SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: TOÁN
Ngày thi thứ nhất: 11/09/2025
*Thời gian làm bài: **180 phút**, không kể thời gian phát đề*
(Đề thi có 01 trang)

Bài 1: (5 điểm)

a. Với a, b, c là các số thực bất kỳ thỏa mãn $a \geq b \geq c > 0$, chứng minh

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

b. Với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ và các các số thực $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, chứng minh

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$

Bài 2: (5 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$(P(x))^2 = 2P(x^2 - 1) + 1.$$

Bài 3: (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M $(M \neq C)$ và N $(N \neq B)$.

a. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

b. Kẻ các đường cao BE, CF của tam giác ABC (E, F là chân các đường cao). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BEM cắt (O) tại điểm $P \neq B$, đường tròn ngoại tiếp tam giác CFN cắt (O) tại điểm $Q \neq C$; các điểm H và K lần lượt là trung điểm của EM và FN. Kẻ đường thẳng d qua H và song song với PE, đường thẳng d' qua K và song song với QF; gọi S là giao điểm của d và d'. Chứng minh đường thẳng AS vuông góc với đường thẳng AI.

Bài 4: (5 điểm) Cho một bàn cờ là một lưới ô vuông kích thước 7×8, trên mỗi ô vuông đều đang có một quân cờ. Hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh hoặc chung một đỉnh. Hỏi phải nhấc ra khỏi bàn cờ ít nhất bao nhiêu quân cờ, để trong các quân còn lại, không có 5 quân nào nằm trên 5 ô vuông kề nhau thẳng hàng theo hàng dọc, hàng ngang và hàng chéo?

——— HẾT ———

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

thuvientoanhoc.com

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....
Chữ ký của Giám thị 1:.....Chữ ký của Giám thị 2:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

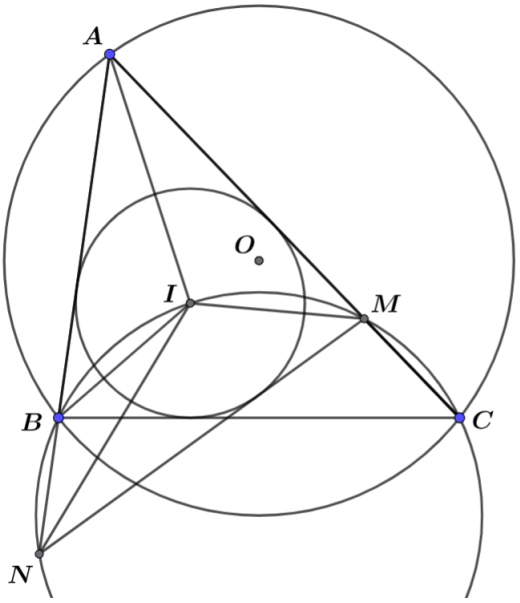
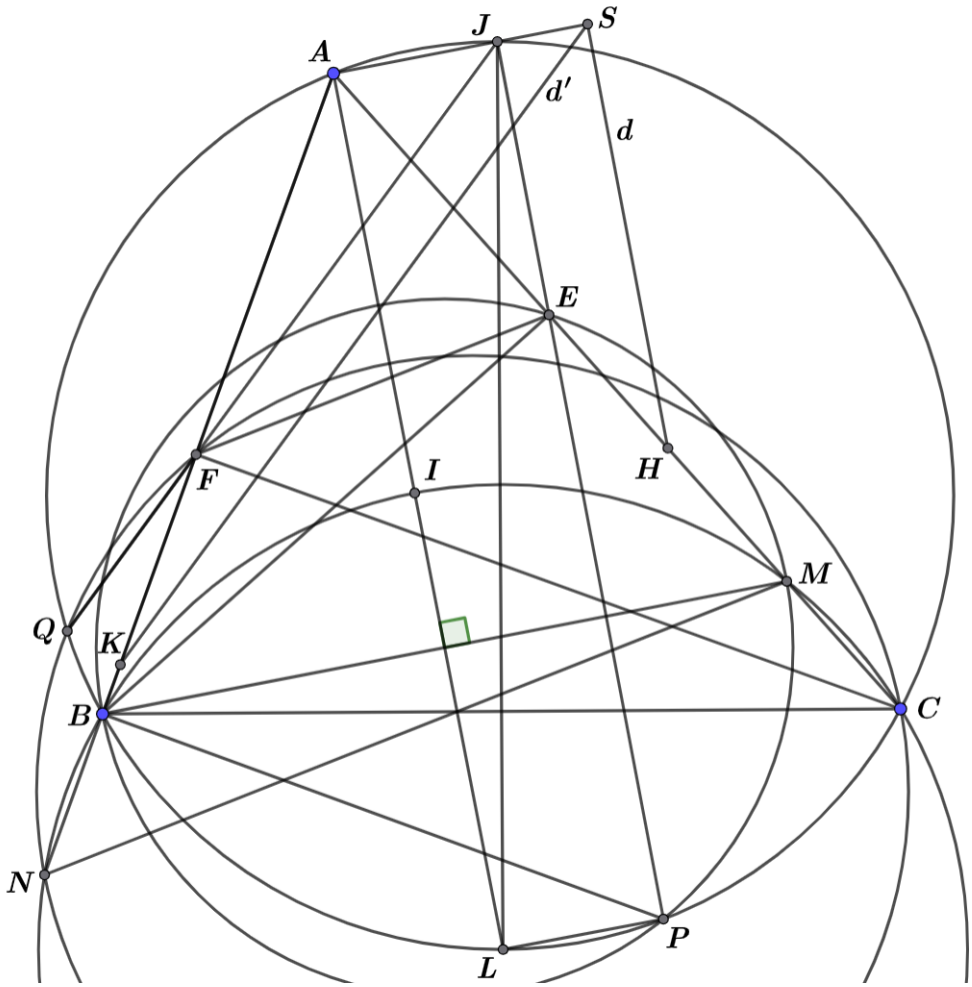
HƯỚNG DẪN CHẤM THI LẬP ĐỘI TUYỂN HSG CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: Toán
Ngày thi thứ nhất: 11/09/2025
(Hướng dẫn này có 06 trang)

Bài	***Sơ lược lời giải***	***Điểm***
1a (2đ)	*Với a, b, c là các số thực bất kỳ thỏa mãn $a \geq b \geq c > 0$, chứng minh* $$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$	
	Lời giải: biến đổi tương đương ta được: $a^2b + b^2c + c^2a \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$, suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $b = c$.	2
1b (3đ)	*Với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ và các các số thực $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, chứng minh* $$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$	
	Lời giải: Đặt $\frac{x_1}{x_2} = t_1, \frac{x_2}{x_3} = t_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = t_{n-1}$ thì $t_i \geq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $\frac{x_n}{x_1} = \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}}$, ta chứng minh: $$t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}} \leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_{n-1}} + t_1 t_2 \ldots t_{n-1}$$ $\Leftrightarrow f(t_1; t_2; \ldots; t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(t_i - \frac{1}{t_i}\right) + \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}} - t_1 t_2 \ldots t_{n-1} \leq 0.$ Coi $t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$ là tham số, f là hàm của t_1, ta có $$\begin{aligned} f'(t_1) &= 1 + \frac{1}{t_1^2} - t_2 t_3 \ldots t_{n-1} - \frac{1}{t_1^2 . t_2 t_3 \ldots t_{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} - M - \frac{1}{Mx^2} \quad (\text{với } x = t_1 \geq 1, M = t_2 t_3 \ldots t_{n-1} \geq 1) \\ &= (1-M) + \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{M}\right) \\ &= (1-M).\left(1 - \frac{1}{x^2 M}\right) \leq 0 \end{aligned}$$ suy ra $f(t_1; t_2; \ldots; t_{n-1})$ nghịch biến theo từng biến độc lập, nên $f(t_1; t_2; \ldots; t_{n-1}) \leq f(1; 1; \ldots; 1) = 0$, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.	3

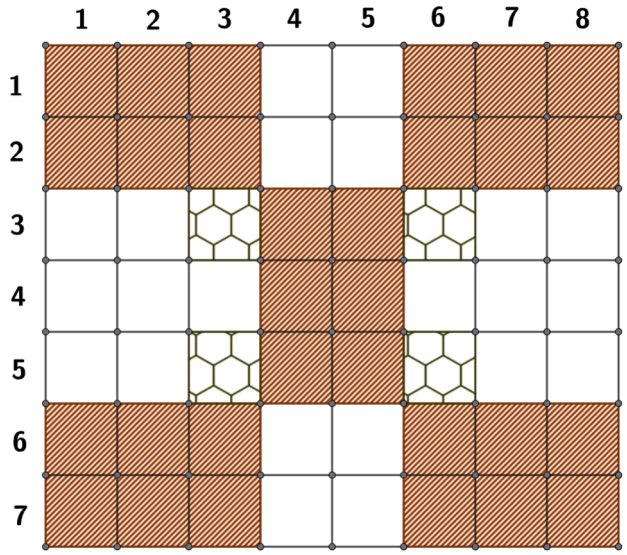
thuvientoanhoc.com

2 (5đ)	*Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:* $$(P(x))^2 = 2P(x^2-1)+1.$$	
	Lời giải: Nếu $P(x) \equiv c$, thì $c^2 = 2c+1 \Leftrightarrow c = 1 \pm \sqrt{2}$. Các đa thức $P(x) = 1 \pm \sqrt{2}$ thỏa mãn đề bài.	0.5
	Nếu $\deg P \geq 1$, đặt $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thì $a^2 - 1 = a$. Cho $x = a$, ta được $(P(a))^2 = 2P(a)+1 \Leftrightarrow P(a) = 1 \pm \sqrt{2}$.	1
	Nếu $P(a) = 1+\sqrt{2} = b$ thì $b^2 = 2b+1$, đặt $P(x) = (x-a)^n.Q(x)+b$ với $Q(x)$ là đa thức, $Q(a) \neq 0$. Thay vào đề bài ta được:	1
	$((x-a)^n.Q(x)+b)^2 = 2\left((x^2-1-a)^n.Q(x^2-1)+b\right)+1$ $\Leftrightarrow (x-a)^{2n}.(Q(x))^2 + 2b(x-a)^n.Q(x) + b^2 = 2(x^2-a^2)^n.Q(x^2-1)+2b+1$ $\Rightarrow (x-a)^n.(Q(x))^2 + 2b.Q(x) = 2(x+a)^n.Q(x^2-1)$	1
	Cho $x = a$ ta được $2b.Q(a) = 2.(2a)^n.Q(a^2-1) \Rightarrow b = (2a)^n$. Rõ ràng không tồn tại n để đẳng thức này xảy ra, mâu thuẫn, suy ra $P(x) \equiv b$. Trường hợp thứ hai $P(a) = 1-\sqrt{2}$ tương tự. Vậy chỉ có $P(x) = 1+\sqrt{2}$ và $P(x) = 1-\sqrt{2}$ là hai đa thức thỏa mãn đề bài.	1.5
3 (5đ)	*Cho tam giác ABC nhọn, không cân, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M $(M \neq C)$ và N $(N \neq B)$.* a. *Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).* b. *Kẻ các đường cao BE, CF của tam giác ABC (E, F là chân các đường cao). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BEM cắt (O) tại điểm $P \neq B$, đường tròn ngoại tiếp tam giác CFN cắt (O) tại điểm $Q \neq C$. Các điểm H và K lần lượt là trung điểm của EM và FN. Kẻ đường thẳng d qua H và song song với PE, đường thẳng d' qua K và song song với QF. Gọi S là giao điểm của d và d'. Chứng minh đường thẳng AS vuông góc với đường thẳng AI.*	

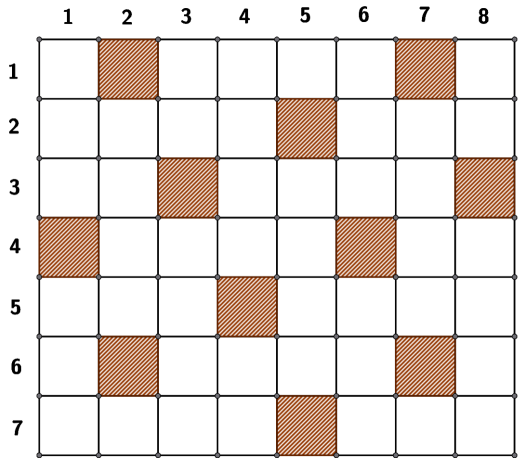
thuvientoanhoc.com

3a (1.5đ)		
	Do tứ giác $IBCM$ nội tiếp nên $\widehat{IBA} = \widehat{IMA}$, suy ra hai tam giác ABI và AMI bằng nhau, nên $IM = IB$, từ đó suy ra NI là phân giác $\widehat{ANM}$, suy ra (I) là đường tròn nội tiếp tam giác AMN, nên MN là tiếp tuyến của (I).	1.5
3b (3.5đ)		

thuvientoanhoc.com

	Gọi L là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O), bằng cách cộng góc, chẳng hạn theo thế hình trên thì $\widehat{LPE} = \widehat{LPB} + \widehat{BPE} = \widehat{LAB} + \widehat{BME} = 90^o$, suy ra PE đi qua điểm chính giữa J của cung lớn BC của (O). Tương tự, QF cũng đi qua J.	1
	Gọi S_1 là giao điểm của d và AJ thì $\dfrac{AJ}{AS_1} = \dfrac{AE}{AH}$. Tương tự, gọi S_2 là giao điểm của d' và AJ thì $\dfrac{AJ}{AS_2} = \dfrac{AF}{AK}$.	1
	Mặt khác, chứng minh được $EF \parallel MN$ nên $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AF}{AK}$ suy ra S_1 trùng S_2.	1
	Từ đó S thuộc AJ nên AS vuông góc với AI.	0.5
4 (5đ)	*Cho một bàn cờ là một lưới ô vuông kích thước 7×8, trên mỗi ô vuông đều đang có một quân cờ. Hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh hoặc chung một đỉnh. Hỏi phải nhấc ra khỏi bàn cờ ít nhất bao nhiêu quân cờ, để trong các quân còn lại, không có 5 quân nào nằm trên 5 ô vuông kề nhau thẳng hàng theo hàng dọc, hàng ngang và hàng chéo?*	
	Lời giải:  Ta sẽ chứng minh số quân cờ tối thiểu cần nhấc ra là 11 quân. Thật vậy, đầu tiên ta sẽ chứng minh nếu chỉ nhấc ra 10 quân, thì không thể làm cho bàn cờ hết 5 quân liền nhau thẳng hàng. Ta ký hiệu ô $(i; j)$ là ô ở hàng i, cột j, với $1 \le i \le 7; 1 \le j \le 8$ như hình vẽ; và ta cần nhấc ra 10 quân sao cho không còn 5 quân nào liền nhau thẳng hàng.	

thuvientoanhoc.com

	Ở 5 ô đầu tiên từ trái sang của mỗi hàng, ta phải nhấc ra ít nhất mỗi hàng 1 quân. Ở 3 cột $6, 7, 8$: ở 5 ô từ trên xuống của mỗi cột, ta phải nhấc ra ít nhất 1 quân. Như vậy ta đã nhấc hết 10 quân, và ô chữ nhật 2×3 ở góc dưới bên phải không được nhấc ra quân nào. Do tính đối xứng, nên 4 hình chữ nhật được tô đậm ở 4 góc trong hình, ta không được nhấc quân nào.	1
	Sau khi chắc chắn không nhấc các quân ở 4 góc như ý trên, ta làm lại: ở các hàng $1, 2, 6, 7$: 2 ô giữa của mỗi hàng ta phải nhấc ra ít nhất 1 quân. Ở các cột $1, 2, 3, 6, 7, 8$: 3 ô giữa của mỗi cột ta phải nhấc ra ít nhất 1 quân, tất cả đã là 10 quân; nên ô chữ nhật kích cỡ 3×2 ở giữa, ta không nhấc quân nào. Như vậy 5 khu vực tô đậm trên hình, ta không được nhấc quân nào.	1
	Tiếp tục làm lại: bây giờ, ta phải nhấc ít nhất 1 quân từ 2 ô giữa của mỗi hàng $1, 2, 6, 7$ và ít nhất 1 quân từ 3 ô giữa của mỗi cột $1, 2, 7, 8$. Như vậy ta đã nhấc ít nhất 8 quân, nên ở 2 cột 3 và 6, ta chỉ còn được nhấc nhiều nhất 2 quân. Tuy nhiên các ô $(3;3), (3;6), (5;3)$ và $(5;6)$ (được ký hiệu lục giác trên hình) cần phải nhấc hết để không có đường chéo: ví dụ ô $(3;3)$ nếu để lại thì có một đường chéo từ $(1;1)$ tới $(5;5)$, vì thế chỉ nhấc tối đa 2 quân ở cột 3 và cột 6 là không đủ. Tóm lại chỉ nhấc 10 quân thì vẫn còn 5 quân liền nhau thẳng hàng.	1
	Với 11 quân được nhấc ra ở ô được tô đậm trong hình dưới, thì sau khi nhấc, trên bàn cờ không còn 5 quân nào liền nhau thẳng hàng ngang, dọc hoặc chéo:  Như vậy đáp số là 11 quân.	**2đ**

thuvientoanhoc.com

Hướng dẫn khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.

2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới $0,25$ điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.

3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong cả tổ chấm và ghi vào biên bản.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: TOÁN
Ngày thi thứ hai: 12/09/2025
*Thời gian làm bài: **180 phút**, không kể thời gian phát đề*
(Đề thi có 01 trang)

Bài 1: (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 4, u_2 = 14; \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

a. Chứng minh $\frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n} < 14, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Đặt $s_n = \frac{1}{u_1 u_3} + \frac{1}{u_3 u_5} + \ldots + \frac{1}{u_{2n+1} u_{2n+3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Chứng minh dãy (s_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Bài 2: (5 điểm) Tìm tất cả các hàm liên tục $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, thỏa mãn:

$$\begin{cases} 3f(x) - 2g(x) = -5x, \forall x \in \mathbb{R}; \\ 2f(x) - 3g(x) = -5f(5x-2), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài 3: (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng OA cắt cung nhỏ EF của (I) tại điểm M. Các điểm J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn DF, DE. Các đường thẳng MJ, MK lần lượt cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai P, Q. Các đường thẳng BP, CQ cắt nhau tại S. Các điểm B', C' lần lượt đối xứng với B, C qua O và M' đối xứng với M qua A. Đường thẳng qua M', song song với BC cắt các đường thẳng AC', AB' tại C_1, B_1. Chứng minh các đường thẳng AS, BC_1, CB_1 đồng quy.

Bài 4: (5 điểm) Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, ký hiệu $f(n)$ là tổng tất cả các số dư khi chia n cho các số nguyên dương từ 1 đến $n-1$. Ví dụ $f(6) = 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 3$.

a. Chứng minh với mọi số nguyên dương $n > 1$ thì $f(n) \geq \frac{n^2 - 2n}{8}$.

b. Biết rằng số nguyên dương $n > 2$ thỏa mãn $f(n) - f(n-1) > n - \sqrt{n} - 1$. Chứng minh n là số nguyên tố.

——— HẾT ———

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....
Chữ ký của Giám thị 1:.....Chữ ký của Giám thị 2:.....

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

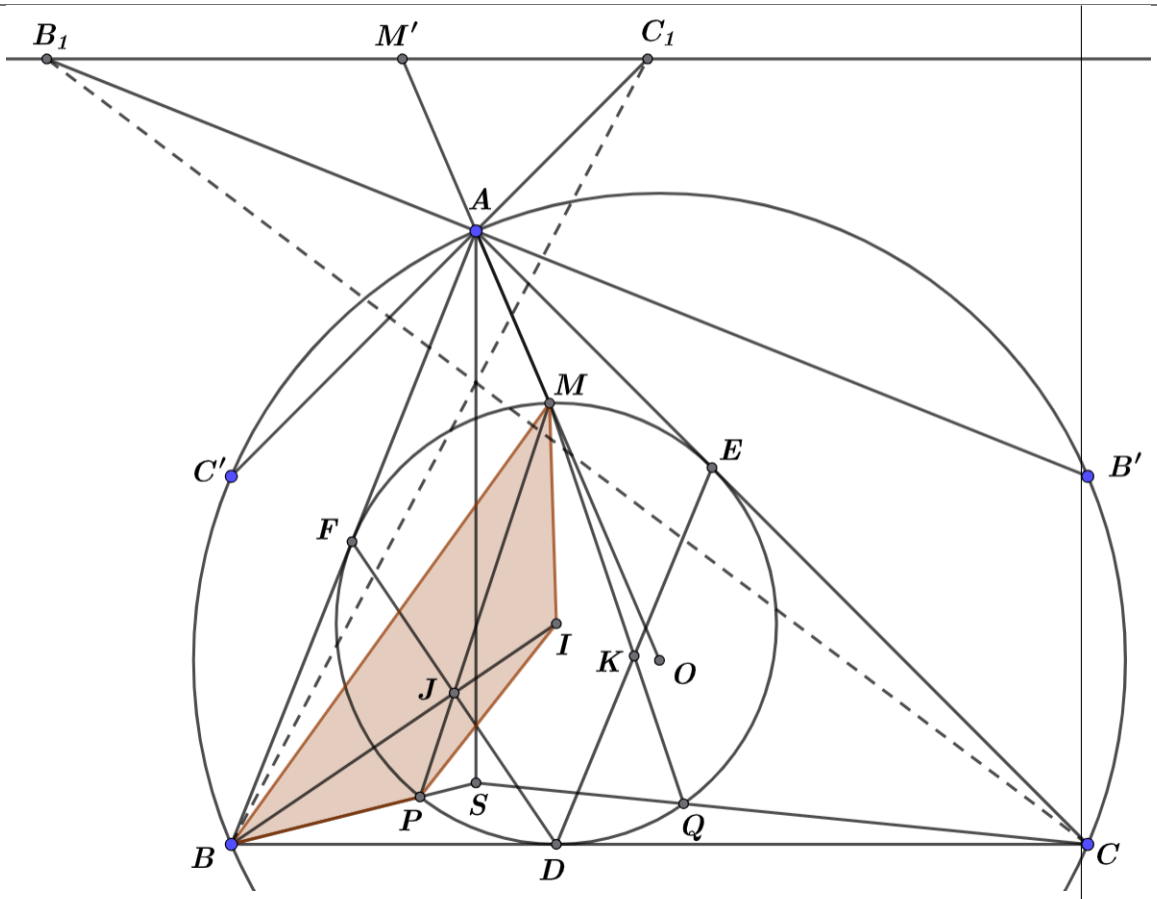
HƯỚNG DẪN CHẤM THI LẬP ĐỘI TUYỂN HSG CỦA TỈNH
DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: Toán
Ngày thi thứ hai: 12/09/2025
(Hướng dẫn này có 05 trang)

Bài	***Sơ lược lời giải***	***Điểm***
1 (5đ)	*Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi:* $\begin{cases} u_1 = 4, u_2 = 14; \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$ *a. Chứng minh* $\frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n} < 14, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *b. Đặt* $s_n = \frac{1}{u_1 u_3} + \frac{1}{u_3 u_5} + \ldots + \frac{1}{u_{2n+1} u_{2n+3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Chứng minh dãy* (s_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*	
	Lời giải: a. Từ công thức truy hồi ở đề bài, suy ra $u_n = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, với $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$.	1
	Khi đó, với mọi n, ta có $\frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k + b^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a}{4}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{4}\right)^k < \frac{\frac{a}{4}}{1 - \frac{a}{4}} + \frac{\frac{b}{4}}{1 - \frac{b}{4}} = 14.$	1
	b. Ta có $\frac{1}{u_k . u_{k+2}} = \frac{u_{k+2} + u_k}{4 u_k . u_{k+1} . u_{k+2}} = \frac{1}{4} . \left(\frac{1}{u_k u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+1} u_{k+2}}\right)$ nên $s_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \ldots + \frac{1}{u_{2n+2} u_{2n+3}}\right), \forall n.$	1
	Mặt khác, quy nạp được $u_{n+2} . u_n - u_{n+1}^2 = 12, \forall n$ nên $\frac{u_{n+2} u_n - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{12}{u_n u_{n+1}}$ suy ra $\frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{12}\left(\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right), \forall n$ nên $s_n = \frac{1}{48}\left(\frac{u_{2n+4}}{u_{2n+3}} - \frac{u_2}{u_1}\right), \forall n.$	1
	Do đó $\lim s_n = \frac{1}{48} \lim \left(\frac{a^{2n+4} + b^{2n+4}}{a^{2n+3} + b^{2n+3}} - \frac{14}{4}\right) = \frac{1}{48} . \left(2 + \sqrt{3} - \frac{7}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{96}.$ (Nếu ý b chỉ chứng minh được hội tụ, không tính được giới hạn thì cho 2đ).	1
2 (5đ)	*Tìm tất cả các hàm liên tục* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *thỏa mãn:* $\begin{cases} 3f(x) - 2g(x) = -5x, \forall x \in \mathbb{R}; \\ 2f(x) - 3g(x) = -5f(5x - 2), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$	
	Lời giải: rút $g(x)$ từ đẳng thức thứ nhất, thay vào đẳng thức thứ hai, ta được $2f(x) - 3.\frac{3f(x) + 5x}{2} = -5f(5x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x) + 3x = 2f(5x - 2), \forall x \in \mathbb{R}.$	1

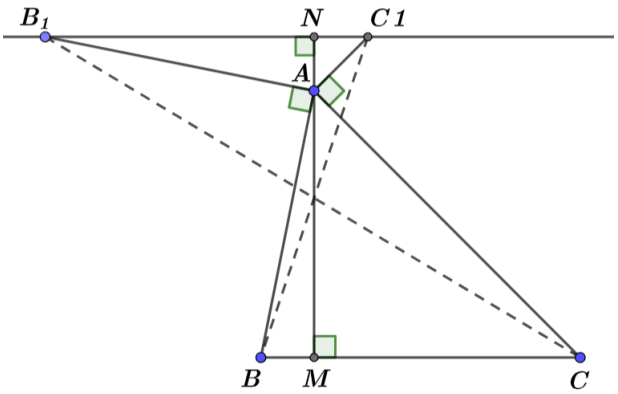
thuvientoanhoc.com

	Đặt $f(x) = h(x) + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$, ta được $h(x) + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} + 3x = 2h(5x-2) + \frac{2}{3}(5x-2) + \frac{8}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \quad h(x) = 2h(5x-2), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \quad h(x) = \frac{1}{2}h\left(\frac{x+2}{5}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$	1
	Xét dãy (u_n) : $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{5}, \forall n$, với u_0 bất kỳ: chứng minh được $\lim u_n = \frac{1}{2}, \forall u_0 \in \mathbb{R}$.	1
	Ta có: $h(u_0) = \frac{1}{2}h(u_1) = \frac{1}{2^2}h(u_2) = \ldots = \frac{1}{2^n}h(u_n), \forall n$. Do f, g liên tục nên h liên tục, cho $n \longrightarrow +\infty$, cùng với $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$ suy ra $h(u_0) = \frac{1}{2^n}h(u_n) \longrightarrow 0, \forall u_0 \in \mathbb{R}$, từ đó ta có $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.	1
	Kết luận: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}; g(x) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.	1
3 (5đ)	*Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng OA cắt cung nhỏ EF của (I) tại điểm M. Các điểm J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn DF, DE. Các đường thẳng MJ, MK lần lượt cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai P, Q. Các đường thẳng BP, CQ cắt nhau tại S. Các điểm B', C' lần lượt đối xứng với B, C qua O và M' đối xứng với M qua A. Đường thẳng qua M', song song với BC cắt các đường thẳng AC', AB' tại C_1, B_1. Chứng minh các đường thẳng AS, BC_1, CB_1 đồng quy.*	
	Lời giải: Trước hết ta chứng minh $AS \perp BC$. Thật vậy: $JM.JP = JD.JF = JI.JB$ nên $IMBP$ là tứ giác nội tiếp; mà $IM = IP$ nên $\widehat{IBM} = \widehat{IBP}$ suy ra BM và BP là các đường đẳng giác góc B. Tương tự, CM, CQ là các đường đẳng giác góc C, suy ra AM, AS là các đường đẳng giác góc A, từ đó S nằm trên đường cao đỉnh A của tam giác ABC.	3

thuvientoanhoc.com



Tiếp theo, ta chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn, dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác BAB_1 vuông tại A và CAC_1 vuông tại A sao cho B_1C_1 song song với BC. Khi đó giao điểm của BC_1 và CB_1 nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với BC. | 1.5



Chứng minh: Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC tại M và cắt B_1C_1 tại N.

Ta có $\Delta ABM \sim \Delta B_1AN$ và $\Delta ACM \sim \Delta C_1AN$ nên
$\dfrac{AM}{B_1N} = \dfrac{BM}{AN}$ và $\dfrac{AM}{C_1N} = \dfrac{CM}{AN}$ suy ra $B_1N.BM = C_1N.CM = AM.AN$, từ đó $\dfrac{NB_1}{MC} = \dfrac{NC_1}{MB}$.
Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của BC_1 và CB_1 với AM, áp dụng Thales ta có ngay $I_1 \equiv I_2$, bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề suy ra đpcm. | 0.5

thuvientoanhoc.com

4 (5đ)	*Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, ký hiệu $f(n)$ là tổng tất cả các số dư khi chia n cho các số nguyên dương từ 1 đến $n-1$. Ví dụ $f(6) = 0+0+0+2+1 = 3$.* a. *Chứng minh với mọi số nguyên dương $n > 1$ thì $f(n) \geq \dfrac{n^2-2n}{8}$.* b. *Biết rằng số nguyên dương $n > 2$ thỏa mãn $f(n)-f(n-1) > n-\sqrt{n}-1$. Chứng minh n là số nguyên tố.*	
	Lời giải: a. Ta có $f(2) = 0; f(3) = 0+1 = 1; f(4) = 0+0+1 = 1; f(5) = 0+1+2+1 = 4$ đều thỏa mãn. Ta chỉ cần tính tới các số dư khi chia n cho các số ở nửa sau của dãy $1; 2; \ldots; n-1$, ta có ngay: Nếu n là số chẵn ≥ 6 thì $f(n) \geq 1+2+\ldots+\left(\dfrac{n}{2}-1\right) = \dfrac{n^2-2n}{8}$. Nếu n là số lẻ ≥ 5 thì $f(n) \geq 1+2+\ldots+\dfrac{n-1}{2} = \dfrac{n^2-1}{8} > \dfrac{n^2-2n}{8}$.	1.5
	b. Ký hiệu: $n \bmod k$ là số dư khi chia n cho k với $1 \leq k \leq n-1$. Ta có nhận xét sau đây: • Nếu $n \not\vdots k$ thì $n \bmod k - (n-1) \bmod k = 1$. • Nếu $n \vdots k$ thì $n \bmod k - (n-1) \bmod k = 0 - (k-1) = -(k-1)$.	1
	Do đó $f(n) - f(n-1)$ $= \left(\sum\limits_{k \nmid n} n \bmod k - \sum\limits_{k \nmid n} (n-1) \bmod k\right) + \left(\sum\limits_{k \mid n} n \bmod k - \sum\limits_{k \mid n} (n-1) \bmod k\right)$ $= \sum\limits_{k \nmid n} 1 - \sum\limits_{k \mid n} (k-1)$ $= \left(\sum\limits_{k \nmid n} 1 + \sum\limits_{k \mid n} 1\right) - \sum\limits_{k \mid n} k$ $= n - 1 - (\sigma(n) - n)$ $= 2n - 1 - \sigma(n)$ và từ giả thiết $f(n)-f(n-1) > n-\sqrt{n}-1$ suy ra $2n-1-\sigma(n) > n-\sqrt{n}-1$ $\Leftrightarrow \sigma(n) < n+\sqrt{n}$; với $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của số nguyên dương n.	1.5
	Giả sử n là hợp số, thì n có một ước là d với $1 < d < n$ thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là một ước của n, với $1 < \dfrac{n}{d} < n$. + Nếu $d = \dfrac{n}{d}$ thì $\sigma(n) \geq n+d+1 = n+\sqrt{n}+1$, + Nếu $d \neq \dfrac{n}{d}$ thì $\sigma(n) \geq n+d+\dfrac{n}{d}+1 \geq n+2\sqrt{n}+1$ cả hai đều mâu thuẫn với $\sigma(n) < n+\sqrt{n}$. Vậy giả sử là sai, n là số nguyên tố, đpcm.	1

thuvientoanhoc.com

Hướng dẫn khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.

2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới $0,25$ điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.

3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong cả tổ chấm và ghi vào biên bản.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH

thuvientoanhoc.com