SỞ GD&ĐT NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
Năm học 2013 – 2014
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 15/3/2014
(Thời gian 150 phút không kể thời gian phát đề)
Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang

Câu 1 (6,0 điểm):

a) Rút gọn biểu thức: $M = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}$

b) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{x}\right)$

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{y}}=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}=2\end{cases}$

Câu 2 (3,0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình y = mx – 2 và parabol (P) có phương trình y = $\dfrac{-x^2}{4}$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm các giá trị của m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Câu 3 (2,0 điểm):

Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $0 \le a;b;c \le 2$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}\ge\dfrac{9}{4}$.

Câu 4 (6,0 điểm):

Cho đường tròn tâm O đường kính MN, dây cung AB vuông góc với MN tại điểm I nằm giữa O, N. Gọi K là một điểm thuộc dây AB nằm giữa A, I. Các tia MK, NK cắt đường tròn tâm O theo thứ tự tại C, D. Gọi E, F, H lần lượt là hình chiếu của C trên các đường thẳng AD, AB, BD. Chứng minh rằng:

a) AC.HF = AD.CF

b) F là trung điểm của EH

c) Hai đường thẳng DC và DI đối xứng với nhau qua đường thẳng DN.

Câu 5 (3,0 điểm):

Cho n và k là các số tự nhiên, $A = n^4 + 4^{2k+1}$.

a) Tìm k, n để A là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng:

+ Nếu n không chia hết cho 5 thì A chia hết cho 5.

+ Với p là ước nguyên tố lẻ của A ta luôn có p – 1 chia hết cho 4.

HẾT

Họ và tên thí sinh :..... Số báo danh .....

Họ và tên, chữ ký: Giám thị 1:.....

Giám thị 2:.....

thuvientoanhoc.com

SỞ GD&ĐT NINH BÌNH

HDC ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 THCS
Năm học 2013 – 2014
MÔN: TOÁN

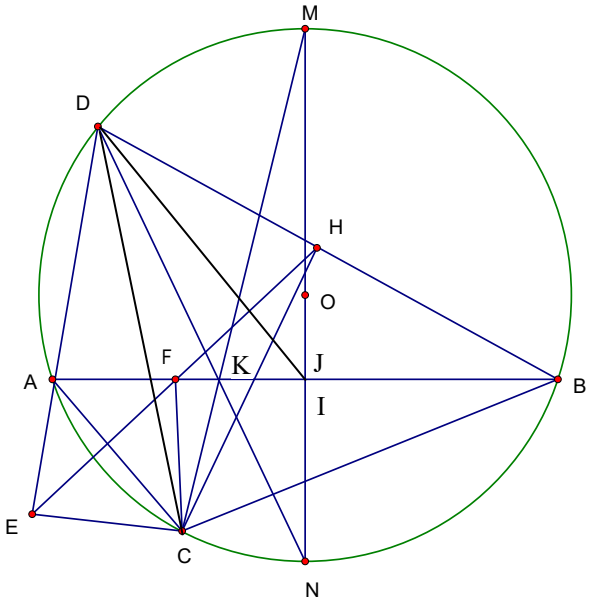
(hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (6 điểm)	**a.** (2 điểm)	
	Điều kiện: a;b > 0.	
	$M = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{4ab+a^2+b^2-2ab}{4ab}}$	0,5
	$= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{ab}} = \frac{\lvert a+b\rvert}{a+b}$	1
	Nếu a > 0, b > 0 thì M=1	
	Nếu a < 0, b < 0 thì M= –1	0,5
	b. (2 điểm)	
	Điều kiện xác định: $x \neq 0$	0,25
	Đặt $t = \frac{x}{3} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{1}{x^2} = t^2 + \frac{2}{3}$	0,5
	Phương trình đã cho trở thành: $3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$	0,5
	+ $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$	0,25
	+ $t = 2/3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$	0,25
	Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{3-\sqrt{21}}{2}; -1; 3\right\}$	0,25
	c. (2 điểm)	
	Điều kiện xác định: $x; y \geq \frac{1}{2}$	0,25
	Từ hệ suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ (2)	
	+ $x > y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{y}}$ và $\sqrt{2 - \frac{1}{y}} < \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$	
	$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} < \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \Rightarrow$ với $x > y \geq \frac{1}{2}$: (x; y) không là nghiệm của HPT	0,5

thuvientoanhoc.com

	+ $y > x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} > \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ $\Rightarrow$ với $x > y \geq \frac{1}{2}$:(x;y) không là nghiệm của HPT	0,5
	+ x = y: thay vào hệ ta giải được x = 1, y = 1	0,5
	Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.	0,25
2 **(3 điểm)**	Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình $mx - 2 = \frac{-x^2}{4} \quad (*)$ $(*) \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8 = 0$	0,5
	Ta có: $\Delta' = 4m^2 + 8 \Rightarrow \Delta' > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$	0,5
	Suy ra với mọi giá trị của m phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, tức là với mọi giá trị của m (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.	0,5
	Giả sử: $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), y_A = mx_A - 2, y_B = mx_B - 2$ Theo định lí Viét có $\begin{cases} x_A + x_B = -4m \\ x_A . x_B = -8 \end{cases}$	0,5
	Khi đó: $AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(x_A-x_B)^2+m^2(x_B-x_A)^2=(x_B-x_A)^2(1+m^2)$ $= \left[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B \right](1 + m^2) = \left[(-4m)^2 - 4.(-8) \right](1 + m^2)$ $= (16m^2 + 32)(1 + m^2)$ $\Rightarrow AB = \sqrt{(16m^2 + 32)(1 + m^2)} \geq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi m = 0.	0,5
	Vậy độ dài đoạn AB nhỏ nhất khi và chỉ khi m = 0	0,5
3 **(2 điểm)**	Sử dụng BĐT Cô-si với x > 0, y > 0, ta có: $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)(x + y)^2 \geq 2 . \frac{1}{xy} . 4xy = 8 .$ Suy ra: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x + y)^2}$ (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y.	0,5
	Do vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả sử a > b > c. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương a – b và b – c, ta có: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{8}{(a-b+b-c)^2} = \frac{8}{(a-c)^2} .$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a – b = b – c.	0,5
	Suy ra: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{8}{(a-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \frac{9}{(a-c)^2} .$	0,25
	Mặt khác, do a, c $\in$ [0; 2] và a > c nên $0 < a - c \leq 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = 2 và c = 0.	0,25
	Do đó: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{(a-c)^2} \geq \frac{9}{4} .$	0,25

thuvientoanhoc.com

	Đẳng thức xảy ra khi (a; b; c) = (2; 1; 0) và các hoán vị.	0,25
4 (6 điểm)		
	a. (3 điểm)	
	Từ giả thiết ta có các tứ giác CBHF nội tiếp. Theo tính chất của tứ giác nội tiếp và góc nội tiếp ta có : $\widehat{FCH} = \widehat{FBH} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ $\widehat{FHC} = \widehat{FBC} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ $\Rightarrow \Delta HFC \sim \Delta DAC(g.g)$ $\Rightarrow \frac{HF}{FC} = \frac{DA}{AC}$ (1) $\Rightarrow AC.HF = AD.CF$	1 0,5 0,5 0,5 0,25 0,25
	b. (2 điểm)	
	Các tứ giác AECF, CBHF, ADBC nội tiếp, suy ra: $\widehat{EFC} = \widehat{EAC} = \widehat{CBD} = 180^0 - \widehat{CFH} \Rightarrow \widehat{EFC} + \widehat{CFH} = 180^0$ Suy ra E, F, H thẳng hàng. Chứng minh tương tự ý a ta có $\Delta EFC \sim \Delta DBC(g.g) \Rightarrow \frac{EF}{FC} = \frac{DB}{BC}$ (2) Do đường kính MN vuông góc với dây AB nên N, M lần lượt là các điểm chính giữa của các cung AB. Suy ra DK là đường phân giác của ΔADB, CK là đường phân giác của ΔACB $\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{KA}{KB}$ và $\frac{CA}{CB} = \frac{KA}{KB} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{DA}{CA} = \frac{DB}{CB}$ (3) Từ(1), (2) và (3) suy ra $\frac{FE}{FC} = \frac{FH}{FC} \Rightarrow FE = FH$ Suy ra F là trung điểm của EH (đpcm)	0,5 0,25 0,25 0,5 0,25 0,25
	c. (1 điểm)	
	Lấy J trên đoạn AB sao cho DN là phân giác góc $\widehat{CDJ}$ ta có $\triangle ADC \sim \triangle JDB, \triangle ADJ \sim \triangle CDB$	0,25

thuvientoanhoc.com

	$\Rightarrow AC.BD = DC.BJ, AD.BC = DC.AJ$ Mà $\frac{DA}{CA} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow AD.BC = AC.BD \Rightarrow AJ=BJ$ $\Rightarrow$ J trùng với I $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh	0,25 0,25 0,25
5 **(3 điểm)**	a. (1,5 điểm)	
	+ Khi n = 0: A là hợp số + Khi n = 1 và k = 0, ta có A = 5 là số nguyên tố. + Khi $n \geq 1$ và $k \geq 1$, ta chứng minh M không là số nguyên tố: $A = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n.2^{k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})$ Ta có : $n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}$ là số nguyên lớn hơn 1 và $n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1}$ là số nguyên Mặt khác $n^2 + 2^{2k+1} \geq 2\sqrt{n^2.2^{2k+1}} \geq 2n.2^k\sqrt{2}$ $\Rightarrow n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1} \geq 2n.2^k\sqrt{2} - n.2^{k+1} = n.2^{k+1}(\sqrt{2}-1) > 1$ Suy ra M là hợp số. Kết luận: $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố khi và chỉ khi n =1 và k = 0.	0,25 0,5 0,5 0,25
	b. (1,5 điểm)	
	(n, 5) = 1 $\Rightarrow$ $n^4 - 1 \vdots 5$ mà $4^{2k+1} + 1 = 5(4^{2k} - 4^{2k-1} + ... + 1) \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$	0,25 0,25
	$A \vdots p \Leftrightarrow n^4 \equiv -4^{2k+1} (\text{mod}\, p)$ $\Rightarrow \left(n^4\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(-4^{2k+1}\right)^{\frac{p-1}{2}} (\text{mod}\, p)$ $\Rightarrow \left(n^2\right)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(2^{2k+1}\right)^{p-1} (\text{mod}\, p)$ Mà $\left(n^2\right)^{p-1} \equiv \left(2^{2k+1}\right)^{p-1} \equiv 1 (\text{mod}\, p)$ (Định lí Fermat nhỏ) $\Rightarrow 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\text{mod}\, p)$ $\Rightarrow \frac{p-1}{2} \vdots 2 \Rightarrow p - 1 \vdots 4$	0,25 0,25 0,25 0,25

----------Hết----------

thuvientoanhoc.com