TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2015 – LẦN 2
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Câu 2 (1,0 *điểm*).

a) Biết rằng số thực α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha + 2\sin^3\alpha}$.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và $z + \dfrac{2}{1+i}$ là số thực.

Câu 3 (0,5 *điểm*). Giải bất phương trình $8^x.2^{1-x^2} > \left(\sqrt{2}\right)^{2x}$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $\sqrt{4-x^2} + 2\sqrt[3]{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = (x-1)^2 + 1 - |x|$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\ln(3x+1)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 1$.

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a,\ AC = a,\ AA' = \dfrac{a\sqrt{10}}{2},\ \widehat{BAC} = 120^0$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a và tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ACC'A')$.

Câu 7 (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;-2)$, điểm $E(10;\ 6)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A và điểm $F(9;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết B có tung độ bé hơn 2.

Câu 8 (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;\ 1;\ 0)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) qua M và chứa Δ. Tìm tọa độ điểm N thuộc Δ sao cho $MN = \sqrt{11}$.

Câu 9 (0,5 *điểm*). Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5, có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp đó. Tính xác xuất để hai viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Câu 10 (1,0 *điểm*). Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+x^2} + \frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1).$$

---------- Hết ----------

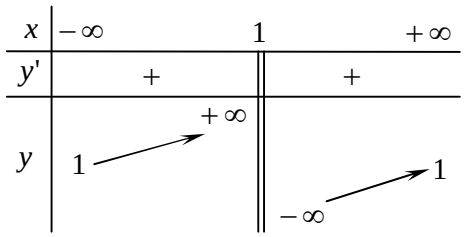
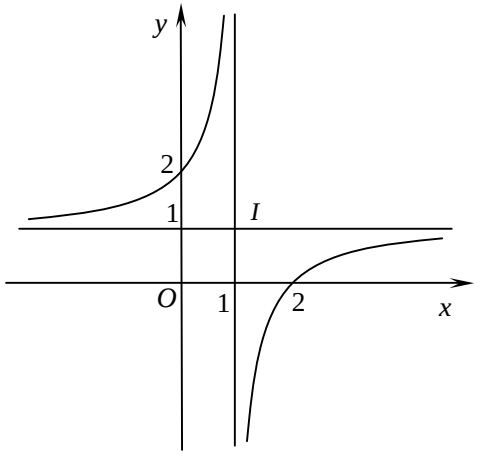
Ghi chú: *1. BTC sẽ trả bài vào các ngày 25, 26/4/2015. Để nhận được bài thi, thí sinh phải nộp lại phiếu dự thi cho BTC.*

2. Thi thử THPT Quốc gia lần 3 sẽ được tổ chức vào chiều ngày 16 và ngày 17/5/2015. Đăng ký dự thi tại Văn phòng Trường THPT Chuyên từ ngày 25/4/2015.

thuvientoanhoc.com

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

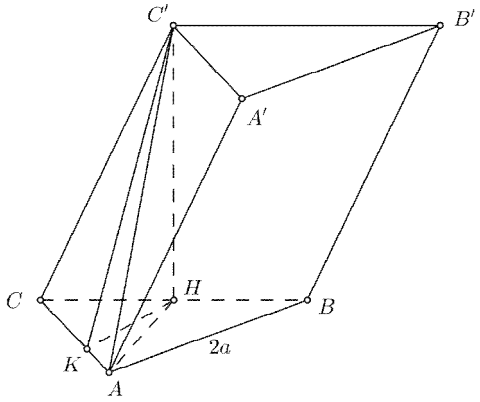
ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2015 – LẦN 2
Môn: TOÁN; ***Thời gian làm bài: 180 phút***

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1. (2,0 điểm)	**a)** ***(1,0 điểm)***	
	1^o. Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. 2^o. Sự biến thiên: * Giới hạn, tiệm cận: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty$. Do đó đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (*H*). Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (*H*). * Chiều biến thiên: Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0,$ với mọi $x\neq 1.$ Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$.	**0,5**
	* Bảng biến thiên:  3^o. Đồ thị: Đồ thị (*H*) cắt *Ox* tại $(2;0)$, cắt *Oy* tại $(0;2)$; nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.  	**0,5**
	b) ***(1,0 điểm)***	
	Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2},$ với mọi $x\neq 1.$ Vì tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$ nên hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{(x-1)^2}=1,$ hay $(x-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$	**0,5**
	*) Với $x=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $y=x+2.$ *) Với $x=2$ ta có phương trình tiếp tuyến $y=x-2.$ Vậy có hai tiếp tuyến là $y=x+2$ và $y=x-2.$	**0,5**
Câu 2. (1,0	**a)** ***(0,5 điểm)***	
	Rõ ràng $\cos\alpha\neq 0,$ chia cả tử số và mẫu số của *A* cho $\cos^3\alpha$ ta được	**0,5**

thuvientoanhoc.com

điểm)	$A=\dfrac{\tan\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)+2}{1+\tan^2\alpha+2\tan^3\alpha}=\dfrac{2.5+2}{5+16}=\dfrac{4}{7}.$	
	b) ***(0,5 điểm)***	
	Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $z+\dfrac{2}{1+i}=a+bi+\dfrac{2(1-i)}{2}=a+1+(b-1)i.$ Từ giả thiết $z+\dfrac{2}{1+i}$ là số thực ta có $b=1.$ Khi đó $\lvert z\rvert=2\Leftrightarrow\lvert a+i\rvert=2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+1}=2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}.$ Vậy số phức cần tìm là $z=\sqrt{3}+i$ và $z=-\sqrt{3}+i.$	**0,5**
Câu 3. (0,5 điểm)	Bất phương trình đã cho tương đương với $2^{3x}.2^{1-x^2}>2^x\Leftrightarrow 2^{3x+1-x^2}>2^x\Leftrightarrow 3x+1-x^2>x$ $\Leftrightarrow x^2-2x-1<0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$	**0,5**
Câu 4. (1,0 điểm)	*) Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$ Phương trình đã cho tương đương với $\lvert x\rvert+\sqrt{4-x^2}=x^2-2x-2\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}+2.$ (1) Ta có $\left(\lvert x\rvert+\sqrt{4-x^2}\right)^2=4+2\lvert x\rvert\sqrt{4-x^2}\ge 4$, với mọi $x\in[-2;2].$ Suy ra $\lvert x\rvert+\sqrt{4-x^2}\ge 2,$ với mọi $x\in[-2;2].$ (2) Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=0, x=\pm 2.$ Đặt $\sqrt[3]{x^2-2x}=t$. Dễ dàng có được $t\in[-1;2]$, với mọi $x\in[-2;2].$ Khi đó vế phải của (1) chính là $f(t)=t^3-2t^2+2,\ t\in[-1;\ 2].$	**0,5**
	Ta có $f'(t)=3t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$ Hơn nữa, ta lại có $f(-1)=-1,\ f(0)=2,\ f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{22}{27},\ f(2)=2.$ Suy ra $f(t)\le 2,$ với mọi $t\in[-1;2].$ Do đó $x^2-2x-2\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}+2\le 2$, với mọi $x\in[-2;2].$ (3) Dấu đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $x=0, x=\pm 2.$ Từ (2) và (3) ta có nghiệm của phương trình (1) là $x=0, x=\pm 2.$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0,\ x=\pm 2.$	**0,5**
Câu 5. (1,0 điểm)	Chú ý rằng $x\ln(3x+1)\ge 0,$ với mọi $0\le x\le 1.$ Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^1 x\ln(3x+1)\,\mathrm{d}x.$ Đặt $u=\ln(3x+1),\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x.$ Suy ra $\mathrm{d}u=\dfrac{3}{3x+1}\mathrm{d}x,\ v=\dfrac{1}{2}x^2.$	**0,5**
	Theo công thức tích phân từng phần ta có $S=\dfrac{1}{2}x^2\ln(3x+1)\Big\rvert_0^1-\dfrac{3}{2}\int_0^1\dfrac{x^2}{3x+1}\mathrm{d}x=\ln 2-\dfrac{1}{6}\int_0^1\left(3x-1+\dfrac{1}{3x+1}\right)\mathrm{d}x$	**0,5**

thuvientoanhoc.com

	$= \ln 2 - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\ln\left\|3x+1\right\|\right)\Big\|_0^1 = \frac{8}{9}\ln 2 - \frac{1}{12}.$	
Câu 6. (1,0 điểm)	 Gọi H là trung điểm BC. Từ giả thiết suy ra $C'H \perp (ABC)$. Trong ΔABC ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB\cos 120^0 = 7a^2$ $\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ $\Rightarrow C'H = \sqrt{C'C^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$ Suy ra thể tích lăng trụ $V = C'H.S_{ABC} = \frac{3a^3}{4}.$	**0,5**
	Hạ $HK \perp AC$. Vì $C'H \perp (ABC) \Rightarrow$ đường xiên $C'K \perp AC$ $\Rightarrow \left((ABC), (ACC'A')\right) = \widehat{C'KH}$ (1) ($\Delta C'HK$ vuông tại H nên $\widehat{C'KH} < 90^0$). Trong ΔHAC ta có $HK = \frac{2S_{HAC}}{AC} = \frac{S_{ABC}}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \tan\widehat{C'KH} = \frac{C'H}{HK} = 1 \Rightarrow \widehat{C'KH} = 45^0.$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\left((ABC), (ACC'A')\right) = 45^0.$ ***Ghi chú*:** Thí sinh có thể tính độ dài AH và suy ra ΔAHC vuông tại A để suy ra $K \equiv A$.	**0,5**
Câu 7. (1,0 điểm)	Gọi M là trung điểm BC. Phương trình GE hay AM là $4x - 7y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = 2 + 4t. \end{cases}$ Gọi $M(3+7m; 2+4m)$. Ta có $\overrightarrow{IM} = (7m+2; 4m+4); \overrightarrow{FM} = (7m-6; 4m+3).$ Vì $IM \perp FM$ nên $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{FM} = 0$ $\Leftrightarrow (7m+2)(7m-6) + (4m+4)(4m+3) = 0$ $\Leftrightarrow m = 0.$ Suy ra $M(3;2)$.	**0,5**

thuvientoanhoc.com

	Giả sử $A(3+7a;2+4a)$. Vì $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$ ta được $a=-1$. Suy ra $A(-4;-2)$. Suy ra phương trình $BC: x+2y-7=0 \Rightarrow B(-2b+7;\, b)\in BC$ (điều kiện $b<2$). Vì $IB=IA$ nên $(-2b+6)^2+(b+2)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=3\ (ktm)\end{array}\right.$ Suy ra $B(5;1)\Rightarrow C(1;3)$ (vì M là trung điểm BC).	**0,5**
Câu 8. (1,0 điểm)	Δ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;2)$ và $A(2;1;1)\in\Delta \Rightarrow \overrightarrow{MA}=(4;0;1)$ $\Rightarrow$ *vtpt* $\overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{MA}\right]=(-1;7;4)$ Suy ra $(P): -1(x+2)+7(y-1)+4z=0 \Leftrightarrow x-7y-4z+9=0$.	**0,5**
	$N\in\Delta \Rightarrow N(t+2;-t+1;2t+1)$. Khi đó $MN=\sqrt{(t+4)^2+(-t)^2+(2t+1)^2}=\sqrt{11}$ $\Leftrightarrow 6t^2+12t+6=0 \Leftrightarrow t=-1$. Suy ra $N(1;2;-1)$.	**0,5**
Câu 9. (0,5 điểm)	Số cách lấy hai viên bi từ hộp là $C_{12}^2=66$. Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu xanh, 1 viên màu đỏ và khác số là $4\times 4=16$. Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu xanh, 1 viên màu vàng và khác số là $3\times 4=12$. Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu đỏ, 1 viên màu vàng và khác số là $3\times 3=9$. Như vậy số cách lấy ra 2 viên bi từ hộp vừa khác màu vừa khác số là $16+12+9=37$. Suy ra xác suất cần tính là $$P=\frac{37}{66}\approx 0,5606.$$	**0,5**
Câu 10. (1,0 điểm)	Giả sử $z=\min\{x,y,z\}$. Đặt $x+\frac{z}{2}=u>0, y+\frac{z}{2}=v>0$. Khi đó ta có $$x^2+z^2\le\left(x+\frac{z}{2}\right)^2=u^2;\ y^2+z^2\le\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=v^2;$$ $$x^2+y^2\le\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=u^2+v^2. \quad (1)$$ Chú ý rằng với hai số thực dương u,v ta luôn có $$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\ge\frac{4}{u+v} \text{ và } \frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\ge\frac{8}{(u+v)^2}. \quad (2)$$ Từ (1) và áp dụng (2) ta được $$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\ge\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{u^2}$$ $$=\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)$$ $$\ge\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{2uv}+\frac{6}{(u+v)^2}$$ $$\ge\frac{4}{(u+v)^2}+\frac{6}{(u+v)^2}=\frac{10}{(u+v)^2}=\frac{10}{(x+y+z)^2}. \quad (3)$$ Mặt khác ta có $$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1$$ $$=xyz+x+y+z+2\ge x+y+z+2. \quad (4)$$ Từ (3) và (4) suy ra	**0,5**

thuvientoanhoc.com

	$P \ge \dfrac{10}{(x+y+z)^2} + \dfrac{5}{2}(x+y+z) + 5.$ (5)	
	Đặt $x+y+z = t > 0$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{10}{t^2} + \dfrac{5}{2}t,\ t > 0.$ Ta có $f'(t) = -\dfrac{20}{t^3} + \dfrac{5}{2},\ t > 0$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2;\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 2;\ f'(t) < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2.$ Suy ra $f(t) \ge f(2) = \dfrac{15}{2}$ với mọi $t > 0$. (6) Từ (5) và (6) ta được $P \ge \dfrac{25}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{2}$.	**0,5**

thuvientoanhoc.com