quả cầu này đôi một tiếp xúc với nhau và mỗi mặt của tứ diện tiếp xúc với 3 quả cầu, đồng thời không cắt quả cầu còn lại. Nếu bỏ qua bề dày của các mặt thì lượng thuỷ tinh cần dùng để làm chặn giấy trên bao nhiêu cm^3 (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*) .

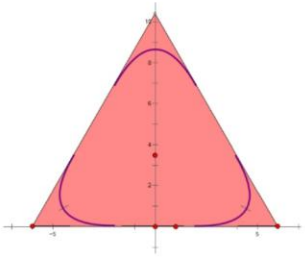
Câu 4. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên dưới, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{10}(-x^3+9x^2-15x+56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục là 100 m .Trong công viên có một con đường chạy dọc theo bờ hồ có phương trình $y=-1,5x+18$ .Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoành độ của điểm để xây dựng bến thuyền này là bao nhiêu?



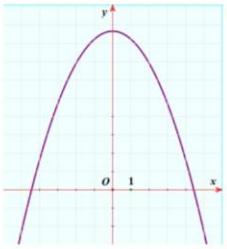
Câu 5. Một tấm kính làm mặt bàn (H1) có hình dáng tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong (H2). Biết cạnh tấm kính tam giác ban đầu bằng 12 (dm). Để cắt góc được đẹp thì người ta dùng đường Parabol (P): $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+5\sqrt{3}$ (H3) có hai nhánh tiếp giáp với hai cạnh của tam giác (H4)



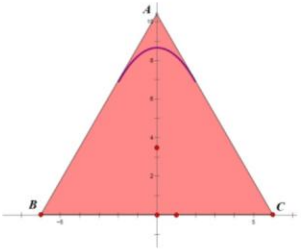
H1



H2



H3



H4

Tính diện tích mặt kính (*kết quả được làm tròn đến hàng phần chục*).

Câu 6. Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn $(y+2z)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=xy+2xz-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_5\left(y^2+z^2\right)+\frac{1}{4}\log_5^2\left(\frac{9}{x^2}+3y^2-3z^2\right)$

---------- ***HẾT*** ----------

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Trung đoạn của hình chóp là $\sqrt{150^2+110^2}=10\sqrt{346}$ (m). Diện tích xung quanh là $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 220\cdot 10\sqrt{346}=4400\sqrt{346}\ \left(\text{m}^2\right)$. Chọn D.

Câu 2. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên không có thêm tiệm cận ngang; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$. Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2. Chọn C.

Câu 3. Đặt $t=\cos x$. Với $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ thì $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}\left(t^2+1\right)<\log_{\frac{1}{5}}\frac{t^2+4t+m}{5}\Leftrightarrow t^2+1>\frac{t^2+4t+m}{5}>0\Leftrightarrow -t^2-4t<m<4t^2-4t+5$.

Yêu cầu bài toán tương đương bất đẳng thức trên đúng với mọi $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Hàm $-t^2-4t$ nghịch biến trên đoạn này nên có giá trị lớn nhất bằng $\frac{7}{4}$ tại $t=-\frac{1}{2}$. Mặt khác $4t^2-4t+5=(2t-1)^2+4\geq 4$, dấu bằng xảy ra tại $t=\frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{7}{4}<m<4$. Chọn C.

Câu 4. Đáy là hình vuông cạnh a nên $AB=a$, suy ra $AH=\frac{2a}{3}$, $BH=\frac{a}{3}$. Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ và $SH\perp AB$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Tam giác SAB vuông tại S có đường cao SH nên $SH^2=AH\cdot BH=\frac{2a^2}{9}$, suy ra $SH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. Chọn A.

Câu 5. Gọi chiều rộng là x, chiều dài là y (cm), khi đó chiều cao là $2x$. Từ $x\cdot y\cdot 2x=3200$ suy ra $y=\frac{1600}{x^2}$.

Diện tích cần xây là $S=xy+2\cdot x\cdot 2x+2\cdot y\cdot 2x=4x^2+5xy=4x^2+\frac{8000}{x}$ với $x>0$.

Ta có $S' = 8x - \dfrac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$. Lập bảng biến thiên, S nhỏ nhất khi $x = 10$, khi đó $y = 16$.

Diện tích đáy là $10 \cdot 16 = 160 \ \left(\text{cm}^2\right)$. Chọn B.

Câu 6. Đặt $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b) = t$, suy ra $a = 4^t$, $b = 6^t$, $a + b = 9^t$. Do đó $4^t + 6^t = 9^t$.

Chia hai vế cho 9^t và đặt $k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$, ta được $k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Chọn B.

Câu 7. Gọi số tiền gửi ở ngân hàng ACB là x (triệu đồng), số tiền gửi ở ngân hàng VietinBank là $320 - x$ (triệu đồng). Thời gian 15 tháng bằng 5 quý.

Tổng tiền lãi là $x\left(1,021^5 - 1\right) + (320 - x)\left(1,0073^9 - 1\right) = 26,67072595$.

Suy ra $x = \dfrac{26,67072595 - 320\left(1,0073^9 - 1\right)}{1,021^5 - 1,0073^9} \approx 120$.

Vậy số tiền ở hai ngân hàng lần lượt là 120 triệu đồng và 200 triệu đồng. Chọn A.

Câu 8. Gọi O là tâm của hình lập phương thì O là trung điểm của BD'. Mỗi mặt của hình lập phương chứa đúng một trong hai đỉnh B, D' nên mỗi cạnh của thiết diện có một đầu mút là B hoặc D'. Mỗi đỉnh B, D' kề đúng hai cạnh của thiết diện và không có cạnh nào nối B với D' nên thiết diện có đúng bốn cạnh. Thiết diện đối xứng qua O nên là hình bình hành nhận BD' làm đường chéo.

Hai đỉnh còn lại M, N đối xứng nhau qua O và nằm trên hai cạnh đối xứng nhau qua O trong sáu cạnh không chứa B, D', gồm ba cặp AA' và CC', AD và $B'C'$, CD và $A'B'$. Do tính đối xứng của hình lập phương, ta xét $M \in AA'$, $N \in CC'$.

Gọi h là khoảng cách từ M đến BD', ta có $S = BD' \cdot h = \sqrt{3}h$.

Vì $AA' \parallel (BDD'B')$ nên $h \geq d\left(M, (BDD'B')\right) = d\left(A, (BDD'B')\right) = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi M là trung điểm của AA' thì $MO \parallel AC$ nên $MO \perp (BDD'B')$, do đó $h = MO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\min} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Chọn B.

Câu 9. Từ đồ thị, phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - 2 = -x^2$ có ba nghiệm $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$.

Do đó $ax^3 + (b+1)x^2 + cx - 2 = a(x+2)(x+1)(x-1) = a\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right)$.

Đồng nhất hệ số: $-2a=-2$, $b+1=2a$, $c=-a$, suy ra $a=1$, $b=1$, $c=-1$.

Vậy $P=1-3+5=3$. Chọn A.

Câu 10. Thay $x=0$ vào giả thiết: $f^3(2)-2f^2(2)=0\Leftrightarrow f(2)=0$ hoặc $f(2)=2$.

Lấy đạo hàm hai vế: $-3f^2(2-x)f'(2-x)-12f(2+3x)f'(2+3x)+2xg(x)+x^2g'(x)+36=0$.

Thay $x=0$: $-3f^2(2)f'(2)-12f(2)f'(2)+36=0$.

Nếu $f(2)=0$ thì $36=0$, vô lí. Do đó $f(2)=2$, suy ra $-36f'(2)+36=0\Leftrightarrow f'(2)=1$.

Vậy $A=3\cdot 2+4\cdot 1=10$. Chọn B.

Câu 11. Đặt $u=2x^2-12x+m=2(x-3)^2+m-18$. Ta có $g'(x)=4(x-3)(u+1)^2u(u-4)$.

Vì $(u+1)^2\geq 0$ nên thừa số này không làm $g'(x)$ đổi dấu. Do đó các điểm cực trị của $g(x)$ chỉ có thể là $x=3$ hoặc nghiệm của $u=0$, $u=4$.

Mỗi phương trình $u=0$, $u=4$ có nhiều nhất hai nghiệm nên $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $2(x-3)^2=18-m$ và $2(x-3)^2=22-m$ phải có hai nghiệm phân biệt, tức $m<18$.

Ngược lại, với $m<18$ thì hai phương trình trên có bốn nghiệm đơn phân biệt khác 3 nên $g'(x)$ đổi dấu tại bốn nghiệm này. Mặt khác $u(3)=m-18<0$ nên $u(u-4)>0$ ở gần $x=3$, do đó $g'(x)$ cũng đổi dấu tại $x=3$. Vậy $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị.

Với m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;\ldots;17\}$, gồm 17 giá trị. Chọn A.

Câu 12. Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$. Chọn D.

Câu 13. Ta có $v(t)=s'(t)=40t-24t^2$, $a(t)=v'(t)=40-48t$. Khi $a(t)=0$ thì $t=\dfrac{5}{6}$.

Vậy $v\left(\dfrac{5}{6}\right)=40\cdot\dfrac{5}{6}-24\cdot\dfrac{25}{36}=\dfrac{50}{3}$ (m/s). Chọn B.

Câu 14. Ta có $y=2+\dfrac{1}{x-2}$, $I(2;2)$. Gọi $M\left(x_0;2+\dfrac{1}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$.

Tiếp tuyến tại M là $d: y=-\dfrac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+2+\dfrac{1}{x_0-2}$.

Suy ra $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$, $B\left(2x_0-2;2\right)$, do đó $IA=\dfrac{2}{|x_0-2|}$, $IB=2|x_0-2|$ và $IA\cdot IB=4$.

Tam giác IAB vuông tại I nên $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{IA^2+IB^2}}{2}\geq\dfrac{\sqrt{2IA\cdot IB}}{2}=\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$. Vậy $R_{\min}=\sqrt{2}$. Chọn A.

Câu 15. Vì giới hạn hữu hạn và mẫu dần về 0 nên $-2a+b-1=0$, tức $b=2a+1$, suy ra $ax+b=a(x+2)+1$.

Nhân liên hợp: $\dfrac{ax+b-\sqrt{2x+5}}{(x+2)^2}=\dfrac{\left[a(x+2)+1\right]^2-(2x+5)}{(x+2)^2\left(ax+b+\sqrt{2x+5}\right)}=\dfrac{a^2+\dfrac{2(a-1)}{x+2}}{ax+b+\sqrt{2x+5}}$.

Giới hạn hữu hạn khi $a=1$, suy ra $b=3$. Vậy $a^2+b^2=10$. Chọn D.

Câu 16. Nhóm chứa mốt là $[40;60)$. Mốt của mẫu số liệu là $M_0=40+\dfrac{12-9}{(12-9)+(12-10)}\cdot 20=52$.

Chọn B.

Câu 17. Ta có $BA=\sqrt{26}$, $BC=2\sqrt{26}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc B, ta có $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}$.

Do đó $x_D=\dfrac{2x_A+x_C}{3}=-\dfrac{2}{3}$, $y_D=\dfrac{2y_A+y_C}{3}=\dfrac{11}{3}$, $z_D=\dfrac{2z_A+z_C}{3}=1$. Vậy $D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$. Chọn D.

Câu 18. Ta có $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2dx=\dfrac{109}{12}$. Cộng vào hai vế của giả thiết được $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-(3-x)\right]^2dx=0$, suy ra $f(x)=3-x$.

Vậy $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\dfrac{3-x}{x^2-1}dx=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x-1|-2\ln|x+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{1}{2}-2\ln\dfrac{3}{2}=\ln\dfrac{2}{9}$. Chọn B.

Câu 19. Gọi A là biến cố hai bạn lớp 12A1 ngồi đối diện, B là biến cố có hai bạn lớp 12A2 ngồi đối diện.

Khi một bạn đã ngồi, bạn kia có 9 ghế để chọn, trong đó có đúng 1 ghế đối diện, nên xác suất để hai bạn cho trước ngồi đối diện là $\dfrac{1}{9}$. Do đó $P(A)=\dfrac{1}{9}$, $P(B)=3\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$, $P(AB)=3\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{21}$.

Xác suất cần tìm là $1-\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{21}\right)=1-\dfrac{25}{63}=\dfrac{38}{63}$. Chọn D.

Câu 20. Ta có $2f(x)+3m-3=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3-3m}{2}$.

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $-1<\dfrac{3-3m}{2}<3\Leftrightarrow -1<m<\dfrac{5}{3}$.

Vì m nguyên nên $m\in\{0;1\}$, gồm 2 giá trị. Chọn C.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1. Giả sử hình lập phương có cạnh bằng 1. Chọn hệ trục $Oxyz$ với $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Khi đó $G\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};1\right)$, $I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IG}=\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Đúng. Ta có $6\overrightarrow{IG}=(1;4;3)=3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}$.

b) Sai. Ta có $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$.

c) Đúng. Ta có $\overrightarrow{GB'}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{GA'}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AA'}$, mà $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}$.

d) Đúng. Ta có $\overrightarrow{A'D}=(0;1;-1)$ nên $\cos\left(\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{IG}\right)=\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{26}}{6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{26}$.

Câu 2. Từ đồ thị: $f(0)=3$, $f'(0)=0$, $f(2)=-1$, $f'(2)=0$. Suy ra $d=3$, $c=0$, $8a+4b=-4$, $12a+4b=0$, do đó $a=1$, $b=-3$. Vậy $f(x)=x^3-3x^2+3$.

a) Đúng. Hai điểm cực trị $(0;3)$ và $(2;-1)$ của đồ thị đối xứng nhau qua tâm đối xứng nên tâm đối xứng là trung điểm $I(1;1)$.

b) Sai. Ta có $a+2b+3c+4d=1-6+0+12=7$.

c) Đúng. Đặt $u=\dfrac{11x-x^2}{6}$, ta có $u'=\dfrac{11-2x}{6}>0$ trên $[-1;2]$ nên $u\in[-2;3]$. Trên $[-2;3]$ có $f(-2)=-17$, $f(0)=3$, $f(2)=-1$, $f(3)=3$ nên $g(x)\in[-17;3]$. Vậy $g(x)$ có 21 giá trị nguyên.

d) Đúng. Đặt $t=f(x)$, ta có $h'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{t^2+6t+3m+2}{(t+3)^2}$.

Với m nguyên, tại $x=0$ có $t=3$ và $t^2+6t+3m+2=29+3m\neq 0$ nên $h'(x)$ đổi dấu tại $x=0$. Tại $x=2$ có $t=-1$: nếu $m\neq 1$ thì $t^2+6t+3m+2=3m-3\neq 0$; nếu $m=1$ thì $t^2+6t+5=(t+1)(t+5)$, với $t+1=(x-2)^2(x+1)>0$ và $t+5>0$ ở hai phía đủ gần $x=2$. Do đó $h'(x)$ cũng đổi dấu tại $x=2$. Vậy cần thêm đúng 4 điểm cực trị từ phương trình $(t+3)^2=7-3m$.

Trên $(-2;3)$: với $-17<t<-1$ thì $f(x)=t$ có 1 nghiệm; với $t=-1$ thì có 2 nghiệm $x=-1$, $x=2$; với $-1<t<3$ thì có 3 nghiệm; với $t=3$ thì có 1 nghiệm $x=0$; với $t\leq -17$ hoặc $t>3$ thì vô nghiệm.

Đặt $s=\sqrt{7-3m}>0$, hai nghiệm là $t_1=-3-s<-3$ và $t_2=-3+s$. Nghiệm t_1 cho nhiều nhất 1 điểm cực trị nên cần $-1<t_2<3$ và $t_1>-17$, tức $2<s<6$.

Suy ra $4<7-3m<36\Leftrightarrow -\dfrac{29}{3}<m<1$. Vì m nguyên nên $m\in\{-9;-8;\ldots;0\}$, gồm 10 giá trị.

Câu 3. Tam giác ABD đều cạnh 2. Gọi H là tâm tam giác ABD, vì $SA=SB=SD$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $AH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $SH=\sqrt{6-\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$, $AC=2\sqrt{3}$, $HC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $HK\perp CD$ tại K. Vì $\widehat{ACD}=30^\circ$ nên $HK=HC\sin 30^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ và $SK=\sqrt{SH^2+HK^2}=\sqrt{6}$.

Kẻ $HN\perp SK$ tại N thì $HN\perp(SCD)$, $d\left(H,(SCD)\right)=HN=\dfrac{SH\cdot HK}{SK}=\dfrac{2\sqrt{21}}{9}$.

Do đó $d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{AC}{HC}\cdot HN=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{21}}{9}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

a) Sai. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với (SCD), cắt (SCD) tại B'. Khi đó (P) luôn chứa d.

Vì $AB\parallel(SCD)$ nên $BB'=d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$, suy ra $DB'=\sqrt{BD^2-BB'^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Gọi E là hình chiếu của D lên (P). Vì $B'\in(P)$ nên $DE\le DB'$.

Suy ra $\sin\alpha=\dfrac{DE}{BD}\le\dfrac{DB'}{BD}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$, dấu bằng xảy ra khi $(P)\perp DB'$. Vậy giá trị lớn nhất của $\sin\alpha$ là $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

b) Sai. Ta có $d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

c) Sai. Ta có $S_{ABC}=S_{ABD}=\sqrt{3}$ nên $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{42}}{3}=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$.

d) Đúng. Vì $CD\perp HK$, $CD\perp SH$ nên góc phẳng nhị diện $[S,CD,A]$ là $\widehat{SKH}$, và $\sin\widehat{SKH}=\dfrac{SH}{SK}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 4. Theo hình vẽ: $O(0;0;0)$, $A(4;0;0)$, $C(0;6;0)$, $B(4;6;0)$, $E(0;0;5)$, $F(4;0;5)$, $H(0;6;5)$, $G(4;6;5)$.

Vì $FG \perp (EFP)$ nên góc phẳng nhị diện $[Q,FG,H]$ là $\widehat{PFE} = 45^\circ$. Gọi K là trung điểm của EF, ta có $PK = KF \cdot \tan 45^\circ = 2$. Suy ra $P(2;0;7)$, $Q(2;6;7)$.

a) Đúng. Ta có $\overrightarrow{PQ} = (0;6;0)$.

b) Sai. Ta có $G(4;6;5)$.

c) Đúng. Chiều cao kho hàng là $5+2=7$ (m).

d) Đúng. Trung điểm của GQ là $M(3;6;6)$, $HM = \sqrt{3^2+0^2+1^2} = \sqrt{10}$. Độ dài cáp là $OE + EH + HM = 5+6+\sqrt{10} = 11+\sqrt{10}$ (m).

Câu 5.

a) Sai. Ta có $f(x)+f(-x) = \frac{1}{2}\log_2\left[\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\right] = \frac{1}{2}\log_2 4 = 1$.

b) Đúng. Vì $\sqrt{x^2+4} > |x| \geq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định là $\mathbb{R}$.

c) Đúng. Ta có $f'(x) = -\frac{1}{2\ln 2 \cdot \sqrt{x^2+4}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) Sai. Từ ý a có $1 - f\left(-5^{x+1}\right) = f\left(5^{x+1}\right)$. Phương trình tương đương $f\left(4\cdot 5^x + 10x + m\right) = f\left(5^{x+1}\right)$.

Vì f nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $4\cdot 5^x + 10x + m = 5\cdot 5^x \Leftrightarrow m = 5^x - 10x$.

Xét $g(x) = 5^x - 10x$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $g'(x) = 5^x \ln 5 - 10 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \log_5 \frac{10}{\ln 5}$.

Hàm g nghịch biến trên $(0;x_0)$, đồng biến trên $(x_0;+\infty)$, với $g(0)=1$,
$g(x_0) = \frac{10}{\ln 5} - 10\log_5 \frac{10}{\ln 5} \approx -5{,}14$.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi $g(x_0) < m < 1$. Do đó $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$, gồm 6 giá trị.

Câu 6. Số phần tử của không gian mẫu là $C_{40}^4 = 91390$.

a) Sai. Có 10 số chia hết cho 4 nên xác suất là $\frac{C_{10}^4}{91390} = \frac{210}{91390} = \frac{21}{9139}$.

b) Đúng. Số cách chọn là $C_{20}^4 + C_{20}^3 \cdot C_{20}^1 = 27645$ nên xác suất là $\frac{27645}{91390} = \frac{291}{962}$.

c) Sai. Tổng chẵn khi số thẻ lẻ là 0, 2 hoặc 4. Số cách chọn là $2C_{20}^4+\left(C_{20}^2\right)^2=45790$ nên xác suất là $\dfrac{45790}{91390}=\dfrac{241}{481}$.

d) Đúng. Gọi các số rút được là $a_1<a_2<a_3<a_4$ không có hai số liên tiếp. Đặt $b_i=a_i-i+1$ thì $b_1<b_2<b_3<b_4$ thuộc $\{1;2;\ldots;37\}$. Ngược lại, mỗi bộ $b_1<b_2<b_3<b_4$ như vậy cho đúng một bộ $a_i=b_i+i-1$ thỏa mãn. Do đó có $C_{37}^4=66045$ cách chọn. Xác suất là $\dfrac{66045}{91390}=\dfrac{357}{494}$.

Câu 7. Ta có $B(x)=220x$, $L(x)=B(x)-C(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ với $1\le x\le 18$.

Ta có $L'(x)=-3x^2+6x+240=0\Leftrightarrow x=10$ (nhận) hoặc $x=-8$ (loại). Lại có $L(1)=-258$, $L(10)=1200$, $L(18)=-1040$.

a) Đúng. Lợi nhuận tối đa là 1200 nghìn đồng.

b) Sai. Ta có $L(x)=-x^3+3x^2+240x-500$.

c) Đúng. Lợi nhuận tối đa đạt được khi $x=10$.

d) Sai. Ta có $B(x)=220x$.

Câu 8. Ta có $T(t)=\int 7e^{-0,35t}dt=-20e^{-0,35t}+C$. Vì $T(0)=-4$ nên $C=16$, do đó $T(t)=16-20e^{-0,35t}$.

a) Đúng. Ta có $T'(2)=7e^{-0,7}\approx 3,48$ ($^\circ$C/giờ).

b) Sai. Ta có $T(t)=0\Leftrightarrow e^{-0,35t}=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\dfrac{5}{4}}{0,35}$ giờ, tức khoảng 38 phút.

c) Sai. Ta có $T(t)=10\Leftrightarrow e^{-0,35t}=\dfrac{3}{10}\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\dfrac{10}{3}}{0,35}\approx 3,44$ giờ.

d) Sai. Nhiệt độ của miếng thịt sau 2 giờ rã đông là $T(2)=16-20e^{-0,7}$.

Ta có $L(t)=400e^{0,2t}+C$ và $L(0)=T(2)$ nên $L(t)=16-20e^{-0,7}+400\left(e^{0,2t}-1\right)$.

Từ $L(t)=77$ suy ra $t=5\ln\left(1+\dfrac{61+20e^{-0,7}}{400}\right)\approx 0,8162$ giờ, tức khoảng 49 phút.

<u>PHẦN III</u>. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Nhân hai vế của giả thiết với e^{x^2}: $\left[e^{x^2}f(x)\right]'=xe^{x^2}$, suy ra $e^{x^2}f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Vì $f(0)=\dfrac{3}{2}$ nên $C=1$, do đó $f(x)=\dfrac{1}{2}+e^{-x^2}$ và $2f(x)-1=2e^{-x^2}$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 2xe^{-x^2}dx=\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{e}$. Vì e là số vô tỉ và a, b là các số hữu tỉ nên $a=1$, $b=-1$.

Vậy $a^2+2025b^2=2026$. Đáp án: 2026.

Câu 2. Gọi h (m) là chiều cao mực nước tính từ điểm sâu nhất của đáy bể. Đáy bể chênh lệch $2,2-1,2=1$ (m) trên chiều dài 25 m.

Khi $0\le h\le 1$: mặt cắt dọc của khối nước là tam giác vuông có cạnh h và $25h$ nên $V=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot 25h\cdot 8=100h^2$.

Khi $h\ge 1$: $V=100+25\cdot 8(h-1)=200h-100$.

Tại phút thứ 45: $V=45<100$ nên $100h_1^2=45$, suy ra $h_1=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Tại phút thứ 120: $V=120>100$ nên $200h_2-100=120$, suy ra $h_2=1,1$.

Mực nước dâng lên được $h_2-h_1=1,1-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\approx 0,43$ (m). Đáp án: $0,43$.

Câu 3. Tâm của 4 quả cầu tạo thành tứ diện đều cạnh $2r=2\sqrt{2}$. Mỗi mặt của chặn giấy song song với mặt đi qua ba tâm tương ứng, nằm về phía ngoài và cách mặt đó một khoảng bằng r, nên hai tứ diện đều có cùng tâm.

Gọi ρ là khoảng cách từ tâm đến mỗi mặt của tứ diện đều cạnh x. Chia tứ diện thành bốn khối chóp có đỉnh là tâm, ta có $\dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}=4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\rho\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$, suy ra $\rho=\dfrac{x\sqrt{6}}{12}$.

Gọi a là cạnh của chặn giấy, ta có $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{12}+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}$.

Suy ra $a=4\sqrt{3}+2\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện là $V_1=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{152}{3}+24\sqrt{6}$.

Tổng thể tích 4 quả cầu là $V_2=4\cdot\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3=\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lượng thủy tinh cần dùng là $V=V_1-V_2=\dfrac{152}{3}+24\sqrt{6}-\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{3}\approx 62,1\ \left(\text{cm}^3\right)$. Đáp án: $62,1$.

Câu 4. Đặt $f(x)=\frac{1}{10}\left(-x^3+9x^2-15x+56\right)$. Vì $10f(x)=(8-x)\left(x^2-x+7\right)$ và $x^2-x+7>0$ nên đồ thị cắt trục Ox tại điểm duy nhất có hoành độ $x=8$. Mọi điểm $M(x;y)$ trên bờ hồ, kể cả hai đoạn nằm trên các trục tọa độ, đều có $0\le x\le 8$ và $y\le f(x)$.

Xét $g(x)=1,5x+f(x)-18=\frac{-x^3+9x^2-124}{10}$ trên $[0;8]$. Ta có $g'(x)=\frac{-3x^2+18x}{10}=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=6$. Lại có $g(0)=-12,4$, $g(6)=-1,6$, $g(8)=-6$ nên $g(x)\le -1,6$.

Do đó $1,5x+y-18\le g(x)\le -1,6$, suy ra khoảng cách từ M đến con đường là $d=\frac{|1,5x+y-18|}{\sqrt{1,5^2+1}}\ge\frac{1,6}{\sqrt{1,5^2+1}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=6$ và $y=f(6)$. Đáp án: 6.

Câu 5. Chọn hệ trục như hình vẽ với $B(-6;0)$, $C(6;0)$, $A\left(0;6\sqrt{3}\right)$. Đường thẳng AC có phương trình $y=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$.

Xét $-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+5\sqrt{3}=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}\Leftrightarrow(x-2)^2=0$ nên parabol tiếp xúc với AC tại điểm có hoành độ $x=2$. Do tính đối xứng, parabol tiếp xúc với AB tại điểm có hoành độ $x=-2$.

Diện tích phần cắt ở một góc là $S_1=2\int\limits_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)^2dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ban đầu là $\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$.

Theo hình H2, ba góc được cắt như nhau nên diện tích mặt kính là $S=36\sqrt{3}-3\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=32\sqrt{3}\approx 55,4$ $\left(\text{dm}^2\right)$. Đáp án: $55,4$.

Câu 6. Đặt $s=y+2z>0$. Giả thiết trở thành $s\left(3^x-3^{\frac{3}{s}}\right)=xs-3$. Chia hai vế cho s được $3^x-x=3^{\frac{3}{s}}-\frac{3}{s}$.

Hàm $\varphi(u)=3^u-u$ có $\varphi'(u)=3^u\ln 3-1>0$ với mọi $u>0$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $x=\frac{3}{s}$, tức $\frac{9}{x^2}=(y+2z)^2$.

Khi đó $\frac{9}{x^2}+3y^2-3z^2=(y+2z)^2+3y^2-3z^2=(2y+z)^2$, nên $P=\log_5\left(y^2+z^2\right)+\log_5^2(2y+z)$.

Ta có $5\left(y^2+z^2\right)-(2y+z)^2=(y-2z)^2\geq 0$ nên $y^2+z^2\geq\frac{(2y+z)^2}{5}$, suy ra

$\log_5\left(y^2+z^2\right)\geq 2\log_5(2y+z)-1$.

Đặt $t=\log_5(2y+z)$, ta có $P\geq t^2+2t-1=(t+1)^2-2\geq -2$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=-1$ và $y=2z$, tức $y=\frac{2}{25}$, $z=\frac{1}{25}$, $x=\frac{75}{4}$. Đáp án: -2.

---------- HẾT ----------