CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức tam giác:
   - $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.
   - $|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
   - $|z_1+z_2| \ge ||z_1|-|z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
   - $|z_1-z_2| \ge ||z_1|-|z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.
2. Công thức trung tuyến: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
3. Tập hợp điểm:
   - $|z-(a+bi)| = r$: Đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính r.
   - $|z-(a_1+b_1i)| = |z-(a_2+b_2i)|$: Đường trung trực của AB với $A(a_1;b_1), B(a_2;b_2)$.
   - $|z-(a_1+b_1i)|+|z-(a_2+b_2i)| = 2a$:
     - Đoạn thẳng AB với $A(a_1;b_1), B(a_2;b_2)$ nếu $2a = AB$.
     - Elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn là $2a$ nếu $2a > AB$. Đặc biệt $|z+c|+|z-c| = 2a$: Elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $b = \sqrt{a^2-c^2}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Phương pháp đại số

VÍ DỤ 1 (*Sở GD Hưng Yên 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$. Tính $S = M^2+m^2$.

A. $S = 34$ B. $S = 82$ C. $S = 68$ D. $S = 36$

LỜI GIẢI 1. Ta có

$$4 = |z+2+i-(3+3i)| \ge ||z+2+i|-|3+3i|| = ||z+2+i|-3\sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} |z+2+i| \le 4+3\sqrt{2} = M \\ |z+2+i| \ge 3\sqrt{2}-4 = m \end{cases}.$$

Khi đó $S = M^2+m^2 = 68$.
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 2 (*Sở GD Hà Tĩnh 2017*). Trong các số phức z thỏa mãn $|z-(2+4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$ B. 4 C. -8 D. 8

thuvientoanhoc.com

LỜI GIẢI. Ta có

$$2 \geq ||z| - |2+4i|| = ||z| - 2\sqrt{5}| \Rightarrow 2\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq 2\sqrt{5} + 2.$$

Giá trị lớn nhất $|z|$ là $2\sqrt{5}-2$ khi $z = k(2+4i)$ với $(k-1)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2+4i).$$

Giá trị nhỏ nhất $|z|$ là $2\sqrt{5}-2$ khi $z = k(2+4i)$ với $(1-k)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2+4i).$$

Như vậy, tổng hai phần ảo của z_1, z_2 là $4\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 8.$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 3 (*THPT Chuyên Thái Nguyên 2017 L3*). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4| = 2|z|$. Kí hiệu $M = \max|z|, m = \min|z|$. Tìm mô đun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{3}$ B. $|w| = \sqrt{3}$ C. $|w| = 2\sqrt{5}$ D. $|w| = \sqrt{5}$

LỜI GIẢI. Ta có

$$2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{5} = M.$$

và

$$2|z| \geq 4 - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1 + \sqrt{5} = m.$$

Vậy $|w| = \sqrt{M^2 + m^2} = 2\sqrt{3}$.
Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4 (*THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc 2017*). Trong các số phức z thỏa mãn $|2z+\overline{z}| = |z-i|$, tìm số phức có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{i}{2}$ B. $z = \dfrac{i}{2}$ C. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{8}$ D. $z = \dfrac{\sqrt{6}}{8} + \dfrac{i}{8}$

LỜI GIẢI. Gọi $z = a + bi \quad (a \geq 0)$ thì $\overline{z} = a - bi$. Khi đó

$$\sqrt{9a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \Leftrightarrow 2b = 1 - 8a^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - 4a^2.$$

Ta có $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$ lớn nhất khi và chỉ khi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nhỏ nhất.

$$|z|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a^2\right)^2 = 16a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \geq \frac{7}{64} \Rightarrow |z| \geq \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Do đó số phức z cần tìm thỏa mãn $\begin{cases} a^2 = \dfrac{3}{32} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{6}}{8} \\ b = \dfrac{1}{2} - 4a^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$. Vậy $z = \dfrac{\sqrt{6}}{8} + \dfrac{i}{8}$.

Đáp án là D. □

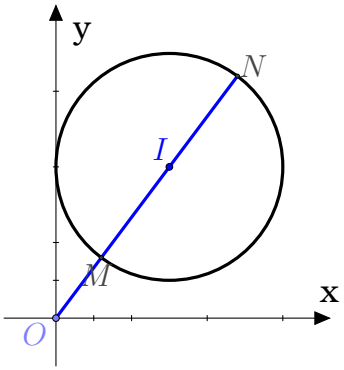
thuvientoanhoc.com

Phương pháp hình học

VÍ DỤ 5 (THPT Phan Bội Châu-Đăk Lăk 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=1$. Mô đun lớn nhất của số phức z là:

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

LỜI GIẢI.



Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $r=3$. Khi đó $|z|=OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

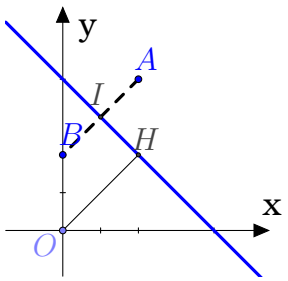
$$\max|z|=OI+r=5+1=6.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6 (THPT Đồng Quan-Hà Nội 2017,THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam 2017). Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất

A. $z=2-2i$ B. $z=1+i$ C. $z=2+2i$ D. $z=1-i$

LỜI GIẢI.



Gọi $A(2;4), B(0;2)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x+y-4=0$. Khi đó $|z|=OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d là $H(2;2)$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7 (THPT Trần Phú-Hà Nội 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|+|z-3|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

LỜI GIẢI. Gọi $A(-3;0), B(3;0)$ có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z. Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2=MO^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}.$$

thuvientoanhoc.com

Ta có

$$MA^2+MB^2\geq\frac{(MA+MB)^2}{2}=50$$

Do đó

$$m=\sqrt{\frac{50}{2}-\frac{36}{4}}=4.$$

Vậy $\min|z|=4$.
Đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Phương pháp đại số

BÀI 1 (*Sở GD Long An 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.
A. $1+\sqrt{13}$ B. $\sqrt{13}$ C. $2+\sqrt{13}$ D. $\sqrt{13}-1$

BÀI 2 (*THPT Hưng Nhân-Thái Bình 2017 L3*). Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết

$$\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1.$$

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. 3

BÀI 3 (*THPT Nguyễn Huệ-Huế 2017 L2, Hà Huy Tập-Hà Tĩnh 2017 L2*). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}|$.
A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

BÀI 4 (*Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 2017 L3*). Xác định số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=\sqrt{2}$ mà $|z|$ đạt giá trị lớn nhất
A. $z=1+i$ B. $z=3+i$ C. $z=3+3i$ D. $z=1+3i$

BÀI 5 (*THPT Yên Khánh A-Ninh Bình 2017,THPT Kim Liên-Hà Nội 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là
A. $\sqrt{13}-1$ B. 4 C. 6 D. $\sqrt{13}+1$

BÀI 6 (*THPT Đống Đa-Hà Nội 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+2z+2|=|z+1-i|$. Biểu thức $|z|$ có giá trị lớn nhất là
A. $\sqrt{2}+1$ B. 2 C. $\sqrt{2}+2$ D. $\sqrt{2}-1$

BÀI 7 (*THPT Hùng Vương-Phú Thọ 2017*). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=|(1+i)z|$. Đặt $m=|z|$, tìm giá trị lớn nhất của m.
A. $\sqrt{2}+1$ B. 1 C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}$

BÀI 8 (*THPT Chuyên Lào Cai 2017 L2*). Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{4i}{z}\right|=2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+m$?
A. 2 B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{5}$

thuvientoanhoc.com

BÀI 9 (*THPT Hưng Nhân-Thái Bình 2017 L3*). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} |z_1+3-4i|=1 \\ |z_2+6-i|=2 \end{cases}.$$

Tính tổng Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1-z_2|$.

A. 18 B. $6\sqrt{2}$ C. 6 D. $3\sqrt{2}$

BÀI 10 (*Sở GD Điện Biên 2017,Gia Lộc-Hải Dương 2017 L2*). Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 1$. Đặt $A=\dfrac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|A|<1$ B. $|A|\le 1$ C. $|A|\ge 1$ D. $|A|>1$

BÀI 11 (*Sở GD Hải Dương 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z^3+3z+\overline{z}|-|z+\overline{z}|$.

A. $.\dfrac{15}{4}$ B. $\dfrac{3}{4}$ C. $\dfrac{13}{4}$ D. 3

BÀI 12 (*Chuyên Ngoại Ngữ-Hà Nội 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$

A. $\max T=2\sqrt{5}$ B. $\max T=2\sqrt{10}$ C. $\max T=3\sqrt{5}$ D. $\max T=3\sqrt{2}$

BÀI 13 (*Sở GD Bắc Ninh 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+3|z-1|$

A. $\max T=3\sqrt{10}$ B. $\max T=2\sqrt{10}$ C. $\max T=6$ D. $\max T=4\sqrt{2}$

BÀI 14 (*Chu Văn An-Hà Nội 2017 L2*). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$

A. $\max T=8\sqrt{2}$ B. $\max T=4$ C. $\max T=4\sqrt{2}$ D. $\max T=8$

Phương pháp hình học

BÀI 15 (*Sở GD Đà Nẵng 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Mô đun lớn nhất của số phức z là:

A. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ B. $\dfrac{\sqrt{15(14-6\sqrt{5})}}{5}$ C. $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ D. $\dfrac{\sqrt{15(14+6\sqrt{5})}}{5}$

BÀI 16 (*THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc 2017 L3*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{5}-1$

BÀI 17 (*Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 2017 L3*). Cho số phức z,w thỏa mãn $|z-1+2i|=|z+5i|, w=iz+20$. Giá trị nhỏ nhất m của $|w|$ là

A. $m=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $m=7\sqrt{10}$ C. $m=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ D. $m=2\sqrt{10}$

BÀI 18 (*THPT Cổ Loa-Hà Nội 2017 L3*). Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{5}{2}-2i\right|=\left|z+\dfrac{3}{2}+2i\right|$. Biết biểu thức $Q=|z-2-4i|+|z-4-6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z=a+bi\quad(a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a-4b$

A. $P=-2$ B. $P=\dfrac{1333}{272}$ C. $P=-1$ D. $P=\dfrac{691}{272}$

thuvientoanhoc.com

BÀI 19 (*THPT Cao Nguyên-Dăk Lăk 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz+\dfrac{2}{1-i}\right|+\left|iz+\dfrac{2}{i-1}\right|=4$. Gọi M và m lần lượt là Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.m$

A. $Mm=2$ B. $Mm=1$ C. $Mm=2\sqrt{2}$ D. $Mm=2\sqrt{3}$

BÀI 20 (*Lương Đức Trọng 2017*). Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+m$

A. $\dfrac{35\sqrt{2}}{15}$ B. $\dfrac{80}{7}$ C. $\dfrac{50}{11}$ D. $\dfrac{30}{7}$

BÀI 21 (*THPT Thăng Long-Hà Nội 2017 L2*). Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=4\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng tọa độ, gọi M,N là điểm biểu diễn z và $\overline{z}$. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN.

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

BÀI 22 (*THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2017 L3*). Cho z_1,z_2 là hai nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=\dfrac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ là

A. $\dfrac{31}{5}$ B. $\dfrac{56}{5}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 5

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1. Ta có

$$1\geq |z|-|2+3i|=|z|-\sqrt{13}\Rightarrow |z|\leq 1+\sqrt{13}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2. Ta có

$$1\geq \left|\frac{-2-3i}{3-2i}z\right|-1=\left|\frac{-2-3i}{3-2i}\right|.|z|-1=|z|-1\Rightarrow |z|\leq 2.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3. Ta có

$$1\geq |z^2|-|i|=|z|^2-1\Rightarrow |z|^2\leq 2\Rightarrow |z|\leq 2.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4. Ta có

$$\sqrt{2}\geq |z|-|2+2i|=|z|-2\sqrt{2}\Rightarrow |z|\leq 3\sqrt{2}.$$

Dấu "=" khi $z=k(2+2i)$ với $2k\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow k=\dfrac{3}{2}$. Vậy $k=3+3i$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5. Ta có

$$|\overline{z}+1+i|=|z+1-i|=|(z-2-3i)+(3+2i)|\geq ||z-2-3i|-|3+2i||=\sqrt{13}-1.$$

Vậy $\min|\overline{z}+1+i|=\sqrt{13}-1$.

Đáp án là A. □

thuvientoanhoc.com

GIẢI BÀI TẬP 6. Ta có

$$|z^2+2z+2| = |(z+1)^2 - i^2| = |z+1-i|.|z+1+i| = |z+1-i| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+1-i=0 \\ |z+1+i|=1 \end{array}\right.$$

- Nếu $z = i-1$ thì $|z| = \sqrt{2}$.
- Nếu $|z+1+i| = 1$ thì $1 \geq |z| - |1+i| = |z| - \sqrt{2}$. Do đó $|z| \leq 1+\sqrt{2}$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7. Ta có

$$|z-1| = 2|z| \leq |z|+1 \Rightarrow |z| \leq 1.$$

Do đó $\max|z| = 1$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8. Ta có

$$2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1+\sqrt{5} = M.$$

và

$$2|z| \geq 4 - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1+\sqrt{5} = m.$$

Vậy $M+m = 2\sqrt{5}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9. Ta có

$$|z_1-z_2| = |(z_1+3-4i)-(z_2+6-i)+(3+3i)| \leq |z_1+2-4i|+|z_2+6-i|+|3+3i| = 3+3\sqrt{2} = \max.$$

và

$$|z_1-z_2| = |(z_1+3-4i)-(z_2+6-i)+(3+3i)| \geq |3+3i|-|z_1+2-4i|-|z_2+6-i| = 3\sqrt{2}-3 = \min.$$

Do đó tổng Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất là $6\sqrt{2}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10. Ta có

$$2A + Aiz = 2z - i \Leftrightarrow (2-Ai)z = 2A+i \Rightarrow z = \frac{2A+i}{2-Ai}.$$

Đặt $A = a+bi$. Suy ra

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |2A+i| \leq |2-Ai| \Leftrightarrow 4a^2+(2b+1)^2 \leq a^2+(b+2)^2 \Leftrightarrow 3a^2+3b^2 \leq 3 \Rightarrow |A| = \sqrt{a^2+b^2} \leq 1.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 11. Ta có

$$|z^3+3z+\overline{z}| = |z^3.\overline{z}+3z.\overline{z}+\overline{z}^2| = |z^2+3+\overline{z}^2| = |(z+\overline{z})^2+1|.$$

Suy ra

$$P = (z+\overline{z})^2+1-(z+\overline{z}) = \left(z+\overline{z}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$.
Đáp án là C. □

thuvientoanhoc.com

GIẢI BÀI TẬP 12. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

$$|z+1|^2+|z-1|^2=2|z|^2+\frac{|1+1|^2}{2}=4.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2\le(|z+1|^2+|z-1|^2)(1^2+2^2)=20\Rightarrow T\le 2\sqrt{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 13. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

$$|z+1|^2+|z-1|^2=2|z|^2+\frac{|1+1|^2}{2}=4.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2\le(|z+1|^2+|z-1|^2)(1^2+3^2)=40\Rightarrow T\le 2\sqrt{10}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 14. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

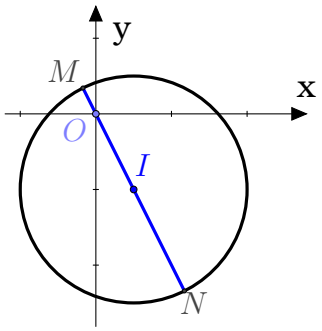
$$|z+i|^2+|z-2-i|^2=2|z-1|^2+\frac{|2+2i|^2}{2}=8.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2\le(|z+1|^2+|z-1|^2)(1^2+1^2)=16\Rightarrow T\le 4.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 15.

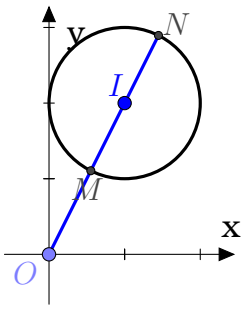


Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính $r=3$. Khi đó $|z|=OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

$$\max|z|=OI+r=3+\sqrt{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 16.



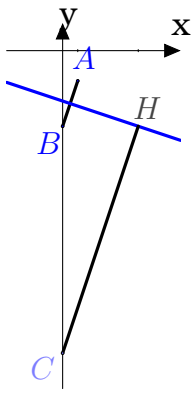
thuvientoanhoc.com

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính $r=1$. Khi đó $|z|=OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

$$\min|z| = OI - r = \sqrt{5}-1.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 17.

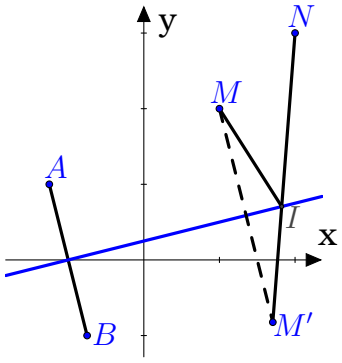


Gọi $A(1;-2), B(0;-5)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x+3y+10=0$. Ta có

$$|w| = |iz+20| = |z-20i| = CM$$

với M là điểm biểu diễn số phức z và $C(0;20)$. Do đó $\min|w| = d(C.\Delta) = 7\sqrt{10}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 18.



Gọi $A\left(-\frac{5}{2};2\right), B\left(-\frac{3}{2};-2\right)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x-4y+2=0$. Xét hai điểm $M(2;4), N(4;6)$ thì $Q=IM+IN$ với $I\in d$. Do đó Q nhỏ nhất khi và chỉ khi I là giao điểm của $M'N$ với $M'\left(\frac{58}{17};-\frac{28}{17}\right)$ là điểm đối xứng của M qua d. Vậy $I\left(\frac{62}{17};\frac{24}{17}\right)$, ứng với $z=\frac{62}{17}+\frac{24}{17}i$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 19. Ta có

$$4 \geq \left|iz+\frac{2}{1-i}+iz+\frac{2}{i-1}\right| = |2iz| = 2|z| \Rightarrow M = 2.$$

Theo giả thiết thì số phức z thỏa mãn

$$\left|z+\frac{2}{i(1-i)}\right| + \left|z+\frac{2}{i(i-1)}\right| = 4 \Leftrightarrow |z+1-i|+|z-1+i| = 4.$$

thuvientoanhoc.com

Gọi $A(-1;1), B(1;-1)$ có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z. Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Ta có

$$MA^2 + MB^2 \geq \frac{(MA + MB)^2}{2} = 8$$

Do đó

$$m = \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{8}{4}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $Mm = 2\sqrt{2}$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 20. Gọi $A(0;-1), B(0;1)$ có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z. Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết $4MA + 3MB = 2\sqrt{2}$. Đặt $a = MA \Rightarrow MB = \dfrac{10 - 4a}{3}$. Do

$$|MA - MB| = \frac{|10 - 7a|}{3} \leq AB = 2 \Rightarrow -6 \leq 10 - 7a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq a \leq \frac{16}{7}.$$

Ta có

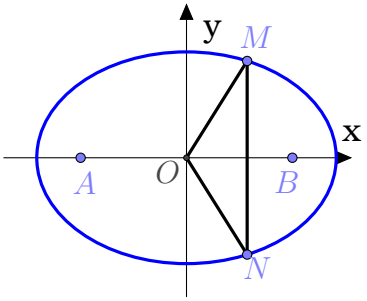
$$MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\frac{10 - 4a}{3}\right)^2 = \frac{25a^2 - 80a + 100}{9} = \frac{(5a - 8)^2 + 36}{9}.$$

Do $-\dfrac{36}{7} \leq 5a - 8 \leq \dfrac{34}{7} \Rightarrow 0 \leq (5a - 8)^2 \leq \dfrac{1296}{49}$ Suy ra

- $MA^2 + MB^2 \geq 4$ nên $|z|^2 \geq 1 \Rightarrow |z| \geq 1 = m$.
- $MA^2 + MB^2 \leq \dfrac{\dfrac{1296}{49} + 36}{9} = \dfrac{340}{49} \Rightarrow |z|^2 \leq \dfrac{121}{49} \Rightarrow |z| \leq \dfrac{11}{49} = M$.

Vậy $M + m = \dfrac{60}{49}$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 21.



Gọi điểm M biểu diễn số phức $z = x + iy$ và N biểu diễn số phức $\overline{z}$ thì M, M' đối xứng

thuvientoanhoc.com

nhau qua Ox. Diện tích tam giác OMN là $S_{OMN} = |xy|$.

Do $|z-2|+|z+2| = 4\sqrt{2}$ nên tập hợp M biểu diễn z là Elip $(E): \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Do đó

$$1 = \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8}.\frac{y^2}{4}} = \frac{|xy|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{OMN} = |xy| \leq 2\sqrt{2}.$$

Đáp án là D. □

thuvientoanhoc.com