SỞ GD&ĐT THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT HOẰNG HÓA

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 06 trang, gồm 3 phần)

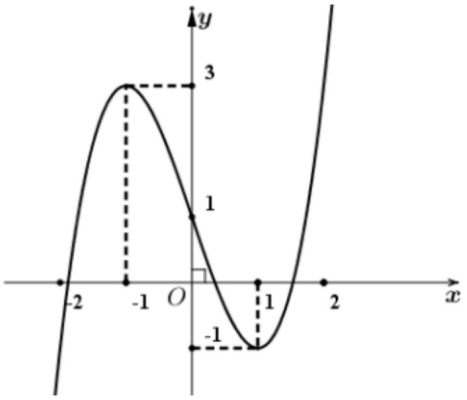
ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 12
LẦN 3- NĂM HỌC 2026 - 2027
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 18/11/2026
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Mã đề: 1234

Họ, tên thí sinh:…….Số báo danh:…….

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$.
C. $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD. Tìm số thực k sao cho $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{MN}$.

A . 2. **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2),\vec{b}=(2;1;-3),\vec{c}=(0;3;-2)$. Toạ độ của vectơ $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$ là

A. $(3;1;6)$. **B.** $(1;-1;-3)$. **C.** $(4;2;5)$. **D.** $(4;5;-2)$.

Câu 4. Một cửa hàng trang sức khảo sát một số khách hàng xem họ dự định mua trang sức với mức giá nào (đơn vị: triệu đồng). Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)
Số khách hàng	20	75	48	23	12

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 9,98. **B.** 15. **C.** 4,43. **D.** 14,41.

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{\cos x-1}$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases}u_1=5\\u_n=u_{n-1}+n,n\in\mathbb{N},n\geq 2\end{cases}$. Giá trị của u_2 là

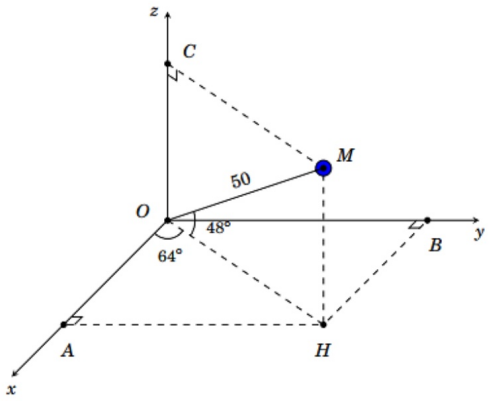
A. 10. **B.** 14. **C.** 7. **D.** 9

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 6, BC = 8, AC = 10, SA = 2\sqrt{3}$ và đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC. Giá trị của $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AM}\right| + \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{AB}$ bằng

A. 36. **B.** 60. **C.** 8. **D.** 29.

Câu 8. Vị trí của một máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM = 50$, $\left(\vec{i}; \overrightarrow{OH}\right) = 64°$, $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 48°$. Tìm toạ độ của điểm M.



A. $M(37{,}2; 14{,}7; 30{,}1)$. **B.** $M(14{,}7; 37{,}2; 30{,}1)$.

C. $M(30{,}1; 14{,}7; 37{,}2)$. **D.** $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$.

Câu 9. Chỉ số ô nhiễm không khí (AQI) tại thủ đô Hà Nội trong tháng 6/2024 được thống kê vào 10h30 sáng các ngày trong tháng thể hiện trong bảng số liệu sau:

Chỉ số (AQI)	[130;145)	[145;160)	[160;175)	[175;190)	[190;205)
Số ngày	8	7	6	7	2

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 175. **B.** 176,5. **C.** 180,2 **D.** 178,2.

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2027\pi]$ là

A. 3050. **B.** 3039. **C.** 4056. **D.** 3041.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2
		$-\infty$			

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12. Cho các số thực dương a, b sao cho phương trình $(a+1)^x.(b+1)^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\left(\frac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2 + 4x_1 + 4x_2 + 3 = 0$. Giá trị $x_1 + x_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 2)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(3; 8)$. **D.** $(-4; -2)$.

Câu 13. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2} + a\sqrt{x^2-x} + b\right) = 5$, tính $a + 2b$.

A 6. **B.** -6. **C.** -16. **D.** 4.

Câu 14. Một đa giác đều có 30 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác được sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác được sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác, xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu là

A $\frac{39}{203}$. **B.** $\frac{361}{406}$. **C.** $\frac{161}{208}$. **D.** $\frac{325}{406}$.

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x - 1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng bao nhiêu độ?

A. $45°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Câu 17. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

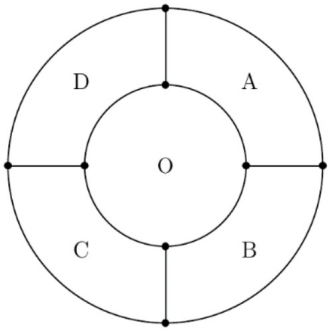
Câu 18. Cho các số thực x, y thỏa mãn: $log_8(x^3 + x^2 + x) - log_4(x + 1) = log_8(y + 2) + log_{64}(y + 1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để biểu thức $P = \left|y - \frac{4x}{\sqrt{x+1}} + a\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0?

A. 20. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 4a\sqrt{3}$ và điểm cách đều bốn đỉnh của hình chóp là trung điểm Icủa cạnh SA. Biết $IB < AB$, khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng $4a\sqrt{3}$; α là góc giữa đường thẳng IB và mặt phẳng (SAC) thoả mãn $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Số đo của góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng

A 30° **B.** 135° **C.** 60° **D.** 150°

Câu 20. Bạn Ngọc định tô màu một hình vẽ là hình tròn được chia thành 5 phần kí hiệu là O, A, B, C, D (như hình vẽ bên) bằng 6 màu khác nhau **(mỗi phần tô một màu)** sao cho hai phần hình cạnh nhau thì không được tô cùng màu (2 phần có chung biên được gọi là cạnh nhau: C và O được gọi là cạnh nhau; C và D được gọi là cạnh nhau; C và A gọi là không cạnh nhau….). Bạn Ngọc có bao nhiêu cách tô màu thoả mãn yêu cầu trên?



A 1550. **B.** 1560.
C. 1500. **D.** 1530.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a),b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x + \log_2 \frac{x+46}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -46) \cup (-1; +\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 1 - \frac{45}{(x+1)(x+46)\ln 2}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

d) Diện tích đa giác tạo bởi tất cả các điểm có tọa độ nguyên dương thuộc đồ thị (C) bằng 24 (đơn vị diện tích).

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;1), B(-1;2;3), C(1;0;-1)$

a) Tam giác ABC cân.

b) Điểm $S(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{SC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c$ bằng $\frac{5}{3}$.

c) Gọi E, F thuộc trục Oysao cho tam giác AEF vuông cân đỉnh A. Khi đó thể tích tứ diện $ABEF$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Có duy nhất điểm D thỏa mãn hình chóp $A.BCD$ là hình chóp tam giác đều và độ dài đoạn thẳng OD bằng $\sqrt{26}$.

Câu 3: Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà với giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại như bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m²)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	47	78	120	45	10

a) Giá trung bình mỗi mét vuông khách hàng muốn mua không dưới 18,5 triệu đồng.

b) Mốt của mẫu số liệu là $M_o=\frac{758}{39}$.

c) Số trung vị của mẫu số liệu là $M_e<18{,}8$.

d) Khoảng tứ phân vị của nhóm không nhỏ hơn 6.

Câu 4: Nhiệt độ $T\ ^0C$ của nước trong ấm được mô tả bởi hàm số theo thời gian như sau:

Kể từ lúc bắt đầu bật bếp $(t_1=0)$, nhiệt độ nước tuân theo công thức $T_1(t_1)=95-75e^{-t_1}$, trong đó t_1 là thời gian được tính từ lúc bật bếp (đơn vị là phút).

Khi nước trong ấm đạt $85°C$, bếp được tắt ngay lập tức. Kể từ thời điểm tắt bếp này, nhiệt độ nước tuân theo công thức $T_2(t_2)=15+Ae^{-\frac{t_2}{20}}$, trong đó A là hằng số thực và t_2 là thời gian được tính từ lúc tắt bếp (đơn vị là phút).

a) Nhiệt độ ban đầu của nước (lúc bắt đầu bật bếp) là 20^oC.

b) Giá trị của hằng số A là 85.

c) Thời gian từ lúc bật bếp đến khi tắt bếp là 2 phút *(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*.

d) Tổng thời gian từ lúc bắt đầu bật bếp cho đến khi nhiệt độ nước giảm xuống còn 42^oC là 22 phút *(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° và$AB=BC=CD=aAD=2a$.

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$ với O là trung điểm của AD.

b) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(CDD'C')$ là $\widehat{A'C'C}$.

c) Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3}{4}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Tỉ số thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A với thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{5}{6}$.

Câu 6. Một hộp chứa các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau gồm 5 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 8 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 5 viên bi từ hộp, trong đó có x viên bi

trắng, y viên bi đỏ và z viên bi xanh.

a) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{19}^{5}$.

b) Xác suất lấy được 5 viên bi đều màu xanh là $\frac{1}{2907}$.

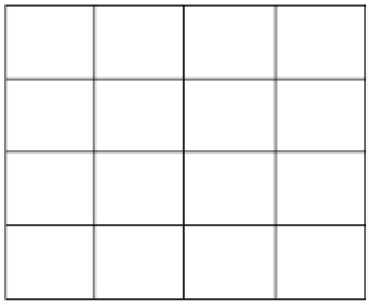
c) Xác suất lấy được 5 viên bi có ít nhất một viên bi màu xanh nhỏ hơn 0,94.

d) Xác suất lấy được 5 viên đủ cả ba màu, đồng thời ba số $x-y, y-z, z-x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng bằng $\frac{215}{969}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Một đường ống dẫn dầu bị rò rỉ hình thành nên một mảng dầu loang hình tròn trên mặt biển. Tốc độ tăng của bán kính mảng dầu loang theo thời gian là $2m/h$. Khi đó tốc độ tăng của diện tích (tính theom^2) của mảng dầu loang cũng phụ thuộc theo thời gian $t(h)$. Hỏi tại thời điểm bán kính mảng dầu loang là $25m$ thì tốc độ tăng diện tích mảng dầu loang theo thời gian là bao nhiêu m^2/h? (Đáp số làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 2. Cho hình vuông kích thước 4×4 gồm 16 ô vuông nhỏ như hình vẽ bên. Mỗi ô vuông trong hình điền ngẫu nhiên đúng một số tự nhiên từ số 1 đến số 16 (mỗi số điền vào đúng một ô). Xác suất để tổng các số trong mỗi hàng, mỗi cột bất kỳ của hình vuông lớn (kích thước 4×4) đều là số lẻ bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ bằng bao nhiêu?

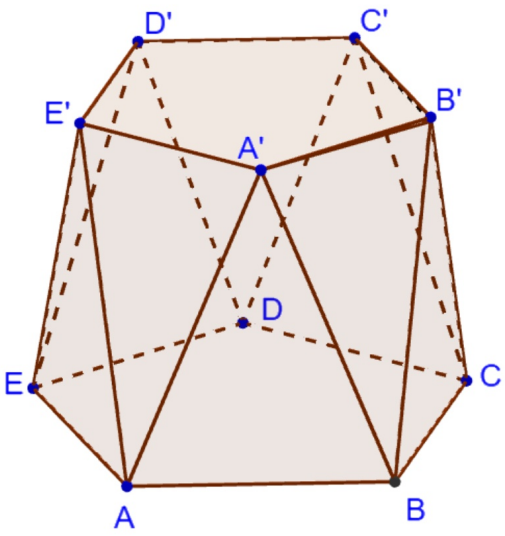


Câu 3. Xét các số thực x, y thỏa mãn $log_2 \frac{y}{2x^2} + y^2 = x^4 - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của số thực z để với mỗi z có đúng 3 cặp số $(x;y)$ phân biệt thỏa mãn hệ thức $\frac{z}{4}(2^{y-2x} + 2^{-y+4x}) = \frac{z}{16}^2 + 2^{2x}$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), hai bánh xe cùng bắt đầu lăn theo đường thẳng với vận tốc không đổi. Một bánh xe lăn từ vị trí O đến vị trí $A(8;0;0)$ (vị trí tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường được đánh dấu là X), khoảng cách từ tâm bánh xe thứ nhất đến mặt đường bằng **2,5dm**. Bánh xe còn lại lăn từ vị trí $B(0;-3;0)$đến vị trí $C(3;1;0)$ (vị trí tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường được đánh dấu là Y), khoảng cách từ tâm bánh xe thứ hai đến mặt đường bằng **2dm**. Cả hai bánh xe cùng hoàn thành đoạn đường của chúng trong 10giây. Trong thời gian đó, khoảng cách ngắn nhất giữa Xvà Y bằng bao nhiêu mét ? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

Câu 5: Khi xây dựng một căn nhà, chủ đầu tư dự định thi công thêm một lớp tường rỗng cách ẩm. Lớp tường này có tuổi thọ sử dụng là 10 năm. Chi phí thi công là 5 triệu đồng cho mỗi cm độ dày của lớp tường rỗng. Chi phí điện năng tiêu thụ trung bình mỗi năm cho hệ thống máy hút ẩm của toàn bộ căn nhà (đơn vị: triệu đồng) phụ thuộc vào độ dày lớp tường rỗng x (đơn vị: cm) theo công thức $C(x) = \frac{k}{2x+2}$ (với $0 \le x \le 10$), k là hằng số. Biết rằng, nếu không thi công lớp tường rỗng cách ẩm, chi phí điện năng cho máy hút ẩm mỗi năm lên tới 18 triệu đồng. Gọi $f(x)$ là tổng chi phí thi công lớp cách ẩm và chi phí vận hành máy hút ẩm trong 10 năm. Hỏi cần thiết kế lớp tường rỗng dày bao nhiêu cm để tổng chi phí $f(x)$ nhỏ nhất?

Câu 6. Bác Hoàng là thợ làm gỗ muốn làm một chiếc đôn bằng gỗ có hình dạng như hình bên. Chiếc đôn là một khối đa diện gồm 10 đỉnh $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$. Các đa giác $ABCDE$; $A'B'C'D'E'$ là các ngũ giác đều và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau; hình chiếu của các điểm A', B', C', D', E' trên mặt phẳng $(ABCDE)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EA; ngũ giác $ABCDE$ đều có cạnh bằng $4dm$. Biết chiếc đôn cần làm có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$, khi đó thể tích của chiếc đôn bằng bao nhiêu *deximet* khối (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



……**HẾT**……

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được tạo bằng AI · thuvientoanhoc.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1.

Từ đồ thị, $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-2)$, còn trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;+\infty)$, $(-2;0)$ thì $f'(x)$ đổi dấu.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Chọn A.

Câu 2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$.

Cộng vế theo vế, do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=\vec{0}$ nên $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. Vậy $k=2$. Chọn A.

Câu 3.

$\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}=(2-1-0;1+1-3;-3-2+2)=(1;-1;-3)$. Chọn B.

Câu 4.

Cỡ mẫu $n=20+75+48+23+12=178$.

$\frac{n}{4}=44,5$ nên nhóm chứa Q_1 là $[9;12)$: $Q_1=9+\frac{44,5-20}{75}\cdot 3=9,98$.

$\frac{3n}{4}=133,5$ nên nhóm chứa Q_3 là $[12;15)$: $Q_3=12+\frac{133,5-95}{48}\cdot 3=\frac{461}{32}$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q=Q_3-Q_1=\frac{461}{32}-9,98\approx 4,43$. Chọn C.

Câu 5.

Điều kiện: $\sin x\neq 0$ và $\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Chọn C.

Câu 6.

$u_2=u_1+2=5+2=7$. Chọn C.

Câu 7.

Vì $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AM}\right)=2\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SM}=3\overrightarrow{SM}$.

$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 36 + 16 = 52$, $SM^2 = SA^2 + AM^2 = 12 + 52 = 64 \Rightarrow SM = 8$. Do đó $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AM}\right| = 24$.

$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + AB^2 + 0 = 36$ (vì $SA \perp AB$, $BM \perp AB$).

Vậy giá trị cần tìm bằng $24 + 36 = 60$. Chọn B.

Câu 8.

$OH = OM \cos 48^\circ = 50 \cos 48^\circ$, $z_M = OM \sin 48^\circ = 50 \sin 48^\circ \approx 37,2$.

$x_M = OH \cos 64^\circ = 50 \cos 48^\circ \cos 64^\circ \approx 14,7$; $y_M = OH \sin 64^\circ = 50 \cos 48^\circ \sin 64^\circ \approx 30,1$.

Vậy tọa độ gần đúng của M là $(14,7;30,1;37,2)$. Chọn D.

Câu 9.

Cỡ mẫu $n = 30$, $\frac{3n}{4} = 22,5$ nên nhóm chứa Q_3 là $[175;190)$.

$Q_3 = 175 + \frac{22,5 - 21}{7} \cdot 15 = \frac{2495}{14} \approx 178,2$. Chọn D.

Câu 10.

Điều kiện: $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$0 \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2027\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 4054$: có 4055 giá trị.

Loại các giá trị $x = (2m+1)\pi$ với $0 \leq 2m+1 \leq 2027 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1013$: có 1014 giá trị.

Số nghiệm là $4055 - 1014 = 3041$. Chọn D.

Câu 11.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

Từ bảng biến thiên, phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1 < -1 < x_2$. Vì f nghịch biến qua mỗi nghiệm x_i nên $\lim\limits_{x \to x_i^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_i^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, do đó $x = x_1$, $x = x_2$ là hai tiệm cận đứng.

Tại $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ nên $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{f(x)} = 0$, $x = -1$ không là tiệm cận đứng.

Vậy có 4 đường tiệm cận. Chọn A.

Câu 12.

Lấy logarit tự nhiên hai vế: $x\ln(a+1)+\left(x^2-1\right)\ln(b+1)=0$.

Đặt $m=\ln(a+1)>0$, $n=\ln(b+1)>0$, phương trình trở thành $nx^2+mx-n=0$, luôn có hai nghiệm phân biệt (vì $n\cdot(-n)<0$) với $x_1x_2=-1$, $S=x_1+x_2=-\dfrac{m}{n}\neq 0$.

Điều kiện đề bài: $\dfrac{1}{S^2}+4S+3=0\Leftrightarrow 4S^3+3S^2+1=0\Leftrightarrow (S+1)\left(4S^2-S+1\right)=0\Leftrightarrow S=-1$.

Vậy $x_1+x_2=-1\in(-2;0)$. Chọn B.

Câu 13.

$\dfrac{x^2+1}{x-2}+a\sqrt{x^2-x}+b=x\left(\dfrac{x^2+1}{x(x-2)}+a\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)+b$, biểu thức trong ngoặc dần tới $1+a$ nên giới hạn hữu hạn thì $a=-1$.

Khi đó $\dfrac{x^2+1}{x-2}-\sqrt{x^2-x}+b=x+2+\dfrac{5}{x-2}-\sqrt{x^2-x}+b$, với $x-\sqrt{x^2-x}=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\to\dfrac{1}{2}$.

Suy ra giới hạn bằng $2+\dfrac{1}{2}+b=5\Leftrightarrow b=\dfrac{5}{2}$. Vậy $a+2b=-1+5=4$. Chọn D.

Câu 14.

$n(\Omega)=C_{30}^3=4060$.

Ba cạnh của đa giác không tạo thành tam giác nên không có tam giác ba cạnh màu xanh. Tam giác ba cạnh cùng màu là tam giác ba cạnh màu đỏ, tức không có cạnh nào là cạnh của đa giác.

Tam giác có hai cạnh là cạnh đa giác (ba đỉnh liên tiếp): 30 tam giác.

Tam giác có đúng một cạnh là cạnh đa giác: chọn cạnh có 30 cách, đỉnh thứ ba không kề hai đầu mút có $30-4=26$ cách, được 780 tam giác.

Số tam giác ba cạnh màu đỏ: $4060-30-780=3250$.

Xác suất cần tìm $P=\dfrac{3250}{4060}=\dfrac{325}{406}$. Chọn D.

Câu 15.

A,B đối xứng qua $d:y=x-1$ nên $AB\perp d$, suy ra $AB:y=-x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x^2}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-(m+1)x+m=0\ \ (x\neq 1)$.

Trung điểm I của AB có $x_I = \dfrac{m+1}{4}$, $y_I = -x_I + m = \dfrac{3m-1}{4}$.

$I \in d \Leftrightarrow \dfrac{3m-1}{4} = \dfrac{m+1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra $AB = \sqrt{2}\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Chọn B.

Câu 16.

Như Câu 2, $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = a^2\cos 60^\circ - a^2\cos 60^\circ = 0$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}a^2$, $MN^2 = \dfrac{1}{4}\left(a^2 + a^2\right) = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}\right) = \dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra góc bằng 45°. Chọn A.

Câu 17.

Ta có hệ: $(a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 9$ (1); $(a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 36$ (2);
$(a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 25$ (3); $(a-6)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 169$ (4).

Từ (1): $a^2 + b^2 + c^2 = 6a + 2b - 1$. Thay vào (2),(3),(4) được:

$5b + 6c = 22$; $a + 5b + 2c = 15$; $3a + b + 14c = 33$.

Giải hệ được $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ (thỏa mãn (1)). Vậy $M(1;2;2)$ và $OM = \sqrt{1+4+4} = 3$. Chọn B.

Câu 18.

Điều kiện: $x > 0$, $y > -1$.

Nhân hai vế với 6: $2\log_2\left(x^3 + x^2 + x\right) - 3\log_2(x+1) = 2\log_2(y+2) + \log_2(y+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+1)^3} = (y+1)(y+2)^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}\left(\dfrac{x^2}{x+1} + 1\right)^2 = (y+1)(y+1+1)^2$.

Hàm số $g(t) = t(t+1)^2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $y + 1 = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Khi đó $P=\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{4x}{\sqrt{x+1}}+a-1\right|$. Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$, t liên tục trên $(0;+\infty)$, $t'(x)=\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} t=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} t=+\infty$ nên t nhận mọi giá trị trong $(0;+\infty)$.

$P=\left|t^2-4t+a-1\right|=\left|(t-2)^2-(5-a)\right|\geq 0$, do đó $\min P=0$ khi và chỉ khi phương trình $(t-2)^2=5-a$ có nghiệm $t>0$.

Nếu $a\leq 5$ thì $t=2+\sqrt{5-a}>0$ là nghiệm; nếu $a>5$ thì phương trình vô nghiệm. Vậy $a\leq 5$, kết hợp $a\in[-10;10]$, $a\in\mathbb{Z}$ được 16 giá trị. Chọn C.

Câu 19.

I là trung điểm SA và $IA=IS=IB=IC$ nên các tam giác SAB, SAC vuông tại B, C, tức $AB\perp SB$, $AC\perp SC$.

Vì $AB\perp AC$, $AB\perp SB$ nên AB là đoạn vuông góc chung của AC và SB, suy ra $AB=d(AC,SB)=4a\sqrt{3}=AC$.

Gọi D là điểm sao cho $ABDC$ là hình vuông. $AB\perp SB$, $AB\perp BD$ nên $AB\perp(SBD)$, suy ra $AB\perp SD$; $AC\perp SC$, $AC\perp CD$ nên $AC\perp(SCD)$, suy ra $AC\perp SD$. Vậy $SD\perp(ABC)$.

Đặt $m=4a\sqrt{3}$, $h=SD$. Khi đó $SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=\sqrt{2m^2+h^2}$, $IB=\frac{SA}{2}=\frac{\sqrt{2m^2+h^2}}{2}$.

$BD\parallel AC$ nên $BD\parallel(SAC)$, suy ra $d(B,(SAC))=d(D,(SAC))$.

$AC\perp(SCD)$ nên $(SAC)\perp(SCD)$. Kẻ $DK\perp SC$ tại K thì $DK\perp(SAC)$ và $DK=\frac{SD\cdot DC}{\sqrt{SD^2+DC^2}}=\frac{mh}{\sqrt{m^2+h^2}}$.

Vì $I\in SA\subset(SAC)$ nên

$\sin\alpha=\frac{d(B,(SAC))}{IB}=\frac{2mh}{\sqrt{2m^2+h^2}\cdot\sqrt{m^2+h^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}\Leftrightarrow 3h^4-19m^2h^2+6m^4=0$

$\Leftrightarrow\left(3h^2-m^2\right)\left(h^2-6m^2\right)=0$.

$IB<AB\Leftrightarrow\frac{2m^2+h^2}{4}<m^2\Leftrightarrow h^2<2m^2$ nên $h^2=\frac{m^2}{3}$, $h=\frac{m\sqrt{3}}{3}$.

Vì $AB\perp(SBD)$ nên góc nhị diện $[S,AB,C]$ là $\widehat{SBD}$, với $\tan\widehat{SBD}=\frac{SD}{BD}=\frac{h}{m}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SBD}=30^\circ$.

Chọn A.

Câu 20.

Phần O có 6 cách tô. Các phần A,B,C,D đều cạnh O nên tô bằng 5 màu còn lại, trong đó D cạnh A, A cạnh B, B cạnh C, C cạnh D.

Trường hợp A,C cùng màu: $5\cdot1\cdot4\cdot4=80$ cách.

Trường hợp A,C khác màu: $5\cdot4\cdot3\cdot3=180$ cách.

Số cách tô màu là $6\cdot(80+180)=1560$. Chọn B.

<u>PHẦN II</u>. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

a) Đúng. Điều kiện $\dfrac{x+46}{x+1}>0\Leftrightarrow x<-46$ hoặc $x>-1$.

b) Đúng. $f'(x)=1+\dfrac{\left(\dfrac{x+46}{x+1}\right)'}{\dfrac{x+46}{x+1}\ln 2}=1+\dfrac{-45}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x+1}{(x+46)\ln 2}=1-\dfrac{45}{(x+1)(x+46)\ln 2}$.

c) Sai. $f'(2)=1-\dfrac{45}{3\cdot48\ln 2}=1-\dfrac{5}{16\ln 2}\neq 0$ nên hàm số không đạt cực trị tại $x=2$.

d) Đúng. Với x, y nguyên dương thì $\log_2\dfrac{x+46}{x+1}=y-x$ là số nguyên.

Mà $\dfrac{x+46}{x+1}=1+\dfrac{45}{x+1}\in\left(1;\dfrac{47}{2}\right]$ nên $\dfrac{x+46}{x+1}=2^k$ với $k\in\{1;2;3;4\}$, suy ra $\dfrac{45}{x+1}\in\{1;3;7;15\}$.

Do $x+1$ là ước của 45 nên $x+1\in\{45;15;3\}$, tức $x\in\{44;14;2\}$. Ta được các điểm $A(2;6)$, $B(14;16)$, $C(44;45)$.

$AB=\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$, đường thẳng $AB:5x-6y+26=0$, $d(C,AB)=\dfrac{|5\cdot44-6\cdot45+26|}{\sqrt{61}}=\dfrac{24}{\sqrt{61}}$.

Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{61}\cdot\dfrac{24}{\sqrt{61}}=24$.

Câu 2.

a) Đúng. $AB=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$ nên tam giác ABC cân tại A.

b) Sai. Gọi G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, ta có $G\left(\dfrac{1}{3};1;\dfrac{2}{3}\right)$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{SC}\right|=6SG$ nhỏ nhất khi S là hình chiếu của G lên (Oxy), tức $S\left(\frac{1}{3};1;0\right)$. Vậy $a+b+c=\frac{4}{3}$.

c) Đúng. Gọi K là hình chiếu của A lên trục Oy thì $K(0;2;0)$, $AK=\sqrt{2}$. Tam giác AEF vuông cân tại A nên K là trung điểm EF và $EF=2AK=2\sqrt{2}$.

A, B, K cùng có tung độ bằng 2 nên mặt phẳng (ABK) vuông góc với Oy, suy ra $EF\perp(ABK)$.

$\overrightarrow{KA}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{KB}=(-1;0;3)$, $KA=\sqrt{2}$, $KB=\sqrt{10}$,

$\cos\widehat{AKB}=\frac{\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}}{KA\cdot KB}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin\widehat{AKB}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$S_{ABK}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=2$.

$V_{ABEF}=V_{E.ABK}+V_{F.ABK}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABK}\cdot EF=\frac{1}{3}\cdot2\cdot2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Sai. Ta có $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2\sqrt{6}$. Giả sử $A.BCD$ là hình chóp tam giác đều, gọi H là tâm tam giác đều BCD thì $AH\perp(BCD)$ và $HB=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}=AB$.

Suy ra $AH=\sqrt{AB^2-HB^2}=0$, tức $A\equiv H$ nằm trong mặt phẳng (BCD), vô lí. Vậy không tồn tại điểm D thỏa mãn.

Câu 3.

Cỡ mẫu $n=300$, giá trị đại diện các nhóm lần lượt là $12;16;20;24;28$.

a) Đúng. $\overline{x}=\frac{47\cdot12+78\cdot16+120\cdot20+45\cdot24+10\cdot28}{300}=\frac{5572}{300}=\frac{1393}{75}\approx18,57\geq18,5$.

b) Đúng. Nhóm chứa mốt là $[18;22)$: $M_o=18+\frac{120-78}{(120-78)+(120-45)}\cdot4=18+\frac{56}{39}=\frac{758}{39}$.

c) Sai. $\frac{n}{2}=150$ nên nhóm chứa trung vị là $[18;22)$: $M_e=18+\frac{150-125}{120}\cdot4=\frac{113}{6}\approx18,83>18,8$.

d) Sai. $\frac{n}{4}=75$ nên $Q_1=14+\frac{75-47}{78}\cdot4=\frac{602}{39}$; $\frac{3n}{4}=225$ nên $Q_3=18+\frac{225-125}{120}\cdot4=\frac{64}{3}$.

$\Delta_Q=\frac{64}{3}-\frac{602}{39}=\frac{230}{39}\approx5,9<6$.

Câu 4.

a) Đúng. $T_1(0) = 95 - 75 = 20\ \left(^\circ C\right)$.

b) Sai. Tại thời điểm tắt bếp $T_2(0) = 85 \Leftrightarrow 15 + A = 85 \Leftrightarrow A = 70$.

c) Đúng. $95 - 75e^{-t_1} = 85 \Leftrightarrow e^{-t_1} = \dfrac{2}{15} \Leftrightarrow t_1 = \ln\dfrac{15}{2} \approx 2$ (phút).

d) Sai. $15 + 70e^{-\frac{t_2}{20}} = 42 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_2}{20}} = \dfrac{27}{70} \Leftrightarrow t_2 = 20\ln\dfrac{70}{27}$.

Tổng thời gian là $\ln\dfrac{15}{2} + 20\ln\dfrac{70}{27} \approx 21$ (phút).

Câu 5.

Theo giả thiết $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Gọi O là trung điểm AD. Vì $AO \parallel BC$, $AO = BC = a$ nên $ABCO$ là hình bình hành, suy ra $OC = AB = a$; tương tự $OB = CD = a$. Do đó các tam giác OAB, OBC, OCD đều cạnh a.

$OA = OC = OD$ nên $AC \perp CD$, $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA} = 45^\circ$ nên $AA' = AC = a\sqrt{3}$.

a) Đúng. $AB \subset (ABCD)$, $B'C$ cắt $(ABCD)$ tại $C \notin AB$ nên AB và $B'C$ chéo nhau.

$AB \parallel OC \subset (B'CO)$ nên $AB \parallel (B'CO)$, mà $(B'CO)$ chứa $B'C$ nên $d(AB, B'C) = d(AB, (B'CO)) = d(B, (B'CO))$.

b) Sai. $A'C' \perp C'D'$ (vì $AC \perp CD$) và $A'C' \perp CC'$ nên $A'C' \perp (CDD'C')$, C' là hình chiếu của A' lên $(CDD'C')$.

Góc giữa $A'C$ và $(CDD'C')$ là $\widehat{A'CC'}$, không phải $\widehat{A'C'C}$ (góc này bằng 90°).

c) Đúng. $S_{ABCD} = 3S_{OAB} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$, $V = S_{ABCD} \cdot AA' = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{9a^3}{4}$.

d) Đúng. Gọi $E = AC \cap BO$ thì E là trung điểm AC; gọi M, N lần lượt là trung điểm CC', DD'.

$ACC'A'$ là hình vuông nên $AC' \perp A'C$, mà $EM \parallel AC'$ nên $EM \perp A'C$.

$CD \perp AC$, $CD \perp CC'$ nên $CD \perp (ACC'A')$, suy ra $OB \perp A'C$ (vì $OB \parallel CD$).

Do đó $(P) \equiv (OBM)$; lại có $MN \parallel CD \parallel OB$ nên $N \in (P)$. Thiết diện là $OBMN$.

Khối đa diện không chứa A là lăng trụ $ODN.BCM$ (các cạnh OB, DC, NM song song và bằng nhau, $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$).

$V_1 = S_{ODN} \cdot d\left((ADD'A'),(BCC'B')\right) = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Thể tích khối chứa A là $\dfrac{9a^3}{4} - \dfrac{3a^3}{8} = \dfrac{15a^3}{8}$, tỉ số cần tìm bằng $\dfrac{15a^3}{8} : \dfrac{9a^3}{4} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 6.

a) Đúng. $n(\Omega) = C_{19}^5 = 11628$.

b) Sai. $P = \dfrac{C_8^5}{C_{19}^5} = \dfrac{56}{11628} = \dfrac{14}{2907}$.

c) Sai. $P = 1 - \dfrac{C_{11}^5}{C_{19}^5} = 1 - \dfrac{462}{11628} = \dfrac{1861}{1938} \approx 0,96 > 0,94$.

d) Đúng. $x-y$, $y-z$, $z-x$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 2(y-z) = (x-y) + (z-x) \Leftrightarrow y = z$.

Với $x+y+z = 5$, $x, y, z \geq 1$ được $(x;y;z) \in \{(3;1;1);(1;2;2)\}$.

Số cách: $C_5^3 \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot C_6^2 \cdot C_8^2 = 480 + 2100 = 2580$. Xác suất $P = \dfrac{2580}{11628} = \dfrac{215}{969}$.

<u>PHẦN III</u>. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1.

Diện tích $S = \pi r^2$ nên $S'(t) = 2\pi r \cdot r'(t)$.

Khi $r = 25$, $r'(t) = 2$: $S'(t) = 2\pi \cdot 25 \cdot 2 = 100\pi \approx 314$ $\left(\text{m}^2/\text{h}\right)$.

Đáp số: 314.

Câu 2.

$n(\Omega) = 16!$. Tổng mỗi hàng, mỗi cột là số lẻ khi và chỉ khi mỗi hàng, mỗi cột chứa một số lẻ các số lẻ, tức 1 hoặc 3 số lẻ.

Có 8 số lẻ: nếu có k hàng chứa 3 số lẻ thì $3k + (4-k) = 8 \Leftrightarrow k = 2$. Vậy có 2 hàng chứa 3 số lẻ, 2 hàng chứa 1 số lẻ; tương tự với cột.

Chọn 2 hàng và 2 cột chứa 3 số lẻ: $C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$ cách.

Hai cột chứa 3 số lẻ có tổng cộng 6 số lẻ, trong khi hai hàng chứa 1 số lẻ chỉ có tổng cộng 2 số lẻ, nên ít nhất 4 số lẻ của hai cột đó nằm trên hai hàng chứa 3 số lẻ, tức là cả 4 ô giao của chúng đều là số lẻ.

Khi đó mỗi hàng chứa 3 số lẻ có thêm đúng 1 ô lẻ ở hai cột còn lại, hai ô này nằm ở hai cột khác nhau: 2 cách; tương tự, mỗi hàng chứa 1 số lẻ có ô lẻ nằm ở hai cột chứa 3 số lẻ, ở hai cột khác nhau: 2 cách.

Số cách chọn vị trí các số lẻ: $36 \cdot 2 \cdot 2 = 144$. Xếp 8 số lẻ và 8 số chẵn: $8! \cdot 8!$ cách.

$P = \dfrac{144 \cdot 8! \cdot 8!}{16!} = \dfrac{144}{C_{16}^{8}} = \dfrac{144}{12870} = \dfrac{8}{715}$. Phân số tối giản với mẫu dương nên $a = 8$, $b = 715$, suy ra $a - b = -707$.

Đáp số: -707.

Câu 3.

Điều kiện: $y > 0$, $x \neq 0$.

$\log_2 \dfrac{y}{2x^2} + y^2 = x^4 - 1 \Leftrightarrow \log_2 y + y^2 = \log_2 x^2 + \left(x^2\right)^2$. Hàm số $g(t) = \log_2 t + t^2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $y = x^2$.

Đặt $u = 2^{x^2 - 2x} > 0$, $v = 2^{4x - x^2} > 0$ thì $uv = 2^{2x}$, hệ thức trở thành $\dfrac{z}{4}(u+v) = \dfrac{z^2}{16} + uv \Leftrightarrow \left(u - \dfrac{z}{4}\right)\left(v - \dfrac{z}{4}\right) = 0$.

Cần $z > 0$. Đặt $m = \log_2 \dfrac{z}{4}$, ta được $x^2 - 2x = m$ (1) hoặc $-x^2 + 4x = m$ (2). Mỗi nghiệm $x \neq 0$ cho đúng một cặp $\left(x; x^2\right)$.

(1) và (2) có nghiệm chung khi $x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x = 0$ ($m = 0$) hoặc $x = 3$ ($m = 3$).

$m < -1$ hoặc $m > 4$: có 2 cặp. $m = -1$: (1) có $x = 1$, (2) có $x = 2 \pm \sqrt{5}$, được 3 cặp. $m = 4$: (1) có $x = 1 \pm \sqrt{5}$, (2) có $x = 2$, được 3 cặp.

$m = 0$: nghiệm $x \in \{0;2;4\}$, loại $x = 0$ còn 2 cặp. $m = 3$: nghiệm $x \in \{-1;1;3\}$, được 3 cặp.
$-1 < m < 4$ còn lại: có 4 cặp.

Vậy $m \in \{-1;3;4\}$, tức $z = 4 \cdot 2^m \in \{2;32;64\}$. Tổng các phần tử của S là $2 + 32 + 64 = 98$.

Đáp số: 98.

Câu 4.

Gọi X, Y là vị trí tiếp xúc của hai bánh xe với mặt đường tại thời điểm t giây ($0 \le t \le 10$).

Bánh xe thứ nhất đi $OA = 8$ m trong 10 giây nên $X(0,8t;0;0)$.

Bánh xe thứ hai đi $BC = 5$ m trong 10 giây theo hướng $\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$ nên $Y(0,3t;-3+0,4t;0)$.

$XY^2 = (0,5t)^2 + (3-0,4t)^2 = 0,41t^2 - 2,4t + 9$, nhỏ nhất tại $t = \dfrac{120}{41} \in [0;10]$.

$XY_{\min^2} = 9 - \dfrac{144}{41} = \dfrac{225}{41} \Rightarrow XY_{\min} = \dfrac{15}{\sqrt{41}} \approx 2,34$ (m).

Đáp số: $2,34$.

Câu 5.

Khi $x = 0$: $C(0) = \dfrac{k}{2} = 18 \Rightarrow k = 36$.

$f(x) = 5x + 10 \cdot \dfrac{36}{2x+2} = 5x + \dfrac{180}{x+1}$, $x \in [0;10]$.

$f'(x) = 5 - \dfrac{180}{(x+1)^2} = \dfrac{5(x-5)(x+7)}{(x+1)^2}$, nên $f'(x) < 0$ trên $(0;5)$ và $f'(x) > 0$ trên $(5;10)$.

Do f liên tục trên $[0;10]$ nên f nghịch biến trên $[0;5]$, đồng biến trên $[5;10]$, suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 5$.

Đáp số: 5.

Câu 6.

Chiều cao của khối đôn là $h = 2\sqrt{3}$ dm.

Dựng lăng trụ đứng $ABCDE.A_1B_1C_1D_1E_1$ có chiều cao h. Vì hình chiếu của A', B', C', D', E' lên $(ABCDE)$ lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EA nên A', B', C', D', E' lần lượt là trung điểm $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1A_1$.

Khối đôn nhận được khi cắt bỏ khỏi lăng trụ 5 khối tứ diện ở năm góc: $B.B_1A'B'$, $C.C_1B'C'$, $D.D_1C'D'$, $E.E_1D'E'$, $A.A_1E'A'$.

Xét khối tứ diện $B.B_1A'B'$ có đáy là tam giác $B_1A'B'$ với $B_1A' = B_1B' = 2$, $\widehat{A'B_1B'} = 108^\circ$ và chiều cao $BB_1 = h$, nên $V_{B.B_1A'B'} = \dfrac{1}{3}h \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sin 108^\circ = \dfrac{2}{3}h\sin 108^\circ$. Bốn khối còn lại có thể tích bằng khối này.

Gọi I là tâm ngũ giác đều $ABCDE$, $d(I, AB) = \dfrac{2}{\tan 36^\circ}$ nên

$S_{ABCDE} = 5S_{IAB} = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{2}{\tan 36^\circ} = \dfrac{20}{\tan 36^\circ}$.

$V = h \cdot S_{ABCDE} - 5 \cdot \dfrac{2}{3}h\sin 108^\circ = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{20}{\tan 36^\circ} - \dfrac{10}{3}\sin 108^\circ\right) \approx 84,38 \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Đáp số: 84.

---------- HẾT ----------