SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2024-2025

Môn Toán học (môn chuyên)
Thời gian làm bài 150 phút
(Đề thi gồm một trang có năm bài).

Bài 1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}\right) : \left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+5}\right)$ (với $0 \le x \ne 4$).

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Bài 2. (1,5 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 6x - 12y = 0 \\ (x - y + 5)^4 + (y + 5)^2 = 2. \end{cases}$

Bài 3. (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, với b, c, d là các số nguyên. Biết rằng $P(x)$ có một nghiệm $x = \sqrt{2}$ và $P(1) = 4$. Tìm b, c, d.

2) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \ge \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+b)^2+3} + \sqrt{(b+c)^2+3} + \sqrt{(c+a)^2+3} \ge 6.$$

Bài 4. (2 điểm)

1) Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\text{lcm}(x, y) + 2.\gcd(x, y) = 61$.
(Với $\text{lcm}(a, b)$, $\gcd(a, b)$ lần lượt là ký hiệu bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b).

2) Tìm số nguyên tố p để $n = 2^p + p^2$ là số nguyên tố.

3) Chứng minh rằng với mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên, ta luôn tìm được hai số a và b trong 7 số đó sao cho $ab + 1$ là số chính phương.

Bài 5. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường trung trực đoạn thẳng BD tại điểm P. Hai đường thẳng DP và AC cắt nhau tại điểm E.

1) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

2) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và đường tròn (O), với Q khác A.
Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AD và đường tròn (O), với K khác A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CQ và DP. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

HẾT

(*Các thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu*).
Họ và tên thí sinh: .....Số báo danh: ..... Trường, trung tâm: .....

thuvientoanhoc.com

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1.			2,00
	1)	*Rút gọn biểu thức*:	1,00
		$P = \left(\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}\right) : \left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+5}\right)$ (với $0 \le x \ne 4$) $= \left[\dfrac{(\sqrt{x})^3 - 2^3}{\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}\right] : \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}+5}$	0,25
		$= \left[\dfrac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}\right] \cdot \dfrac{\sqrt{x}+5}{x+5\sqrt{x}-5\sqrt{x}+4}$	0,25
		$= (x + 2\sqrt{x} + 4 - 2\sqrt{x}) \cdot \dfrac{\sqrt{x}+5}{x+4}$	0,25
		$= \sqrt{x} + 5$.	0,25
	2)	*Tìm m*:	1,00
		Ta có $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (1). $\triangle' = (-m)^2 - 1.(m-3) = m^2 - m + 3$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \triangle' = m^2 - m + 3 > 0$	0,25
		Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = m - 3$.	0,25
		Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2(m-3) = 8$ $\Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0$.	0,25
		$\Leftrightarrow m = 1$ (nhận) hoặc $m = \dfrac{-1}{2}$ (nhận) (vì $2 + (-1) + (-1) = 0$). Do đó có hai giá trị cần tìm là $m = 1, m = \dfrac{-1}{2}$.	0,25
2.			1,50
	1)	*Giải phương trình nghiệm nguyên*:	0,50
		Ta có $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$, với $x,\ y \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow 2x(x+2y) + 3(x+2y) = 4 \Leftrightarrow (x+2y)(2x+3) = 4$ (1). Vì $x\ , y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2y,\ 2x + 3 \in \mathbb{Z}$ và $2x + 3$ là số lẻ. Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 1 \\ x+2y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x+2y = -4 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ (loại) hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ (nhận). Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x\ ;\ y)$ là $(-2\ ;\ -1)$.	0,25
		Cách 2:	0,50
		Giải như cách 1, phương trình đã cho tương đương $(x+2y)(2x+3) = 4$ (1). Vì $x\ , y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2y,\ 2x + 3 \in \mathbb{Z}$ Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 1 \\ x+2y = 4 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x+2y = -4 \end{cases}$ (II) hoặc $\begin{cases} 2x+3 = 2 \\ x+2y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+3 = -2 \\ x+2y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+3 = 4 \\ x+2y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+3 = -4 \\ x+2y = -1. \end{cases}$	0,25

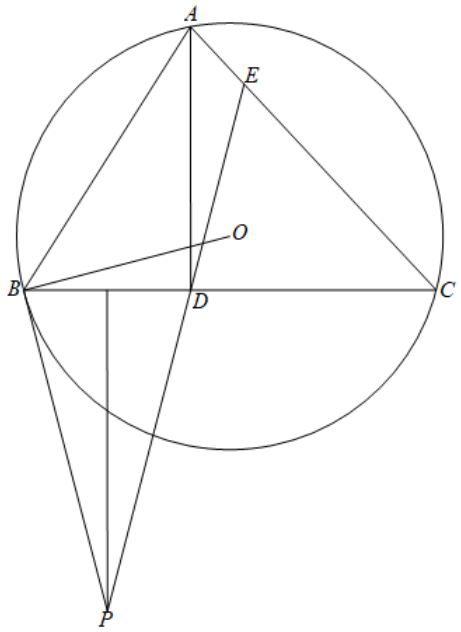
thuvientoanhoc.com

		(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ (loại). (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ (nhận). Tương tự các hệ phương trình còn lại không có nghiệm nguyên. Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ là $(-2\,;\,-1)$.	0,25
	2)	*Giải hệ phương trình*:	1,00
		Ta có $\begin{cases} x^2-2xy+6x-12y=0\ (1) \\ (x-y+5)^4+(y+5)^2=2\ (2). \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow x(x-2y)+6(x-2y)=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+6)=0.$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-6. \end{array}\right.$	0,25
		Với $x=-6$ ta có $(2) \Leftrightarrow (y+1)^4+(y+5)^2=2$ (3). Đặt $a=y+1$. (3) trở thành $a^4+(a+4)^2-2=0 \Leftrightarrow a^4+a^2+8a+14=0$ $\Leftrightarrow a^4-2a^2+1+2(a^2+4a+4)+a^2+5=0$ $\Leftrightarrow (a^2-1)^2+2(a+2)^2+a^2+5=0$, phương trình này vô nghiệm (vì $(a^2-1)^2+2(a+2)^2+a^2+5>0, \forall a\in\mathbb{R}$).	0,25
		Với $x=2y$ (4) ta có $(2) \Leftrightarrow (y+5)^4+(y+5)^2-2=0$ (5). Đặt $t=(y+5)^2\geq 0$. (5) trở thành $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ (nhận) hoặc $t=-2$ (loại) (do $1+1-2=0$) Vậy $(y+5)^2-1=0 \Leftrightarrow (y+6)(y+4)=0 \Leftrightarrow y=-6$ hoặc $y=-4$. - Với $y=-6$ ta có $(4) \Leftrightarrow x=-12$. - Với $y=-4$ ta có $(4) \Leftrightarrow x=-8$. Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(-12\,;\,-6)$, $(-8\,;\,-4)$.	0,25
		Cách 2:	1,00
		Ba bước đầu như cách 1.	0,75
		Với $x=2y$ (4) ta có $(2) \Leftrightarrow (y+5)^4+(y+5)^2-2=0$ $\Leftrightarrow (y+5)^4-(y+5)^2+2(y+5)^2-2=0 \Leftrightarrow (y+5)^2[(y+5)^2-1]+2[(y+5)^2-1]=0$ $\Leftrightarrow [(y+5)^2-1][(y+5)^2+2]=0$ $\Leftrightarrow (y+5)^2-1=0$, (vì $(y+5)^2+2>0, \forall y\in\mathbb{R}$). $\Leftrightarrow (y+6)(y+4)=0 \Leftrightarrow y=-6$ hoặc $y=-4$ - Với $y=-6$ ta có $(4) \Leftrightarrow x=-12$. - Với $y=-4$ ta có $(4) \Leftrightarrow x=-8$. Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(-12\,;\,-6)$, $(-8\,;\,-4)$.	0,25
3.			1,50
	1)	*Tìm b, c, d*:	1,00
		Ta có $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$ (với $b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$). Vì $P(1)=4$ nên $1+b+c+d=4 \Leftrightarrow b+c+d=3$ (1).	0,25
		Vì $x=\sqrt{2}$ là một nghiệm của $P(x)$ nên $P(\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+2b+\sqrt{2}\,c+d=0$	0,25
		$\Leftrightarrow 2b+d=-\sqrt{2}\,(c+2) \Rightarrow c+2=0 \Leftrightarrow c=-2$ (vì $c\in\mathbb{Z}$ nên nếu $c+2\neq 0$ thì $-\sqrt{2}\,(c+2)$ là số vô tỷ, vô lý, do $2b+d\in\mathbb{Z}$ nên không là số vô tỷ).	0,25
		Kết hợp với (1) ta có $\begin{cases} b+d=5 \\ 2b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ d=10. \end{cases}$ Vậy các giá trị cần tìm là $b=-5, c=-2, d=10$.	0,25
	2)	*Chứng minh bất đẳng thức*:	0,50

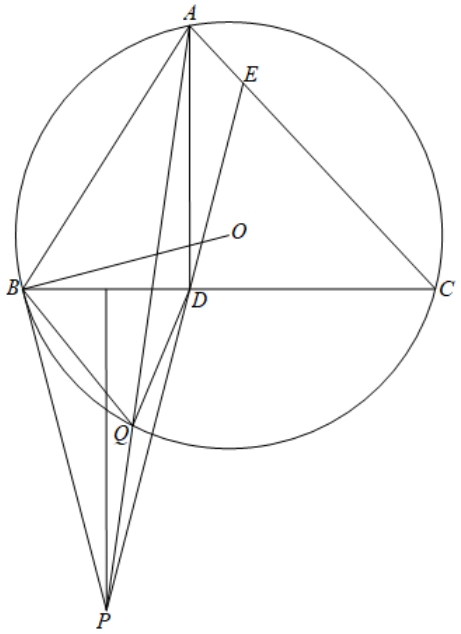
thuvientoanhoc.com

		Ta có $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $a+b+c \geq \dfrac{3}{2}$. Cần chứng minh $\sqrt{(a+b)^2+3} + \sqrt{(b+c)^2+3} + \sqrt{(c+a)^2+3} \geq 6$ (1). Bổ đề: Với $x > 0$ ta có $x^2+3 \geq \dfrac{(x+3)^2}{4}$ (2). Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow 4x^2+12 \geq x^2+6x+9 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng, $\forall x \in \mathbb{R}$).	0,25
		Áp dụng (2) ta có $\sqrt{(a+b)^2+3} \geq \sqrt{\dfrac{(a+b+3)^2}{4}} = \dfrac{a+b+3}{2}$. Tương tự $\sqrt{(b+c)^2+3} \geq \dfrac{b+c+3}{2}$ và $\sqrt{(c+a)^2+3} \geq \dfrac{c+a+3}{2}$. Vậy $\sqrt{(a+b)^2+3} + \sqrt{(b+c)^2+3} + \sqrt{(c+a)^2+3} \geq \dfrac{2(a+b+c)+9}{2} \geq 6$. Bất đẳng thức (1) được chứng minh, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}$.	0,25
4.			2,00
	1)	*Tìm các số nguyên dương x và y*:	0,50
		Cần tìm $x, y \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\text{lcm}(x,\ y) + 2.\gcd(x,\ y) = 61$ (1). Đặt $d = \gcd(x,\ y) \Rightarrow x = dm$ và $y = dn$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\gcd(m,\ n) = 1$. $\Rightarrow \text{lcm}(x,\ y) = dmn$. Vậy (1) $\Leftrightarrow dmn + 2d = 61 \Leftrightarrow d(mn+2) = 61$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ mn+2 = 61 \end{cases}$ (vì 61 là số nguyên tố, $d = \gcd(x,\ y)$ nên $d \in \mathbb{N}^*$ và do $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $mn+2 > 2$). Vậy $mn = 59 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 59 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = 59 \\ n = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 59 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 59 \\ y = 1. \end{cases}$ Do đó các số nguyên dương cần tìm là $x = 1$ và $y = 59$, $x = 59$ và $y = 1$.	0,25
	2)	*Tìm số nguyên tố p để n là số nguyên tố*:	0,75
		Ta có $n = 2^p + p^2$, với p là số nguyên tố. Nếu $p = 3$ thì $n = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.	0,25
		Nếu $p = 2$ thì $n = 2^2 + 2^2 = 8$ không là số nguyên tố. Nếu số nguyên tố $p \geq 5$ thì $p = 2m+1$, với $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2^p = 2^{2m+1} = 2.4^m$ có số dư bằng 2 trong phép chia cho 3 (vì 4^m có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3, $\forall m \in \mathbb{N}$),	0,25
		vì số nguyên tố $p \geq 5$ nên $p = 3k \pm 1$, với $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow p^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3. Vậy $n = (2^p + p^2) \vdots 3$ (do $p \geq 5$) hay n không là số nguyên tố, với mọi số nguyên tố $p \geq 5$. Do đó $p = 3$ thỏa mãn bài toán.	0,25
	3)	*Chứng minh luôn tìm được hai số a, b*:	0,75
		Gọi A là tập hợp gồm 12 số nguyên dương đầu tiên, vậy A được chia thành 6 cặp số gồm $\{1\ ;\ 3\}, \{5\ ;\ 7\}, \{9\ ;\ 11\}, \{2\ ;\ 4\}, \{6\ ;\ 8\}, \{10\ ;\ 12\}$.	0,25
		Nhận xét: Nếu n là số nguyên dương thì $n(n+2)+1$ là số chính phương (vì $n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$). $\Rightarrow a \neq b$ là hai số trong mỗi cặp số nói trên thì $ab+1$ là số chính phương.	0,25

thuvientoanhoc.com

		Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên thì luôn tồn tại ít nhất 2 số thuộc một trong 6 cặp số đó. Áp dụng tính chất ở nhận xét trên ta có điều phải chứng minh.	0,25
		Cách 2:	0,75
		Gọi $A = \{1;\ 2\,;\ldots;\ 12\}$ là tập hợp gồm 12 số nguyên dương đầu tiên. Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong A thì luôn tồn tại ít nhất 2 số là hai số lẻ liên tiếp hoặc hai số chẵn liên tiếp.	0,25
		Mà $1.3 + 1 = 4$ là số chính phương, $3.5 + 1 = 16$ là số chính phương, ..., $9.11 + 1 = 100$ là số chính phương.	0,25
		$2.4+1 = 9$ là số chính phương, $4.6+1 = 25$ là số chính phương, ..., $10.12+1 = 121$ là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.	0,25
5.			3,00
	1)	*Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn*:	1,00
			0,25
		Ta có $PB = PD$ (vì P thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD $\Rightarrow \triangle PBD$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PDB} = \widehat{PBD}$.	0,25
		hay $\widehat{PDB} = \widehat{PBC}$. Mà $\widehat{PBC} = \widehat{BAC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)). Nên $\widehat{PDB} = \widehat{BAC}$	0,25
		hay $\widehat{PDB} = \widehat{BAE}$. Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (vì có góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối nên hai góc đối bù nhau).	0,25
		Cách 2:	1,00
		Ba bước đầu như cách 1	0,75
		Mà $\widehat{PDB} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Vậy $\widehat{BAE} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ Do đó tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.	0,25
	2)	*Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$*:	1,00

thuvientoanhoc.com



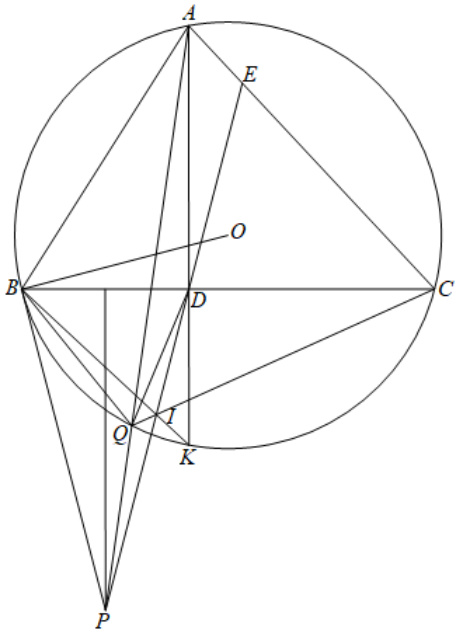
Ta có $\widehat{PBQ} = \widehat{BAQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)) hay $\widehat{PBQ} = \widehat{BAP}$. | 0,25

Mà $\widehat{BPQ} = \widehat{BPA}$ (góc chung).
Vậy $\triangle BPQ \backsim \triangle APB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{PB}{AP} = \dfrac{PQ}{PB}$ | 0,25

$\Leftrightarrow \dfrac{PD}{AP} = \dfrac{PQ}{PD}$ (do $PB = PD$, chứng minh trên). | 0,25

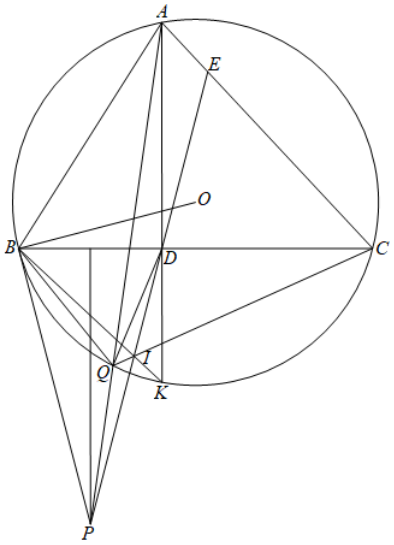
Mà $\widehat{DPQ} = \widehat{APD}$ (góc chung).
Vậy $\triangle DPQ \backsim \triangle APD$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$. | 0,25

3) *Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng*: | 1,00



Tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BDI}$ (vì cùng bù với $\widehat{BDE}$) hay $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$. | 0,25

thuvientoanhoc.com

		Tứ giác $ABQC$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{BQC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ hay $\widehat{BQI} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BQI} + \widehat{BDI} = 180^\circ$.	0,25
		$\Rightarrow$ tứ giác $BDIQ$ nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow \widehat{QBI} = \widehat{QDI}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDIQ$).	0,25
		Mà $\widehat{QDI} = \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$ (chứng minh trên). Mặt khác $\widehat{PAD} = \widehat{QAK} = \widehat{QBK}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)). Vậy $\widehat{QBI} = \widehat{QBK}$. Do đó ba điểm B, I, K thẳng hàng.	0,25
		Cách 2:	1,00
		 Ta có $\widehat{AQC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)) hay $\widehat{AQI} = \widehat{ABD}$.	0,25
		Mà $\widehat{ABD} + \widehat{AED} = 180^\circ$ (do tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn) hay $\widehat{ABD} + \widehat{AEI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AQI} + \widehat{AEI} = 180^\circ$. $\Rightarrow$ tứ giác $AEIQ$ nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow \widehat{EIQ} + \widehat{EAQ} = 180^\circ$ hay $\widehat{DIQ} + \widehat{CAQ} = 180^\circ$.	0,25
		Lại có $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)) hay $\widehat{CAQ} = \widehat{DBQ}$. Nên $\widehat{DIQ} + \widehat{DBQ} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BDIQ$ nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow \widehat{QBI} = \widehat{QDI}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDIQ$).	0,25
		Mà $\widehat{QDI} = \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$ (chứng minh trên). Mặt khác $\widehat{PAD} = \widehat{QAK} = \widehat{QBK}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)). Vậy $\widehat{QBI} = \widehat{QBK}$. Do đó ba điểm B, I, K thẳng hàng.	0,25

Hướng dẫn chung:

- Nếu thí sinh giải cách khác đúng thì được điểm tối đa theo quy định và cách cho điểm thành phần trên cơ sở của Hướng dẫn chấm và Biểu điểm này.
- Tổ Giám khảo môn Toán học thống nhất trước khi chấm theo Hướng dẫn chấm và Biểu điểm này.

thuvientoanhoc.com