SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **30/ 09/ 2022**

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} x^3+2x^2+2x+2=y \\ y^3-2y-7=z \\ (z+3)(z^2+2z+2)=x \end{cases}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1=2022 \\ 4x_n^2-4(2x_n+1)x_{n+1}+2023=0, \forall n\geq 1. \end{cases}$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có trực tâm H và ba đường cao AD, BE, CF. Gọi M là trung điểm của BC, X là giao điểm của BC và EF. Đường thẳng qua X song song với HM cắt BE, CF lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh $XA.MD = AD.HM$.

b) Chứng minh bốn điểm A, P, Q, H đồng viên.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho số nguyên tố $p\geq 5$.

a) Đặt $n=4^p-1$. Chứng minh rằng n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

b) Với a là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2+a+a^2+...+a^{p-1}$ không là số chính phương.

Câu 5. *(4,0 điểm)*

Cho tập hợp $X=\{1,2,...,13\}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một họ gồm ít nhất 131 tập con có 7 phần tử của X sao cho hai tập con A, B bất kì trong họ đều thỏa mãn $|A\cap B|\leq 5$.

b) Xét họ Ω gồm k tập con có 7 phần tử của X. Một tập con A của X được gọi là tập mẹ nếu như $|A|=8$ và tồn tại $B\in\Omega$ sao cho $B\subset A$. Gọi d là số tập mẹ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{d}{k}$.

----------*Hết*----------

thuvientoanhoc.com

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **01/10/2022**

Câu 1. *(5,0 điểm)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

1) Chứng minh rằng $(a^2+a+b)(ab+b+1)\geq b(2a+1)^2$.

2) Chứng minh rằng $\frac{4b-1}{(2a+1)^2}+\frac{4c-1}{(2b+1)^2}+\frac{4a-1}{(2c+1)^2}\geq 1$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(2x+f(y)+xf(y)\big)=x+y+xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 3. *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng qua C song song với AB cắt BE tại M, đường thẳng qua B song song với AC cắt CF tại N. Điểm D là hình chiếu của H trên MN, I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh AH, DI, EF đồng quy.

2) Gọi J là trung điểm của AH. Đường thẳng IJ cắt BE, CF lần lượt tại U, V. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HUV và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại điểm T khác H. Chứng minh ba điểm A, T, I thẳng hàng.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1) Cho số nguyên dương n và số nguyên tố lẻ p. Biết p là ước của $3^{2^n}+1$, chứng minh $p-1$ chia hết cho 2^{n+1}.

2) Cho $2n$ điểm phân biệt trong không gian (với $n\geq 2$) sao cho trong chúng không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Xét n^2+1 đoạn thẳng bất kì, mỗi đoạn có hai đầu mút là hai trong số $2n$ điểm trên. Chứng minh rằng có ít nhất một tam giác được tạo thành từ n^2+1 đoạn thẳng trên.

.....*Hết*.....

thuvientoanhoc.com